論文の内容の要旨

論文題目 Shrinkage Methods for Estimating Mean and Covariance Matrices in Multivariate Normal Distributions
(多変量正規分布の平均行列と分散共分散行列に関する縮小推定法)

氏 名　湯浅 良太

本論文は，行列正規分布における平均行列と共分散行列の推定問題に取り組んだものである．これらの問題は，多変量線形回帰モデルにおける回帰係数行列と誤差項の共分散行列の推定に相当する．Stein (1956), James and Stein (1961) により, 3 次元以上の多変量正規分布の最尤推定量は非許容的である事が示され, James-Stein 推定量と呼ばれる縮小推定量が提案された．また, Efron and Morris (1972) により, James-Stein 推定量を行列型に拡張した推定量が提案された．本論文では, これらの推定量に関連して, いくつかの新しい推定法を提案し，それらの不偏推定量に対する優位性を決定論的な観点から示した．本論文は，以下の 3 つの主要なテーマから構成される．第 1 のテーマは高次元でのリッジ型線形縮小推定，第 2 のテーマは Efron-Morris 推定量と James-Stein 推定量を組み合わせた重み付き縮小推定，第 3 のテーマは扱いやすい形式での一般化ベイズ推定である．

まず，第 1 章では introduction として, 縮小推定の背景と各章のモチベーションや概要を与えた．第 2 章では，Stein の等式と一般的な縮小推定量のリスク関数の不偏推定量を与えた．これらは, 上記の 3 つのテーマで提案された推定量の優越性を調べるために用いられる．第 3 章から続く 4 つの章で, 研究成果がまとめられている．

第 3 章では，最初のテーマの平均行列のリッジ型線形縮小推定を高次元の設定で取り上げている．サンプルサイズよりも大きな次元を持つ高次元の場合は，標本共分散行列は非正則であり，精度行列の推定に標本共分散行列の逆行列を用いることはできない．標本共分散行列の Moore-Penrose 一般化逆行列を用いる事は可能であるが，標本共分散行列の最小の正の固有値がゼロに近い場合には，推定量が不安定になりやすい．高次元ケースの平均行列の推定では Efron-Morris 推定量は用いる事が出来ず, 縮小行列を Moore-Penrose 逆行列に置き換えた縮小推定量が Tsukuma and Kubokawa (2015) で扱われている．別の方法として, 縮小行列をリッジ型の逆行列を用いたものに置き換えることを考えた．まず, 既知の重みを持つリッジ型縮小行列に基づく Efron-Morris 型の線形縮小推定量を考える．2 章で与えた Stein の不偏リスク推定量を用いて，重みが最小になる条件を導出する．次に，リスク関数を最小化する意味での最適な重みを推定することを考える．ここでは, Stein 不偏推定量を最小化する事により, 最適な重みを推定することを提案した．リッジ型の縮小行列と推定された重みを用いた Efron-Morris 型線形縮小推定量の優越性の議論として, 不偏リスク推定量の各項を評価し, ミニマックス性の条件を導出した．また，ランダム行列理論を用いて，提案した重みとその重みを用いた推定量の損失関数が, ある最適なものと漸近的に等しいことを示した．このリッジ型線形縮小推定量の性能を，Efron-Morris 推定量や James-Stein 推定量などの既存の推定量と数値的に比較した．

第 4 章では, 第 2 のテーマの, Efron-Morris 推定量と James-Stein 推定量を組み合わせた重み付き縮小推定による平均行列の推定を取り上げている．Efron-Morris 推定量と James-Stein 推定量は, よく知られた 2 つのミニマックス推定量であり, 前者は行列型の縮小で, 後者はスカラー型の縮小である．縮小行列の固有値が互いに近い場合は，標本平均のすべての成分を

