論文の内容の要旨

論文題目　Differential models for the Anderson dual to bordism theories and invertible QFT's (ボルディズム理論の Anderson 双対の微分モデルと可逆な場の理論)

氏名　山下真由子

ボルディズムホモロジー理論の Anderson 双対とは, 理論物理学における場の理論の分類問題と深く関連する一般コホモロジー理論である．本論文の主結果は, ボルディズムホモロジー理論の Anderson 双対とそれに対応する微分コホモロジー理論についての結果である．結果は大きくわけて 2 つからなる．第一に, ボルディズムホモロジー理論の Anderson 双対と対応する微分コホモロジー理論に対する新しいモデルを与えた．第二に, Anderson 双対に関わるいくつかの微分コホモロジーの変換を構成し, それらのホモトピー論的な表示を得た．これらの結果にはいずれも物理的な解釈がある．

スペクトラム E に対して, その Anderson 双対と呼ばれるスペクトラム IE が定まる．多様体の接束の構造群 G を固定したとき, それに対応する G-ボルディズムホモロジー理論 Ω^G_* を表現する Madsen-Tillmann スペクトラム MTG が定まるが, この Anderson 双対 $IMTG$ の表現するコホモロジー理論 $(I\Omega^G)^*$ が本論文の主題である．Freed と Hopkins は [FH21] において, G-多様体上の可逆な場の理論の変形同値類が $I\Omega^G$ を用いて分類されると予想した．しかし Anderson 双対の数学的定義は抽象的である．本論文ではこの予想に新しい理解を与えようという動機のもと, Anderson 双対に対して場の理論に直接結びつくような新たな描像を与えた．

第一の結果は $I\Omega^G$ のモデル $I\Omega^G_{\mathrm{dR}}$ の構成である．Part I の前半部分に対応する．多様体 X に対してまず $(\widehat{I\Omega^G_{\mathrm{dR}}})^n(X)$ という群を構成するが, これは Anderson 双対に対応

する微分コホモロジー理論であることが示される．群 $(\widehat{I\Omega^G_{\mathrm{dR}}})^n(X)$ は (ω, h) という組で「整合性条件」をみたすもののなす群として定義される．ここで h は, 接続付き G-構造と X への滑らかな写像のついた $(n-1)$-次元閉多様体に対して $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-値を与える関数である．ω は $H^*(MTG;\mathbb{R})$ に係数をもつ n 次の X 上の閉微分形式であり,「整合性条件」は h のボルディズムによる変化が ω で制御されることを要請する．群 $(I\Omega^G_{\mathrm{dR}})^n(X)$ は $(\widehat{I\Omega^G_{\mathrm{dR}}})^n(X)$ を同値関係で割って得られる．物理的な解釈は以下の通りである．組 (ω, h) のうち, $\exp(2\pi\sqrt{-1}h)$ はひとつの可逆な場の理論の分配関数と解釈される．可逆な場の理論の分配関数はボルディズムに対して局所的な量の積分で変化する, という性質を表すのが ω との「整合性条件」である．同値関係で割る部分は, 理論の変形同値類をとることに対応する．

第二の結果は $\widehat{I\Omega^G_{\mathrm{dR}}}$ に関わる微分コホモロジーの変換についてである．

Part I の後半では, 多様体のファイバー積に関わる変換を構成した．3 つの構造群 G_1, G_2, G_3 があり, 準同型 $\mu\colon G_1 \times G_2 \to G_3$ が与えられているとする．このとき, 微分コホモロジーの変換

$$(\widehat{I\Omega^{G_3}_{\mathrm{dR}}})^n(-) \otimes (\widehat{\Omega^{G_2}})^{-r}(-) \to (\widehat{I\Omega^{G_1}_{\mathrm{dR}}})^{n-r}(-) \tag{1}$$

を構成した．また, 閉 r-次元多様体をファイバーとするファイバー束 $p\colon N \to X$ にファイバー方向の接続付き G-構造 g_p が定まっている状況で,「押し出し写像」

$$(p, g_p)_*\colon (\widehat{I\Omega^{G_3}_{\mathrm{dR}}})^n(N) \to (\widehat{I\Omega^{G_1}_{\mathrm{dR}}})^{n-r}(X) \tag{2}$$

を構成した．(1) と (2) のいずれも,「分配関数」h をファイバー積で評価することで得られる．これらの変換が, コホモロジーのレベルでは自然に定まる変換に一致することを証明した．物理的には, これらの変換は理論の「コンパクト化」という操作に対応している．

Part II では, 環スペクトラムの準同型 $\mathcal{G}\colon MTG \to E$ の Anderson 双対からくる微分コホモロジーの変換

$$\Phi_{\mathcal{G}}\colon \widehat{E}^*_{\mathrm{HS}}(-;\iota_E) \otimes IE^n(\mathrm{pt}) \to (\widehat{I\Omega^G_{\mathrm{dR}}})^{*+n}(-) \tag{3}$$

を構成した．ここで, E に対応する微分コホモロジー理論としては Hopkins-Singer による構成 $\widehat{E}_{\mathrm{HS}}$ を用いる．変換 (3) は, 接続付き G-構造から定まる微分コホモロジー $\widehat{E}_{\mathrm{HS}}$ での「押し出し写像」を用いて与えられる．この「押し出し写像」は例えば E が整係数常コホモロジーの場合はホロノミー, K-理論の場合は Dirac 作用素の eta 不変量で与えられるなど, 微分幾何学的な意味をもつことが多い．変換 (3) が, コホモロジーのレベルでは $\mathcal{G}$

の Anderson 双対からくる変換に一致することを示し, それを用いて, 場の理論の例からくる $\widehat{I\Omega^G_{\mathrm{dR}}}$ の元に対して対応するホモトピー論的な表示を与えた.

参考文献

[FH21] D. S. Freed and M. J. Hopkins, *Reflection positivity and invertible topological phases*, Geom. Topol. **25** (2021) 1165–1330.