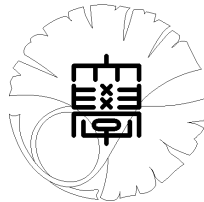


数理科学実践研究レター 2023-16 October 11, 2023

冷却器の一次元モデルの数値解法の改良

by

植田 健人



UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

冷却器の一次元モデルの数値解法の改良

植田健人¹ (東京大学大学院数理科学研究科)

Kento Ueda (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概要

熱交換器の温度制御は外部環境に応じた冷媒の流れの制御によって実現される。このとき冷媒は管の中を流れる液体もしくは気体であり、一次元の微分方程式によってその温度を記述することができる。しかしながら、外部環境によっては冷媒が状態変化し、熱伝導率が激しく変化するため、数値シミュレーションを著しく困難にしてきた。本研究では、それを解消する新手法を提案し、数値実験を行ったうえで、近似精度を保障するための定理を証明した。

1 導入

エアコンや冷蔵庫といった外部と内部の熱を交換するシステムを熱交換器といい、外部と内部を冷却管を通して行き来する冷媒によって温度を調整する。その性能向上のためには冷媒の温度シミュレーションが必要不可欠である。そのために、冷媒の一次元モデルが考案され、解析されてきたが、冷媒の物理的特性のために、それらのモデルの数値計算は著しく困難なものであり、社会数理実践研究では、以前からダイキン工業と東京大学が共同でこの一次元モデルの数値解法の確立に取り組んできた。この論文ではそれを引き継ぎ、新しい数値計算の方法を提案し、その数値実験の結果と理論的な精度の保証を示す。

ここで、問題となる冷媒の特性とは、冷媒が液体と気体の間で状態変化することで、熱伝達率が急激に変化することである。このとき液体から気体への変化をとくにドライアウトという。一次元の数値解法の中で最もよく知られた差分法は係数の滑らかさを精度の前提条件としており、不連続な係数の場合には数値解の精度の保証はなく、実際に数値解は安定せず振動してしまう。さらにいえば、差分法は初期値問題ならば一度の計算で可能である(ただし、初期値問題とはしばしば時刻 $t = 0$ における条件を定めているものを指すが、この論文では解は定常状態であり、初期値とは始点における境界条件を指す)が、境界値問題では終端で境界値が望む値になるまで初期値を調整する必要がある。一方、境界値問題においては、任意の次元で有限要素法を用いて数値解を効率的に求めることができる。しかしながら、この有限要素法は、微分方程式の係数が定数である場合に最も活用でき、そうでなくとも係数が解に依存する場合、素朴に用いることはできない。一方熱伝導率は近似の対象である温度に陽的に依存しているため、有限要素法もまた素朴に用いることができない。これを解消すべく、前年度は $d'(u)u' = v$ と変数変換を行うことで、方程式に移流項がない場合に係数の不連続性を解消するといった取り組みを行っていたが、事態の根本的な解決にまでは至らなかった [1]。

本研究では変数変換による解決のかわりに、熱伝導率に真の解ではなく決定された近似解を代入することで、方程式を u に対して線形にする方法を提案する。この手法では、適当な近似解から反復的によりよい近似解を得ることができ、それらの数値解は境界条件の変化に対して単調であり、近似の際の刻み幅を細かくすれば真の解に収束することも保証されている。

本論文の構成は以下になる。まず、第二章にて冷媒のモデルとなる方程式を与えるとともに、上述のアイデアを定式化、さらにそれを用いた数値計算の具体的な設定を述べる。第三章では、この手法が数値実験を保証することを示す定理の主張を述べる(証明は紙幅の都合上省略する)。第四章では、第二章の設定にしたがって数値実験を行った結果を解のグラフを中心にして述べる。第五章ではそれに基づく考察を、第六章では結論を述べる。第七章を研究協力者への謝辞に充てる。