同じ関数で縮小させることが合理的であるため，スカラー型の縮小が適切である．一方，縮小行列の固有値が分散している場合には，標本平均のすべての成分を同じ関数で縮小させることは好ましくなく，行列型の縮小により適切にリスクの改善を得る事ができる．このことから, 2 つの縮小推定量を組み合わせた推定量を検討する．組み合わせのための重みをどのように選択するかが問題であり, 2 つの方法を提案した．1 つは，Stein の不偏リスク推定量に基づく方法，つまり，重み付き縮小推定量のリスク関数の不偏推定量を与え，その不偏リスク推定量の一部を最小化する最適な重み推定量を求める方法である．もう 1 つは，経験ベイズに基づく方法で，重み関数は周辺密度の比によって与えられる．どちらの方法も，縮小行列の固有値のばらつきに依存しており，これは共分散行列の球面対称性の検定統計量に関連している．このようなランダムに重み付けされた縮小推定量のミニマックスは, 知る限りではこれまでは示されていない．この難しさは，縮小関数が固有値について増加しないという事実から生じる．そのため, リスク関数の不偏推定量を直接評価し, そのミニマックス性の条件を導く必要がある．また, 優越性を共分散行列が未知の場合にも拡張して議論した．

第 3 のテーマである, 扱いやすい形式の一般化ベイズ推定については, 第 5 章と第 6 章で扱う．決定論的な枠組みでは, 一般化ベイズ推定量のミニマックス性を示すことが 1 つの目標である．それは許容性をも持ち合わせる事に近いと考えられるからである．共分散行列が既知の場合, 一般化ベイズ推定量のミニマックス性は, Stein(1974, 81) に基づく事前分布の優調和性を確認することで示されている．Matsuda and Komaki (2015) と Tsukuma and Kubokawa (2017) は，この方法に基づいて，行列型縮小推定量のミニマックス性を示している．しかし，共分散行列が未知である場合には，同じ方法を適用することができず, また, 推定量には複雑な積分が含まれるため, リスク関数を直接評価することも困難である．結果, 共分散行列が未知の場合の優越性は, 知る限りでは示されていない．

第 5 章では, 平均行列の一般化ベイズ推定量が積分を含まないシンプルな形になるように, 平均行列と共分散行列の特定の事前分布を提案する．これは, 平均ベクトルの推定においてシンプルな一般化ベイズ推定量を与えた Maruyama and Strawderman (2005) で与えられた事前分布を拡張したものである．一般化ベイズ推定量がシンプルな形で得られるため, 行列, スカラーの 2 次損失関数に対する不偏リスク推定量を計算することができ, これによりミニマックス性の条件を与えることが出来た．また, Stein 損失関数に対する共分散行列の推定についても検討し, 同じ事前分布に対してシンプルな一般化ベイズ推定量を導出し, 一般化ベイズ推定量が不偏推定量を優越するための条件を得た．また, 平均と共分散行列を同時に推定する場合の優位性についても, Kullback-Leibler divergence の下で検討した．

第 6 章では, 平均行列の一般化ベイズ推定量が扱いやすい形になるように, 平均行列と共分散行列に 5 章とは別の事前分布を提案する．また，経験ベイズ推定量も提案した．一般化ベイズ推定量と経験ベイズ推定量がミニマックスである事を示した．共分散行列の一般化ベイズ推定量と経験ベイズ推定量を同じ事前分布に対して提案し, 不偏推定量に対する優位性を検討する．最後に，提案した推定量の性能を数値的に検討した．

参考文献

Efron, B. and Morris, C. (1972). Empirical Bayes on vector observations: An extension of Stein's method. *Biometrika*, **59**, 335–347.

James, W. and Stein, C. (1961). Estimation with quadratic loss. *Proc. 4th Berkeley*

Sympos. Math. Statist. Prob., **1**, 361–379. Univ. California Press, Berkeley.

Matsuda, T., and Komaki, F. (2015). Singular value shrinkage priors for Bayesian prediction. *Biometrika*, **102**, 843–854.

Stein, C. (1956). Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution. In: Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 1, University of California Press, Berkeley, pp 197–206.

Stein, C. (1974). Estimation of the mean of a multivariate normal distribution, *in: Proc. Prague Symp. Asymp. Statist.*, **2**, 345–381.

Stein, C. (1981). Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *Ann. Statist.* **9**, 1135–1151.

Tsukuma, H. and Kubokawa, T. (2015). A unified approach to estimating a normal mean matrix in high and low dimensions. *J. Multivariate Anal.*, **139**, 312–328.

Tsukuma, H. and Kubokawa, T. (2017). Proper Bayes and minimax predictive densities related to estimation of a normal mean matrix. *J. Multivariate Anal.*, **159**, 138–150.