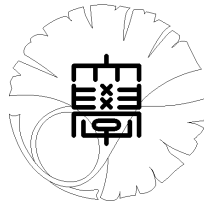


数理科学実践研究レター 2023-1 March 30, 2023

平均場ゲーム理論に基づく人流問題の解析

by

渡辺 彬生、矢野 良輔



UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

平均場ゲーム理論に基づく人流問題の解析

渡辺彬生¹ (東京大学大学院理学系研究科)

Akimi Watanabe (Graduate School of Science, The University of Tokyo)

矢野良輔² (東京海上ディーアール (株))

Ryosuke Yano (Tokio Marine dR Co., Ltd.)

概要

ゲーム理論は少人数のエージェント間での非協力ゲームについての理論である。平均場ゲーム理論では、エージェントの人数を各地点における密度として連続的に扱うことで、エージェントが十分多い場合のゲーム理論を解析できる。計算量が膨大で難解な問題だが、近年、機械学習を用いたシミュレーションが進展した。本論文では平均場ゲーム理論の応用例の一つである人流問題について、機械学習を用いてさまざまな設定でシミュレーションを行った。

1 はじめに

複数の参加者 (エージェント) が存在する状況で、各エージェントが自分の利益を最大化することを目的に合理的に行動するとき、どのように振る舞うかについての理論がゲーム理論である。例えば待機列の横入りや映画館からの退出、株の売買など、日常においても人々はさまざまな場面で自身の利益を最大化するように振る舞う。

各エージェントが他のエージェントと協議や取り決めに一切行えない場合を特に非協力ゲームと呼ぶ。Nash は 1950 年、このようなセットアップについて定式化し、人々の行動は特定の均衡状態 (Nash 均衡) に落ち着くことを求めた [1]。

元々のゲーム理論は有限人について記述するものだったが、これをエージェントの数が十分大きい場合について拡張した理論が、Lasry と Lions によって 2007 年に提案された平均場ゲーム理論である [2]。「平均場」の名称は統計力学で、粒子数が十分多い場合に、ある粒子が他の粒子から受ける作用を近似的に表す手法である平均場理論に由来する。エージェントの人数が十分大きい極限では、各エージェントを数えることは不可能になるが、各戦略をとるエージェントがどれくらいいるかを、戦略についての連続的なパラメータ³を引数とした密度として表すことから、連立偏微分方程式に帰着させることができる。

平均場ゲーム理論は、現実での数々の問題に適用が可能である。例えば、2011 年に Lachapelle と Wolfram は、平均場ゲーム理論を人流問題へ応用した [3]。人流問題は、人々の戦略を「出発地から目的地へできるだけ早く、かつできるだけ他の人と接触せずに移動する」と設定すると、人が十分に多い極限では平均場ゲーム理論の一種として扱うことができる。

以上のように平均場ゲーム理論は魅力的な理論であるが、土台は連立偏微分方程式であり、さらに一方の方程式は初期値が与えられ他方は終値が与えられており、かなりの難問である。そのため、解析的な一般解を求めることは不可能であり、さまざまな解決策が考案されてきた。

このような境界条件付きの偏微分方程式は量子力学で Schrödinger 方程式を解くために長年研究されており、Swiecicki, Gobron, Ullmo は 2016 年に、変数変換を行うことで平均場ゲーム理論が非線形 Schrödinger 方程式 (Gross-Pitaevskii 方程式) に帰着することを発見した [4, 5, 6]。その後、Ullmo と共同研究者らによって、さまざまな条件下での Schrödinger 方程式を利用した解析が行われた [7, 8, 9, 10]。

変数変換によって物理学の知見を利用する方法以外にも、連続的な変数をメッシュ状に区切り数値計算することで偏微分方程式を直接解く試みも Achdou らによって行われた [11, 12]。この方法は、戦略についてのパラメータの空間が 1 次元、2 次元のような低次元の場合には現実的な計算量で精度の

¹awatanabe@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

²ryosuke.yano@tokiorisk.co.jp

³例として、同じ商品を複数の店が売っている場合の各店の売値が上げられる。また、人流問題における人々の位置のように、このパラメータ空間が現実の空間と対応している場合もある。

良い結果が得られる。一方、メッシュに区切る弊害として、パラメータの空間が3次元、4次元と増えるに従って計算量が膨大になることが挙げられる。これへの解決策として、Ruthottoらによって2020年に、パラメータ空間をメッシュに区切らず機械学習によって解を見つける手法が開発された[13]。