¹keueda@ms.u-tokyo.ac.jp

2 モデル

本章では新手法のアイデアおよび数値実験における計算機の設定を述べる。

2.1 問題設定

冷媒の温度 τ は三次元の移流拡散方程式 $\rho\kappa u_1 \partial_x \tau = \nabla \cdot (d(\tau) \nabla \tau)$ で表すことができる。このとき、 ρ を密度、 κ を定積比熱、 u_1 を冷媒の流速、 $d = d(\tau)$ を熱伝導率とする。方程式が三次元の場合はシミュレーションに多大な計算量を要するため、一次元の温度モデルで近似する方法が知られている。これより、管が一直線の場合を例にとり、その導出法を見る。

管の断面を $D \subset \mathbb{R}^2$ とし、管の領域を $\{(x, y, z) | [0, 1] \times D\}$ とあらわす。冷媒は z 軸の正の向きに流れているものとし、外気温を 0 とする。このとき、 $\tau = \alpha(x)\beta(y, z)$ と変数分離できると仮定する。さらに、冷却管が一般に細長い、すなわち D が $[0, 1]$ に比べて十分に小さい領域であることから、 x を固定したとき d は D 上ほぼ定数とおく。 $\int_D \beta(y, z) dt = 1$ となるよう β をとると、 $\alpha(x)$ は断面 $\{x\} \times D$ 上における τ の平均値を表す。そこで、 $d(\tau) \approx d(\alpha)$ とおく。 d はドライアウト点で不連続であるが、状態変化は断面 $\{x\} \times D$ において発生するものと近似する。

このとき移流拡散方程式は、

$$\rho\kappa u_1 \alpha'(x) \beta(y, z) = (d(\alpha(x)) \alpha'(x))' \beta(y, z) + d(\alpha(x)) \alpha(x) (\partial_y^2 + \partial_z^2) \beta(y, z)$$

と記述される。 $-\lambda$ ($\lambda > 0$) を D 上におけるラプラシアン Δ のディリクレ問題の最大固有値とすると、 $(\partial_y^2 + \partial_z^2) \beta(y, z) \approx -\lambda \beta(y, z)$ と近似することができる。

これより、 α は $\rho\kappa u_1 \alpha' - (d(\alpha) \alpha')' + d(\alpha) \lambda \alpha = 0$ に従うものと近似できる。

風の流れと配管構造によって x ごとに外気温は変化するので、外気温の温度変化を $W[\alpha](x)$ 、熱伝達率を K として、 $KW[\alpha]$ という補正項を方程式に加えなくてはならない。ただし管においては熱伝導率は熱伝達率に比例するので、補正項を $d(\alpha)(x)W[\alpha](x)$ としてよい。

以上より、 α を次の方程式に従うものとみなすことができる。

$$\rho\kappa u_1 \alpha' - (d(\alpha) \alpha')' + d(\alpha) \lambda \alpha + d(\alpha) W[\alpha] = 0$$

ここで、冷媒の温度シミュレーションの目的は入口の温度に応じて冷媒の速度を調整し、出口における冷媒の温度を必要な値にすることである。したがって、入口と出口の冷媒温度を固定し、上述の方程式に対するディリクレ問題を解くことを目標とする。

2.2 発想

今回の研究で取り入れた発想は、温度 u に依存する熱伝導率 $d(u)$ を位置 x に依存する拡散係数 $d_1^*(x)$ で置き換え、 $d_n^*(x) \rightarrow d(u(x))$ という収束が成立するよう逐次的に $d_n^*(x)$ を定義していく、というものである。導入で説明した通り、冷媒のモデルとして取り扱う拡散係数の数値計算が困難な要因は、拡散係数が解 u に依存し、なおかつ不連続であることであった。これを位置 x に依存する形の確率変数に置き換えられるならば、不連続な拡散係数をもつ 1 次元拡散方程式を考えればよいが、これは不連続点に区切りを置いた有限要素法を用いて近似することができる。

