論文の内容の要旨

論文題目 Studies on algebraic varieties admitting a polarized endomorphism and the minimal model program in mixed characteristic
(偏極自己準同型を持つ代数多様体と混標数の極小モデルプログラムの研究)

氏　名　　吉川　翔

本論文は，偏極自己準同型写像を持つ代数多様体と混標数の極小モデルプログラムの研究について述べたものである．

1. 偏極自己準同型写像をもつ代数多様体について

本文の 2 章では，偏極自己準同型写像を持つ代数多様体の構造について考察している．また，これは [21],[22], [23] の内容に基づく．

X を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の射影多様体とする．X の上の自己準同型写像 f が**偏極自己準同型**であるとは，X の上のある豊富因子 L と正整数 q が存在して，f^*L と L^q が同型になることである．偏極自己準同型写像を持つ多様体の構造に関する研究は，以下の予想の考察から始まった．

予想 1.1 (cf. [4, Question 4.3], [14, Conjecture 6.5]). X を滑らかなファノ多様体であって，ピカール数が 1 のものとする．X が同型でない自己準同型写像を持つならば，X が射影空間である．

射影空間は同型でない偏極自己準同型写像を持つので，この主張は，射影空間の特徴づけになっている．この問題は，[2], [9], [10], [17] などで議論され，X の次元が 3 以下の場合には解決されている．滑らかでピカール数が 1 であるようなファノ多様体の自己準同型写像が偏極自己準同型であることに注意すると，以下の予想は，予想 1.1 の一般化となっており，[16] において二次元の場合に，[15] において三次元の場合に証明されている．

予想 1.2 (cf. [4, Question 4.4], [14, Question 6.6]). X を滑らかで有理連結な射影多様体とし，同型でない偏極自己準同型写像を持つとする．このとき，X はトーリック多様体となる．

極小モデルプログラムとは，曲面の双有理分類の類似であり，与えられた多様体の双有理同値類から，最も単純な多様体を見つけるためのプログラムである．標数 0 では，このプログラムは三次元もしくは一般型の多様体に対しては成立が確認されている．また，標数が 3 より大きい三次元の滑らかな多様体に対しても，極小モデルプログラムの成立が確認されている (cf. [6])．有理連結とは限らない偏極自己準同型写像を持つ多様体の構造を研究するために，Meng, Zhang [13] によって，**同変極小モデルプログラム**という手法が導入され，以下の定理が証明された．

定理 1.3 ([13]). X を滑らかな射影多様体で，同型でない偏極自己準同型写像を持つとする．このとき，X のあるエタール被覆 $\pi\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ が存在して，$\widetilde{X}$ の *Albanese* 射がファイバー空間となり，そのすべてのファイバーが滑らかかつ有理連結となる．

これらの結果を踏まえて，以下の予想を提唱する．また，この予想は，予想 1.1, 予想 1.2 の一般化である．

予想 1.4. X を滑らかな射影多様体で，同型でない偏極自己準同型写像を持つとする．このとき，X のあるエタール被覆 $\pi\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ が存在して，$\widetilde{X}$ の *Albanese* 射がファイバー空間となり，すべてのファイバーが滑らかなトーリック多様体となる．

2 章における主定理を紹介するために，初めに**ファノ型**という性質について復習する．正規多様体の間の射影的写像 $Z \longrightarrow B$ が与えられたとき，Z が B 上ファノ型とは，ある $\mathbb{Q}$-Weil 因子 D が存在し，(Z, D) が klt であり，$-(K_Z + D)$ が B 上豊富となることである．B が一点の場合には，Z を単にファノ型と呼ぶ．また，Z が B 上ファノ型の場合に，その一般ファイバーがファノ型になることに注意したい．トーリック多様体はファノ型であり，B 上の射影束は B 上ファノ型である．[24], [5] において，ファノ型な多様体は有理連結になることが証明された．一方，一般には滑らかな有理連結多様体はファノ型とは限らない．したがって，以下の結果は定理 1.3 より強い結果であり，予想 1.4 の部分的な結果である．

定理 A (Theorem A). X を滑らかな射影多様体で，同型でない偏極自己準同型写像を持つと仮定する．このとき，あるエタール被覆 $\pi\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ が存在して，$\widetilde{X}$ はその *Albanese* 多様体上ファノ型となる．さらに，その *Albanese* 射のファイバーは全てファノ型である．特に，もし X が有理連結ならば，X はファノ型である．

