数理科学実践研究レター　2023–13 October 11, 2023

ピンホールモデルにおける再構成問題と箙多様体

by

島田 了輔

UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

ピンホールモデルにおける再構成問題と箙多様体

島田了輔[1]（東京大学大学院数理科学研究科）
Ryosuke Shimada (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概 要

de Campos Affonso は [3] において箙多様体を用いた基本多様体の新たな考察の手法を提唱した. この手法に基づき, 本論文では箙多様体の幾何と基本多様体の幾何との関係を考察する.

1 はじめに

コンピュータービジョンの研究において最も重要な問題の一つとして再構成問題と呼ばれるものがある. これはいくつかの 2 次元データ (写真) から元の 3 次元データを復元する問題である. 本論文では特に 2 台のカメラに関する再構成問題について考察する.

2 台のカメラに関する再構成問題に対するアプローチの一つとしてピンホールモデルというものがある. ピンホールモデルではそれぞれのカメラを行列によってモデリングする. このとき基本行列とはカメラの運動に関する情報を含むような行列である. 実は基本行列の集合は一つの固有値が 0 で, 残り 2 つの固有値が等しいような 3×3 の行列の集合と等しいことが知られている. さらに [1, §4] により, 基本行列たちは次のような多項式による方程式

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 0,\ 2(MM^{\mathrm{T}})M - \mathrm{tr}(MM^{\mathrm{T}})M = 0\}$$

で表すことができる. よって基本行列たちの集合 $\mathcal{E}$ は代数多様体とみなすことができ, これを基本多様体と呼ぶ. この $\mathcal{E}$ の代数幾何学的構造を調べ, それによって基本行列や再構成問題について理解しようというアプローチは [1] において提唱された. この方針に基づいて, 近年では基本多様体のチャウ形式を計算する [2] のような研究もある. ここでは $\mathcal{E}$ の複素化の射影化 $\mathcal{E}_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}^8_{\mathbb{C}}$ を考えこちらを調べる (この $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ もまた基本多様体と呼ばれる). というのも $\mathcal{E}$ は特異点を持たないが $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ は特異点を持ち, そして $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ の特異点の集合がある意味で $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ の代数幾何を特徴づけるという結果があるからである ([2, Proposition 2.2]). よって例えば $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ がどの点で特異か (あるいは正則か) という問題は基本多様体の研究で重要な問題であると言える.

このような先行研究を背景に de Campos Affonso は [3] において箙多様体を用いた基本多様体の新たな考察の手法を提唱した. そこではある箙多様体の部分多様体と基本多様体をある自然な射 σ によって結びつける. そして σ の性質, 特に平坦性がわかれば箙多様体の幾何に関する情報から基本多様体の幾何に関する情報を得ることができるわけである. 箙多様体は盛んに研究されておりこれに関する多くの研究結果があることを踏まえると, de Campos Affonso によるこの手法は基本多様体や再構成問題の研究において新たな洞察を与えることが期待できる. 本論文の目的はこの σ を調べるための新たな視点を提供することである.

2 箙多様体と基本多様体

次のような箙

$$W_1 \underset{i_1}{\overset{j_1}{\leftrightarrows}} V_1 \underset{B}{\overset{B'}{\leftrightarrows}} V_2 \underset{j_2}{\overset{i_2}{\leftrightarrows}} W_2$$

に付随する箙多様体 $\mathcal{M}(V,W)$ を考える. ここで $V_1 = V_2 = \mathbb{C}^2, W_1 = W_2 = \mathbb{C}^3, V = V_1 \oplus V_2, W = W_1 \oplus W_2$ である.

このとき j_2Bi_1 は 3×3 の複素行列である. したがって $\mathcal{M}(V,W)$ の部分多様体 E で $j_2Bi_1 \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ を満たす $[B,i,j]$ からなるものが定義できる. この時全射 $\sigma\colon E \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ で

$$\sigma([B,i,j]) = j_2Bi_1$$

[1] rshimada@ms.u-tokyo.ac.jp

によって定まるものがある．[3] ではこの σ が平坦なのではないかという予想が提唱された．もしこれが実現されれば, 例えば $x \in E$ での正則性が $\sigma(x) \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ での正則性を意味することがわかる．上に述べた通り $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ の正則性に関する問題は重要であるから, それが E の各点に関する情報から分かり得るというのは非常に興味深い．

3 主結果

定義より σ は $\sigma_0 \colon \mathcal{M}(V,W) \to \mathbb{P}^8_{\mathbb{C}}, [B,i,j] \mapsto j_2Bi_1$ の $\mathcal{E}_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}^8_{\mathbb{C}}$ による底変換で得られる．本論文では σ を直接調べる代わりに σ_0 を調べるという視点を新たに提案したい．つまり σ の (平坦性のような) 性質は σ_0 において既に成り立っているのではないかということである．この σ_0 を調べるに際してまず問題になるのが σ_0 は全射ではないということである．というのも j_2Bi_1 は $\mathbb{C}^2$ を経由するので可逆行列になり得ないからである．本論文では σ_0 を調べる最初の一歩として σ_0 の像の次元に関する次の定理を証明する．

定理 1 $\dim \mathrm{Im}\sigma_0 = 7$.

証明 上で述べた通り $\mathrm{Im}\sigma_0$ は $A \in \mathbb{P}^8_{\mathbb{C}}$ で $\det A = 0$ を満たすようなものからなる $\mathbb{P}^8_{\mathbb{C}}$ の閉部分多様体に含まれる．明らかにこの閉部分多様体の次元は 7 である．よって

$$\dim \mathrm{Im}\sigma_0 \leq 7.$$

また [4, Proposition 3.2.4 (1)] より $\dim \mathcal{M}(V,W) = 16$ であることがわかる．$x \in E$ を任意にとる．この時 [3, Theorem 1] より $\dim \sigma_0^{-1}(\sigma_0(x)) = 9$ であるから不等式

$$\dim \mathrm{Im}\sigma_0 \geq 16 - 9 = 7$$

が成り立つ．以上を合わせることで定理を得る．

4 終わりに

今回の主結果は σ_0 を考察するための最初の一歩である．σ_0 に対して成り立つ性質の多くは底変換により σ に引き継がれる．したがって今後 σ を調べていくにあたっては, 何が σ_0 で既に成り立っているのかという視点が重要であると思われる．

謝辞 本研究にあたり多くの有益な助言をくださった鮑 園園氏と株式会社ニコンの皆様に心より感謝申し上げます．また箙多様体に関する説明や助言をしてくださった金城 翼氏にも感謝申し上げます．

参考文献

[1] Faugeras O.D. and Maybank S., Motion from point matches: Multiplicity of solutions, nt. J. Comput.Vision 4, no. 3, 225-246, 1990.

[2] Fløystad G., Kileel J. and Ottaviani G., The Chow form of the essential variety in computer vision, Journal of Symbolic Computation, 97-119, 2018.

[3] Henrique de Campos Affonso, Computer vision and quiver varieties, 数理科学実践研究レター 2021, LMSR 2021-9.

[4] Saito Y., 量子群の既約 integrable 表現の crystal base と quiver variety, 数理解析研究所講究録, 1183 巻, 2001 年, 52-64.