拡散係数に相当する熱伝導率を u から x に等価な形で置き換えることはできなかったため、初期解 $\alpha_t^{(0)}$ を適当に定め、近似解 $\alpha_t^{(n)}$ が与えられたときに $\alpha_t^{(n+1)}$ を次の方程式の解として定める。

$$\rho\kappa u_1 (\alpha^{(n+1)})' - (d(\alpha^{(n)}) (\alpha^{(n+1)})')' + d(\alpha^{(n)}) \lambda \alpha^{(n+1)} + d(\alpha^{(n)}) W[\alpha^{(n+1)}] = 0$$

こうして逐次的に定まる $\alpha_t^{(n)}$ に対して、 $\alpha_t^{(n)} \rightarrow \alpha_t$ となることを期待する。なお、下記のように熱伝達率を区分的定数として考える場合には、ドライアウト点の関数として考えることができるため、上記の方法以外にも任意の反復法を用いて真の解を近似することができると思われる。

この発想の正当性は、第3章で確かめられる。

2.3 計算モデル

熱交換器の概略図と今回数値実験で用いた配管の図を下に示す。

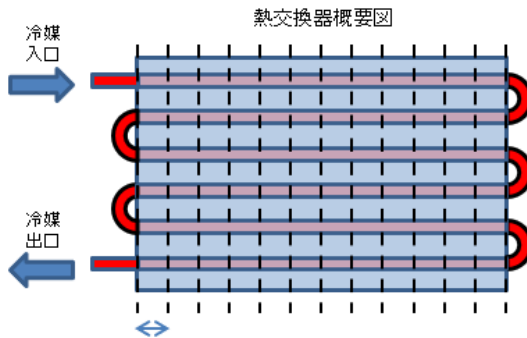


図 1: 熱交換器の模式図

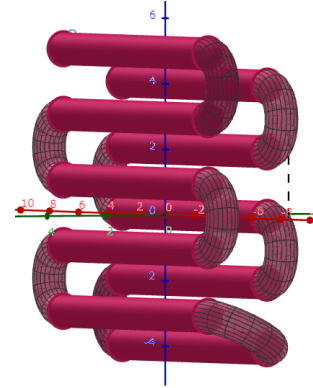


図 2: 今回実験対象とする配管

この図2の配管に対し、私は以下のような設定の下で、計算機上で数値実験を行った。

- 解は $[0, 1]$ 区間上の関数とし、始点を $x = 0$, 終点を $x = 1$ とする。
- 熱伝導率 d はドライアウトの前後でそれぞれ定数とする。すなわち、ドライアウトの起こる点を x^* として、 $x < x^*$ ならば $d^*(x) = d_1$ とし、 $x > x^*$ ならば $d^*(x) = d_2$ とする。
- 特に注意がなければ、境界値は $\alpha(0) = 1, \alpha(1) = 0.5$ 、熱伝導率は $d_1 = 0.5, d_2 = 1$ である。
- 解の近似は有限要素法 ([2]) によって行い、解の基底には連続区分1次関数(テント関数) ϕ を用いる。ただし、係数のスケールの問題からテスト関数に ϕ を用いた場合数値解が爆発を起こすため、 ϕ の代わりとして、適切な定数 c を用意して、 $\psi_c = \phi + c\phi'$ を用いる。この ψ_c を用いた有限要素法を SUPG 法という。([3],[2])
- 外気温を 0 とおく。
- 図1, 図2における両端の管が曲がっている部分の影響は無視できるほど小さい。
- ある地点における外気は風上の配管と熱を交換することで、風上の温度に対して線形に影響を受ける。

なおこのとき、十分刻み幅を細かくすることで、ドライアウト点が分割点上にあると近似することができ、プログラムはこちらのほうが高速で簡便である。

ただし、通常ドライアウトとは液体から気体になることをいう。一方、この設定では冷媒の温度は外気温より高く、外気によって冷媒は冷却される。つまり、ここで扱っているのはドライアウトと逆の現象である。ドライアウトを扱う場合には、温度の符号を反転させればよい。