本論文では、平均場ゲーム理論の応用例として人流問題を考え、Ruthottoらの手法をさまざまな状況に適用してシミュレーションを行う。2章では、平均場ゲーム理論の定義と機械学習による解法についてレビューする。3章では、人流問題に限定して問題設定し、6通りの状況で実際のシミュレーションを行う。4章は、本論文のまとめと今後の展望について述べる。

2 平均場ゲーム理論と解法

2.1節で平均場ゲーム理論を定義し、2.2節でラグランジュ法を利用して機械学習を適用する方法を説明する。より詳細な説明は、2.1節については[2]、2.2節については[13]を参照。

2.1 定義

平均場ゲーム理論ではエージェントは無限人おり、通常のゲーム理論のようにエージェントごとの式を得ることはできない。このため、戦略のパラメータ空間における場所 x と時刻 t について、エージェントの密度 $\rho(x, t) \in \mathbb{R}$ と価値関数 $\Phi(x, t) \in \mathbb{R}$ の微分方程式で記述する。時刻0から時刻 T までを考える。

$\Phi(x, t)$ の時間発展を記述する偏微分方程式は以下の Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程式である。特筆すべき点として、 Φ は時刻 T での終値が関数 G で与えられている。

$$-\partial_t \Phi(x, t) + H(x, \nabla \Phi(x, t)) = F(x, \rho(x, t)), \quad (1)$$

$$\Phi(x, T) = G(x, \rho(x, T)). \quad (2)$$

H はハミルトニアンと呼ばれ、粒子の時間発展を記述する基本的な量である⁴。 F は場所とエージェントの密度に依存する項で、具体的な問題ごとに設定することでエージェント間の相互作用を表す。 $\rho(x, t)$ の時間発展を記述する偏微分方程式は、以下の物質収支方程式で与えられる。

$$\partial_t \rho(x, t) - \nabla \cdot (\rho(x, t) \nabla_p H(x, p))|_{p \rightarrow \nabla \Phi(x, t)} = 0, \quad (3)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x). \quad (4)$$

これは、各エージェントは戦略を連続的に変化させることを意味する。また、HJB方程式とは逆に時刻0での初期値のみが与えられている。

以上の2つの連立偏微分方程式を解くことで、各戦略 x を取るエージェントの密度の時間変化を知ることができ、平均場ゲーム理論の解が得られる。しかし、2つの偏微分方程式双方に Φ と ρ が含まれており、一般の場合に解析的な解を得ることはできない。

2.2 機械学習による解法

一般の解析的な解は得られないが、現実の多くの問題では、数値計算による解さえ得られれば十分である。メッシュ状に区切って計算するよりも、本節で説明するように機械学習を用いた方が高次元の場合にも適用できる点で有用である。ラグランジュ法を用いて、初期位置 x のエージェントの時刻 t での位置は以下のように表せる。

$$z(x, t) = x - \frac{1}{\mu} \int_0^t \nabla \Phi(z(x, t), t) dt. \quad (5)$$

⁴例えば最も基本的な自由運動する粒子では、質量 m と運動量 p を用いて $H(x, p) = \frac{p^2}{2m}$ と表される。ポテンシャルの中を外力を受けながら運動する場合には対応した項が加わる。

これと物質収支方程式から、初期位置 x のエージェントが時刻 t で存在する位置 $z(x, t)$ におけるエージェント密度は、以下のように導出される⁵。

$$\rho(z(x, t), t) = \rho_0(x) \exp \left[\frac{1}{\mu} \int_0^t \Delta \Phi(z(x, t), t) dt \right]. \quad (6)$$

つまり、 $\Phi, \nabla \Phi, \Delta \Phi$ が分かれば ρ を求められる。便宜上、場所 x と位置 t を合わせて $s = (x, t)$ と表記する。重み $\theta = \{\theta_N, w, A, c, b\}$ を用いて以下のようにニューラルネットワークモデルを定義する。これらの重みは、場所と時間の変数 s に結合してニューラルネットワークモデルの表現力を高めるために導入するもので、実数、実数のベクトル、実数の正方行列で記述される。

$$\Phi(s, \theta) = w^T N(s, \theta_N) + \frac{1}{2} s^T (A + A^T) s + c^T s + b. \quad (7)$$

ここで $N(s, \theta_N)$ は ResNet と呼ばれるニューラルネットワークモデルであり、過学習を防ぐために入力と目的関数の差分を学習している [14]。