また，2 章では，定理 A の二つの興味深い応用についても考察している．一つ目は，定理 A を使ったトーリック多様体の特徴付けであり，Thomsen [20] と Achinger [1] による結果の標数 0 における類似である．

定理 B (Theorem B). X を滑らかな射影多様体であり，同型でない偏極自己準同型写像を持つものとする．このとき，X がトーリックであることと，すべての線形束 L に対し，f_*L が線形束の直和に分解することが同値である．

二つ目は，同型でない偏極自己準同型写像を持つという条件と，大域的 Frobenius 分裂性との関係についてである．この結果を紹介するために，まず**稠密大域的 F 分裂型**の定義を紹介する．正標数の多様体が大域的 F 分裂であるとは，Frobenius 射から誘導される構造環の間の射が分裂することである．また，標数 0 の多様体が稠密大域的 F 分裂型であるとは，無限個の素点 p に対し，X の正標数還元 X_p が大域的 F 分裂となることである．二つ目の応用は，以下の定理である．

定理 C (Theorem C). X を正規曲面で，同型でない偏極自己準同型写像をもつものとする．このとき，X は稠密大域的 F 分裂型である．

2. 混標数の極小モデルプログラムについて

3 章では，混標数の極小モデルプログラムについて考察している．また，これは高松哲平との共同研究 ([18]) に基づく．極小モデルプログラムの研究は，体上定義されているとは限らないスキームに対しても行われている．この一般化の動機としては，このプログラムを使うことによって，与えられた標数 0 の多様体に対し，適切な整数環上のモデルをとれることがある．極小モデルプログラムの成立は，[19]

において二次元の場合に，[11], [12] においてデデキントスキーム上強半安定還元で相対次元 2 のスキームであって，そのすべての剰余標数が 3 より大きい場合に証明されている．

3 章の最初の主定理はこの川又の結果の一般化である．川又の結果では，flip の存在性の証明に，特異点の分類が使われており，そこで，剰余標数に関する仮定が本質的に使われている．本論文では，全く異なる方法によって flip の存在性を証明することで，剰余標数の仮定を外すことに成功した．

定理 D (Theorem D). V をデデキントスキームとする．X を V 上，強半安定還元であり，相対次元 2 とする．このとき，X の極小モデルプログラムを走らせることが出来る．

川又の結果は整数環上の還元に関する研究に応用されている．そのため，定理 D によって，それらの結果の剰余標数に関する仮定を外すことが出来る．

2 章の二つ目の主結果は，以下の双有理相対的な極小モデルプログラムの成立についてである．これは [7, Theorem 1.1] の混標数類似である．

定理 E (Theorem E). V をデデキントスキームとする．(X, Δ) を *dlt* 組とし，X を $\mathbb{Q}$ 分解的整スキームであり，V 上平坦かつ準射影的であり，相対次元 2 であるとする．さらに，射影的双有理写像 $\pi\colon X \longrightarrow Z$ であって，Z が $\mathbb{Q}$ 分解的であり，π の例外集合が $\lfloor\Delta\rfloor$ に含まれていると仮定する．このとき，$(K_{X/V} + \Delta)$ に対する極小モデルプログラムを走らせることが出来る．

また，この応用として，ある種のスキームに関する dlt 爆発の存在性が従う (cf. Corollary 3.3.9).

定理 D と定理 E の証明では，豊富因子を境界に持つ pl-flip の存在性を示すことが重要である．実際，定理 E の証明に現れる flip は全て，豊富因子を境界に持つ pl-flip である．また，[7] の議論を参考にすると，定理 D を証明するために必要な flip の存在性は，このような pl-flip の存在性に帰着することが出来る．また，正標数では，Hacon-Witaszek [8, Theorem 1.3] によってこのような pl-flip の存在が証明されているが，そこでは，大域的 F 正則性と Frobenius 射を利用した消滅定理を用いている．我々は，大域的 F 正則性の代わりに**大域的 T 正則性**を，Frobenius 射の代わりに alteration を用いることによって，Hacon-Witaszek と同様の主張を混標数で証明した．ここで，デデキントスキーム上定義された対数的組 (X, Δ) の大域的 T 正則性とは，すべての alteration $\pi\colon Y \longrightarrow X$ に対し，Grothendieck トレース射によって誘導される以下の写像

$$H^0(\omega_{Y/V}(\lceil -\pi^*(K_{X/V} + \Delta)\rceil)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_X)$$

が全射になることである．また，正標数の場合に，Frobenius 射を利用した消滅定理を用いたが，混標数の場合に，その代わりとして用いられるのが，alteration を利用した消滅定理である (cf. Corollary 3.2.5). また，これは Bhatt による結果 [3, Theorem 6.28] の系として従う．

References

[1] P. Achinger. A characterization of toric varieties in characteristic p. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (16):6879–6892, 2015.

