論文審査の結果の要旨

氏　名　吉川　翔

射影多様体 X 上の自己準同型写像 $f : X \to X$ は，$f^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}^{\otimes \ell}$ となる豊富な直線束 $\mathcal{L}$ と正の整数 ℓ が存在するとき，偏極自己準同型であるという．偏極自己準同型は代数幾何学や Arakelov 幾何学において重要な概念であり，非自明な偏極自己準同型の存在は多様体の構造に大きな制約を与える．吉川翔は，本論文の前半において，非自明な偏極自己準同型を持つ非特異複素射影多様体の構造を調べた．

A. Broustet と權業善範は，非自明な偏極自己準同型を持つ正規複素射影多様体は Calabi-Yau 型であると予想し、森夢空間もしくは 2 次元の場合にこの予想が正しいことを確認した．その後この予想に関して進展はほとんどなかったが，S. Meng と D.-Q. Zhang の同変極小モデル理論を用いることで，吉川は次の事実を証明した．「非自明な偏極自己準同型を持つ非特異複素射影多様体は，Albanese 射が Fano 型のファイバー空間になるようなエタール被覆を持つ．」この結果は本論文前半の主結果であり，偏極自己準同型を持つ代数多様体の双有理幾何学に関する最近の結果の中で最も優れたものの 1 つだと評価できる．例えば，この結果の系として，非特異有理連結多様体の場合に Broustet・權業の予想が正しいことが導かれる．また，主結果の別の応用として吉川は，偏極自己準同型 f を持つ非特異複素射影多様体 X は，任意の直線束 $\mathcal{L}$ の順像 $f_*\mathcal{L}$ が直線束の直和に分解するならば，トーリック多様体であることを証明した．P. Achinger は，正標数の場合に Frobenius 射が類似の条件を満たせばトーリック多様体であることを示しており，吉川の結果は Achinger の結果の偏極自己準同型の場合への拡張とみなすことができる．

上述の結果からも，吉川が極小モデル理論に関して高い能力を有していることがうかがえるが，本論文の後半で吉川は混標数の極小モデル理論について研究した．C. Hacon, C. Xu, C. Birkar, J. Waldron らによって標数が 7 以上ならば 3 次元で極小モデル理論が成立することが証明され，さらに最近 Hacon と J. Witaszek によって 4 次元においても部分的な結果が得られるなど，近年正標数の極小モデル理論が急速に進展している．一方，混標数の極小モデル理論は，2 次元の場合は田中公によって満足すべき結果が得られているが，3 次元では次の川又雄二郎の結果を除くとほとんど何もわかっていなかった．川又は，剰余標数が 5 以上の場合に，3 次元半安定多様体上で極小モデル理論が成立することを証明した．川又の証明は特異点の分類に依存しており，そのために剰余標数に仮定が必要であった．吉川は，高松哲平との共同研究において，この川又の結果を剰余標数が任意の場合に拡張した．この結果は混標数の極小モデル理論を大きく進展させるだけでなく，数論幾何への著しい応用も期待させる素晴らしいものである．また，以下で説明するように，吉川の証明は川又のものとは大きく異なる．

高次元極小モデル理論において鍵となるのがフリップと呼ばれる双有理変換であり，吉川の証明でもフリップの存在を示すことが本質的である．正標数では，大域的 F 正則多様体という Frobenius 射の分裂を用いて定義される多様体と Serre の消滅定理が，フリップの存在を示す上で重要な役割を果たす．吉川は，大域的 F 正則多様体の混標数における類似として，A. J. de Jong のオルタレーションを使って大域的 T 正則多様体という混標数の多様体のクラスを導入した．そして，Serre の消滅定理の代わりに，最近 B. Bhatt によって得られた混標数の消滅定理を駆使することで，混標数におけるフリップの存在を証明した．

以上の結果は，偏極自己準同型を持つ代数多様体の研究，混標数の極小モデル理論の研究の発展に大きく貢献する優れた業績である．共同研究者である高松哲平氏からは，共同研究における吉川の貢献が十分大きく，吉川の博士論文の一部として提出するにふさわしいものである旨の承諾が得られている．よって，論文提出者吉川翔は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．