モデルの学習の基準として、損失関数を以下で定義する。

$$\sum_{k=1}^n v_k (c_L + c_F + c_G + c_1 + c_2). \quad (8)$$

ここで k はそれぞれのエージェントに対応する。エージェントは無人数で全てについて学習することはできないが、初期位置ごとに適切な重みで十分な数を選び出すことで近似できる。 c_L, c_F, c_G は HJB 方程式 (1)-(2) に出てくる L, F, G に対応する量で、エージェントが戦略パラメータの空間を移動する時の累積コストを意味する⁶。 c_1 は HJB 方程式 (1) を逸脱する場合へのペナルティ項で、 c_2 は境界条件 (2) を逸脱する場合へのペナルティ項である。簡単のためにいくつか引数を省略して書くが、これらのペナルティ項の定義は以下である。

$$c_1 \propto \int_0^T |\partial_t \Phi - H + F|(t) dt, \quad (9)$$

$$c_2 \propto |\Phi - G|(T). \quad (10)$$

この損失関数 (8) を最小にするように、ニューラルネットワークの重み θ を少しずつ変えながら学習させ、損失関数が最小になる場合の Φ が最終的に得られるモデルである。式 (8) からわかるようにニューラルネットワークの重み θ は Φ の値に影響を与え、式 (9), (10) に含まれる Φ を通して損失関数にも作用する。以上で Φ が得られ、式 (6) から ρ が得られる。

3 人流問題のシミュレーション

平均場ゲーム理論は利己的に振る舞う非常に多数のエージェントがどのような戦略をとるかについての理論であり、大勢の人がある地点から別の地点に移動するような状況はうってつけの応用例である。3.1 節で問題設定を説明し、3.2 節では我々が実際に機械学習モデルを用いてシミュレーションした結果とその解釈を述べる。シミュレーションの具体的な設定は本論文独自のものであるが、機械学習モデルについては [13] の著者らによって公開されているソースコードを利用した⁷。

3.1 問題設定

人流の解析において以下を仮定する。

⁵ $\rho(z(x, t), t)$ は $\rho(x, t)$ とは異なることに注意。前者は初期位置 x のエージェントの時刻 t での密度で、後者は時刻 t での位置 x のエージェントの時刻 t での密度。

⁶ L と H は解析力学ではそれぞれラグランジアン、ハミルトニアンと呼ばれる量で HJB 方程式は H を用いて書かれているが、Legendre 変換によって一方から他方を得ることができる [15]。

⁷<https://github.com/EmoryMLIP/MFGnet.jl>

- 人数が十分多い。
- 各人が自分の都合を優先する。
- 他人の動きは制御できない (非協力ゲーム)。

これらを満たすように、HJB 方程式中の関数 F を以下のように設定する。直感的な説明としては、 F は小さいほどエージェントにとって有利であり、 F が小さくなるように各エージェントは行動する。

$$F(x, \rho) = \lambda_F(\log \rho(x) + 1) + \lambda_P Q(x) \quad (11)$$

第1項はエントロピー項であり、エージェントが密集しないように振る舞うことを表す項である。第2項は選好項であり、エージェントはポテンシャル $Q(x)$ が小さい場所に行くことを好む。係数 λ_F, λ_P を設定することで、各項の寄与の大きさを調整できる。

3.2 結果と解釈

本論文のシミュレーションでは全て、2次元平面 (x, y) 上でのエージェントの移動を考える。これは、戦略パラメータの空間が実際のエージェントの場所と同じ例である。また、全ての場合で $\rho_0 = (0, 3)$ 付近から $\rho_1 = (0, -3)$ 付近への移動であるが、ポテンシャル $Q(x)$ を変えることで途中でさまざまな障害物を設置する。本論文でのポテンシャルは全てガウス関数の組み合わせで構成されており、それぞれの図の右側に描かれたバーのように高さを持っており、乗り越えることに高さに応じたコストがかかる障壁となる。図中の赤い線はいくつかのエージェントを代表として取り出した経路を表している。