この論文では、計算例として図2の形状の配管をモデル化した。このとき、風の流れは図の奥から手前(緑軸にそって右から左)に向かって流れているものとし、冷媒は手前の口から奥の口に通り返るものとする。

3 計算精度の保証

数値計算の新手法を検証した結果、理論面で以下の定理を得た。この定理は、熱伝導率を位置 x に依存する拡散係数に置き換えた場合に数値解を得る方法が存在すれば、下の方程式に対してその方法と今回の手法を組み合わせると数値計算を行ったとき、精度が保証される、ということの意味する。

定理 1 $F[u^*, u^{**}] = u$ は線形方程式

$$D[u^*](x)u' - a_2u'' + a_0(u - W[u^{**}, u](x)) = 0 \quad u(0) = u_s, u(1) = u_e$$

の解とする。

ただし、 $D[u^*](x) = d^{-1}(u^*)(a_1 - a_2d'(u^*))$ とし、 $d(x)$ は C^1 級の関数 g を用いて $d(x) = g(x) - r1_{[x \geq T_d]}$ とあらわされるものとする。

さらに、 $\|g^{-1}\|_\infty + a_2\|g'\|_\infty \leq \lambda_1 \ll 1$ とし、 $0 < C_1 \leq d \leq C_2$ とする。

さらに、 $W[u^{**}, u]$ は u についての線形写像であり、 $\lambda_2 \ll 1$ に対して、 $|W[u^{**}, u_1] - W[u^{**}, u_2]| \leq \lambda_2\|u_1 - u_2\|_\infty$ とする。

この時、次が成り立つ。

- $F[u^*, u^{**}]$ は $u^*(u^{**})$ に対して $C([0, 1])$ 上縮小写像であり、縮小率は $u^{**}(u^*)$ に対して一様である。すなわち、 u^*, u^{**} に依存しない定数 C が存在して、

$$|F[u_1^*, u^{**}] - F[u_2^*, u^{**}]| \leq C\|u_1^* - u_2^*\|_\infty$$

$$|F[u^*, u_1^{**}] - F[u^*, u_2^{**}]| \leq C\|u_1^{**} - u_2^{**}\|_\infty$$

さらに、ある定数 $C' < 1$ が存在して、次が成り立つ。

$$|F[u_1^*, u^{**}]'(0) - F[u_2^*, u^{**}]'(0)| \leq C'\|u_1^* - u_2^*\|_\infty$$

$$|F[u^*, u_1^{**}]'(0) - F[u^*, u_2^{**}]'(0)| \leq C'\|u_1^{**} - u_2^{**}\|_\infty$$

このとき u^*, u^{**} が微分可能で、区間 (u_e, u_s) において単調減少とするなら、 $F[u^*, u^{**}]$ もまた微分可能で、区間 (u_e, u_s) において単調減少である。

紙幅の都合上この定理の証明は省略するが、 F が第一変数 u^* に対して縮小写像であることを述べるのが主要な内容であり、そこでは

$$\hat{u} = F[u_1^*, u^{**}] - F[u_2^*, u^{**}]$$

として、 \hat{u} が満たすべき微分方程式から、 \hat{u} が特定の範囲を逸脱すると発散し、境界条件 $\hat{u}(0) = \hat{u}(1) = 0$ を満たさなくなることを示す。

またこのとき、 C の上界のひとつとして、 $\frac{ra_2}{a_1C_1} + (\lambda_1 + \lambda_2)a_0^{-1}$ を得ている。(このとき $C_1 = \inf_x d^*(x)$ とおいた)

それぞれのパラメータに対し、数値実験で用いた設定値の組を一つ例示すると、 $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0.001, \lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.1, C_1 = 0.5$ となり、 $C \leq 0.205$ となる。これにより、10 回の反復で精度を $\|u_{10} - u\|_{C^1} \leq 2 \times 10^{-7}$ とすることができる。(実際の計算では、もともとの数値解法が滑らかな関数を近似したときの誤差よりも誤差のオーダーを小さくすることはできない。)