[2] A. Beauville. Endomorphisms of hypersurfaces and other manifolds. *Internat. Math. Res. Notices*, (1):53–58, 2001.

[3] B. Bhatt. Cohen-Macaulayness of absolute integral closures. *arXiv preprint arXiv:2008.08070*, 2020.

[4] N. Fakhruddin. Questions on self maps of algebraic varieties. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 18(2):109–122, 2003.

[5] C. D. Hacon and J. Mckernan. On Shokurov's rational connectedness conjecture. *Duke Math. J.*, 138(1):119–136, 2007.

[6] C. D. Hacon and J. Witaszek. The Minimal Model Program for threefolds in characteristic five. *arXiv preprint arXiv:1911.12895*, 2019.

[7] C. D. Hacon and J. Witaszek. On the relative Minimal Model Program for threefolds in low characteristics. *arXiv preprint arXiv:1909.12872*, 2019.

[8] C. D. Hacon and J. Witaszek. On the relative Minimal Model Program for fourfolds in positive characteristic. *arXiv preprint arXiv:2009.02631*, 2020.

[9] J.-M. Hwang and N. Mok. Finite morphisms onto Fano manifolds of Picard number 1 which have rational curves with trivial normal bundles. *J. Algebraic Geom.*, 12(4):627–651, 2003.

[10] J.-M. Hwang and N. Nakayama. On endomorphisms of Fano manifolds of Picard number one. *Pure Appl. Math. Q.*, 7(4, Special Issue: In memory of Eckart Viehweg):1407–1426, 2011.

[11] Y. Kawamata. Semistable minimal models of threefolds in positive or mixed characteristic. *J. Algebraic Geom.*, 3(3):463–491, 1994.

[12] Y. Kawamata. Index 1 covers of log terminal surface singularities. *J. Algebraic Geom.*, 8(3):519–527, 1999.

[13] S. Meng and D.-Q. Zhang. Building blocks of polarized endomorphisms of normal projective varieties. *Adv. Math.*, 325:243–273, 2018.

[14] S. Meng and D.-Q. Zhang. Normal projective varieties admitting polarized or int-amplified endomorphisms. *Acta Mathematica Vietnamica*, pages 1–16, 2018.

[15] S. Meng, D.-Q. Zhang, and G. Zhong. Non-isomorphic endomorphisms of Fano threefolds. *arXiv preprint arXiv:2008.10295*, 2020.

[16] N. Nakayama. Ruled surfaces with non-trivial surjective endomorphisms. *Kyushu J. Math.*, 56(2):433–446, 2002.

[17] K. H. Paranjape and V. Srinivas. Self-maps of homogeneous spaces. *Invent. Math.*, 98(2):425–444, 1989.

[18] T. Takamastu and S. Yoshikawa. Minimal model program for semi-stable threefolds in mixed characteristic. *arXiv preprint arXiv:2012.07324*, 2020.

[19] H. Tanaka. Minimal model program for excellent surfaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 68(1):345–376, 2018.

[20] J. F. Thomsen. Frobenius direct images of line bundles on toric varieties. *J. Algebra*, 226(2):865–874, 2000.

[21] S. Yoshikawa. Global F-splitting of surfaces admitting an int-amplified endomorphism. *arXiv preprint arXiv:1911.01181*, 2019.

[22] S. Yoshikawa. Characterization of toric varieties via int-amplified endomorphisms. *arXiv preprint arXiv:2010.06426*, 2020.

[23] S. Yoshikawa. Structure of Fano fibrations of varieties admitting an int-amplified endomorphism. *arXiv preprint arXiv:2002.01257*, 2020.

[24] Q. Zhang. Rational connectedness of log $\mathbf{Q}$-Fano varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 590:131–142, 2006.