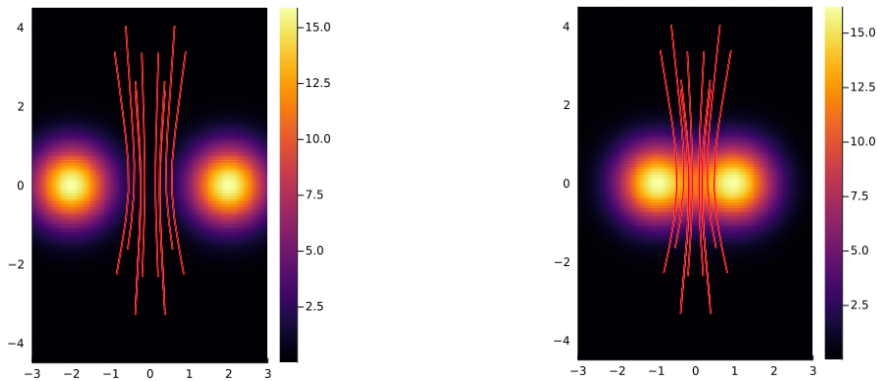


図 1: 経路の外側に障壁がある場合

図 2: 外側に障壁があり間隔が狭い場合

初めに、図 1 は移動経路の両側に障壁を設置した場合である。エージェントが障壁の上を通り抜けること、遠回りすること、他のエージェントと密集することがそれぞれコストとなっており、それら全てを可能な限り避ける経路が選択される。結果として、エージェントはやや内側に曲がった経路を選択する。図 2 は図 1 と同様、経路の両側に障壁を設置した場合であるが、さらに障壁間を狭くした場合である。この場合、遠回りによるコストを防ぎ、かつ障壁の上にはできる限り乗り上げないようにするため、エージェントは図 1 の場合以上に内側の経路を選択し、密集することになる。

このように 2 つの障壁の間隔を調整することはエージェントの経路選好に影響を与える。2 つの図 1 と図 2 からは一見、障壁の間隔を狭めるほどエージェントは密集するように推測される。そこで、図 3 ではそれらの極限として、経路の中央に横長の障壁がある場合をシミュレーションしている。2 つの障壁が近づき、中央のポテンシャルが大きくなると、障壁の上を通り抜けるコストを回避するために、エージェントは中央の障壁を迂回して進む。図 4 は図 3 の横長の障壁をさらに横に長くしたもので、この場合には、迂回するコストが障壁を乗り越えるコスト以上に大きくなるため、エージェン

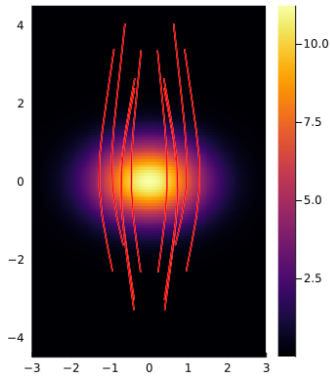


図 3: 経路の中央に障壁がある場合

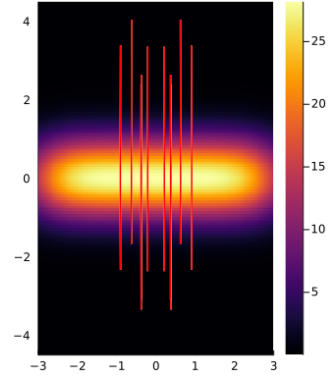


図 4: 横に長い障壁がある場合

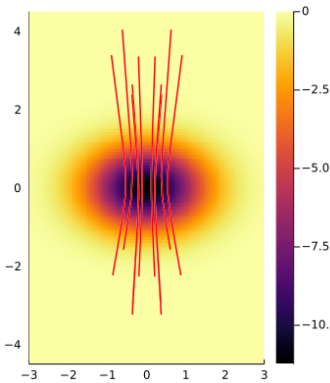


図 5: 経路の中央に負の障壁がある場合

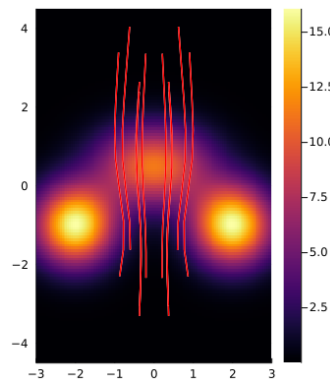


図 6: 複雑な障壁がある場合

トは障壁を最短経路で乗り越えて直線的に進むことを選択する。これらからわかるように、障壁の形状や配置の少しの変化が複数のコストのバランスに影響を与え、経路に大きな変化を与える。図 5 はこれまでとは反対に、負のポテンシャルを設置した場合である。これは通ることでエージェントが得をする領域であり、経路の中央に設置すると、経路が内側に曲がるのが確かめられた。図 6 は、図 1 から 5 と比べて複雑な障壁についてのシミュレーションである。経路の中央に障壁があり、それを通り抜けた後に両側にも障壁がある。平均場ゲーム理論を人流問題へ適用することで、このような非自明なシミュレーションも行うことができる。