4 数値実験の結果

2章の設定に従い、10回の反復計算によって次の左図のような数値解を得ることができた。

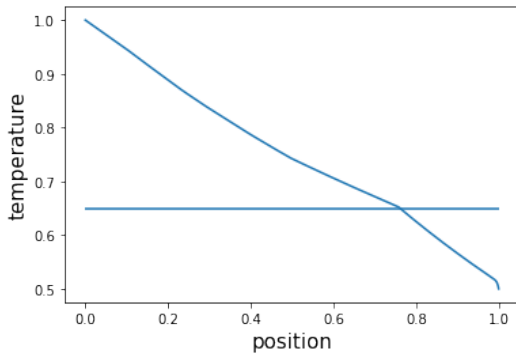


図 3: 最終的な解

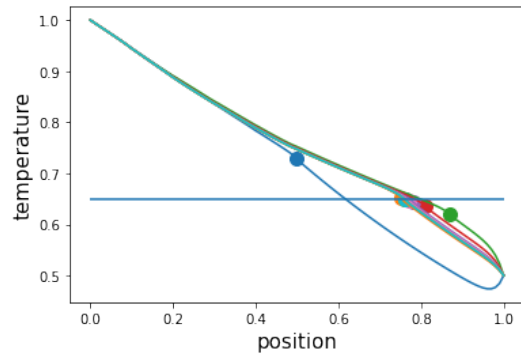


図 4: ドライアウト点の推移

このとき、左図の横線はドライアウト温度であり、数値解のドライアウト点がこの横線上にあることが観察できる。

また、右図の点は反復の途中にある数値解のドライアウト点であり、ドライアウト温度が数値解に向けて単調に収束していることがわかる。

なおこのとき、計算モデルの項で注意したように、SUPG 法などの処置を施さずに数値解を計算しようとする、数値振動が発生する。(図 5) 逆に、拡散項が移流項に比べて小さくない、すなわち、係数が連続な場合に振動を起こさないような条件の下では、今回の解法を通常有限要素法に対し適用しても数値振動は起きなかった。(図 6)

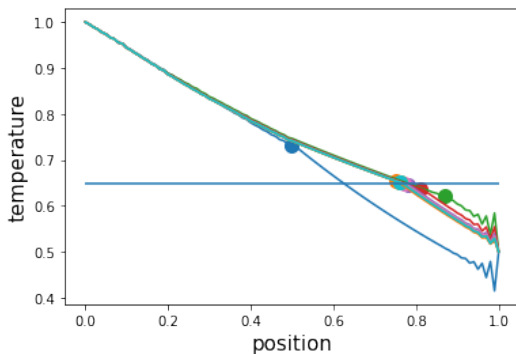


図 5: 数値振動する様子

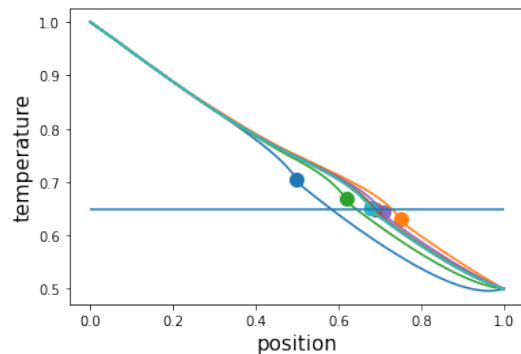


図 6: 拡散項が大きい場合

一方 SUPG 法のプログラムの検証のため、真の解が容易に計算できる方程式を用いて比較した結果、図 7 のように真の解との誤差が生じた。この誤差は係数の性質の良し悪しに影響されないが、図 8 のように刻み幅を小さくするほど誤差も小さくなる。これは SUPG 法を用いて安定化を行ったことによる誤差と推定される。そのため、数値解法の計算には必要な精度に応じて刻み幅を小さくする必要があると思われる。

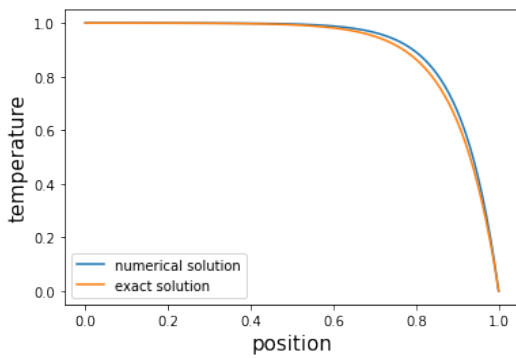


図 7: 単純な方程式の数値解と厳密解

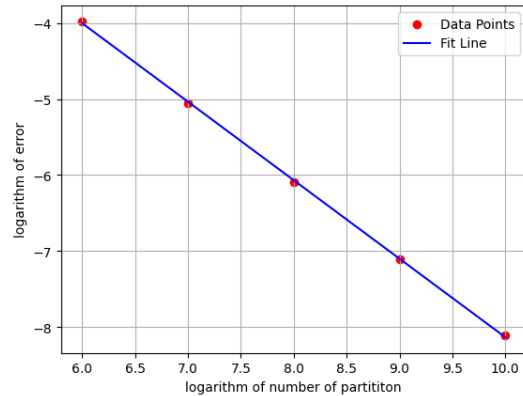


図 8: 誤差と区間の分割数の両対数グラフ

当初、この性質が現れたのはテスト関数が一次方程式であることに起因すると予想し、次のような三次方程式をテスト関数として用いたものの、計算時間が伸びただけで、数値解の誤差は改善されなかった。その際用いた多項式は、それぞれ $P(0)$, $P(1)$, $P'(0)$, $P'(1)$ のうち一つが 1, それ以外を 0 となるようにおいたものであり、次のように定義することができる。

$$P_0 = (1 + 2x)(1 - x)^2 \quad P_1 = (-2x + 3)x^2 \quad P_{0'} = x(1 - x)^2 \quad P_{1'} = (x - 1)x^2$$

5 考察

上記の定理から、境界値と熱伝導率の値がわかっていて、十分な精度の数値計算ができるならば、数値計算を反復することで十分な精度の数値解を得ることができる。また、実験結果から、数値計算の精度を上げるためには反復回数を増やすと同時に刻み幅を細かくすることが有益で、テスト関数を取り替えることなく良い精度が得られると期待される。

6 結論

本研究では冷却管の一次元モデルについて現実的な時間内に収束する数値解を計算することができ、その正当性を裏付ける理論を得ることができた。

このモデルに関する限り、理論面では十分な保証を得たと認識しているが、今回の数値実験では熱伝導率を区分的定数に単純化したため、熱伝導率を実際のデータに合わせて定義した場合に計算がうまくいくことは定理が保証しているものの、実験的に確かめられたわけではない。

そのため、応用面では、より現実に近い形で数値実験を行い、実験的に計算がうまくいくことを確かめること、また理論面では、他の問題に今回の手法を応用することが今後の目標になると思われる。

7 謝辞

本研究は WINGS-FMSP の助成を受けて行われました。

また、研究の過程で、課題および実務の立場からの知見を提供していただいたダイキン工業株式会社の布川賢一様、尾崎隆浩様、Badhan Pragnun 様、平松遼太様、横瀬清識様、高根沢悟様、また、数学的なアドバイスを提供していただいた東京大学教員の儀我義一先生、間瀬崇史先生、上田祐暉先生、許本源先生、同学生の中西亮さんにこの場を借りて感謝を述べさせていただきます。

参考文献

- [1] 佐藤翔一, 「相転移を含む熱交換器の数値モデル」, 2021, unpublished.
- [2] 菊池文雄, 「有限要素法の数値」, 1994, 培風館.
- [3] A. N. Brooks, A Petrov-Galerkin Finite Element Formulation for Convection Dominated Flows. Dissertation (Ph.D.), 1981, California Institute of Technology. doi:10.7907/Q164-VZ22.