4 おわりに

本論文では、平均場ゲーム理論と機械学習による解法について説明し、人流問題のシミュレーションをさまざまな設定で実行した。障壁がある場合の人流問題について、最も直接的な応用先としては、現実世界での障壁の設計が挙げられる。公共施設などにおいて、できるだけ余裕を持って広い範囲への侵入を防ぐような障壁を設計しようとする場合、障壁が広すぎると逆に無視するインセンティブを与えてしまうと言える。また、理想的な動線をできるだけ小さい障壁で設計するためにも、このようなシミュレーションが利用できるだろう。

今回は人流移動という具体的な例を扱ったが、より一般に、「与えた障壁とインセンティブによって人々の行動がどう変化するか」という問題だと捉えることもでき、コロナ禍での人々の行動など、より多くの適用領域を持ったテーマである。

テクニカルな問題としては、本論文で取り上げた例は全てポテンシャルが滑らかな関数で、さらに時間によって変化しない場合である。今後、不連続な関数や時間依存性を持つ関数を考えることで、より多くの状況を記述できるだろう。

謝辞 本論文は FMSP リーディング大学院プログラムにおけるリスク班での研究に基づきます。東京大学数理科学研究科の山本宏子氏、小林健太氏、林晃平氏から多くの有意義な助言をいただきました。心より感謝申し上げます。

参考文献

- [1] J. F. Nash, *Equilibrium points in n -person games*, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **36** (Jan., 1950) 48–49.
- [2] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, *Mean field games*, *Jpn. J. Math.* **2** (Mar., 2007) 229–260.
- [3] A. Lachapelle and M.-T. Wolfram, *On a mean field game approach modeling congestion and aversion in pedestrian crowds*, *Transportation Research Part B* **45** (Dec., 2011) 1572–1589.
- [4] E. P. Gross, *Structure of a quantized vortex in boson systems*, *Nuovo Cim* **20** (May, 1961) 454–477.
- [5] L. Pitaevskii, *Vortex lines in an imperfect Bose gas*, *Soviet Physics JETP* **13** (Aug., 1961) 646–651.
- [6] I. Swiecicki, T. Gobron, and D. Ullmo, *Schrödinger Approach to Mean Field Games*, *Phys. Rev. Lett.* **116** (Mar., 2016) 128701.
- [7] D. Ullmo, I. Swiecicki, and T. Gobron, *Quadratic mean field games*, *Physics Reports* **799** (Apr., 2019) 1–35.
- [8] T. Bonnemain and D. Ullmo, *Mean field games in the weak noise limit : A WKB approach to the Fokker–Planck equation*, *Physica A* **523** (June, 2019) 310–325.
- [9] T. Bonnemain, T. Gobron, and D. Ullmo, *Schrödinger approach to Mean Field Games with negative coordination*, *SciPost Phys.* **9** (Oct., 2020) 059.
- [10] T. Bonnemain, T. Gobron, and D. Ullmo, *Universal behavior in non-stationary Mean Field Games*, *Physics Letters A* **384** (Sept., 2020) 126608.
- [11] Y. Achdou and I. Capuzzo-Dolcetta, *Mean Field Games: Numerical Methods*, *SIAM J. Numer. Anal.* **48** (Jan., 2010) 1136–1162.
- [12] Y. Achdou and M. Laurière, *Mean Field Games and Applications: Numerical Aspects*, vol. 2281, pp. 249–307. Springer International Publishing, Cham, 2020.
- [13] L. Ruthotto, S. J. Osher, W. Li, L. Nurbekyan, and S. W. Fung, *A machine learning framework for solving high-dimensional mean field game and mean field control problems*, *Proc Natl Acad Sci USA* **117** (Apr., 2020) 9183–9193.
- [14] K. He, X. Zhang, S. Ren, and J. Sun, *Deep Residual Learning for Image Recognition*, pp. 770–778. IEEE, June, 2016.
- [15] H. Goldstein, C. P. Poole, and J. L. Safko, *Classical mechanics*. Addison Wesley, San Francisco Munich, 3. ed., [nachdr.] ed., 2008.