

博士論文(要約)

Cylindrical Strip モデルによる  
自由曲面離散化手法に関する研究

水谷 圭佑



## 目次

<b>第 1 章</b>	<b>序論</b> .....	<b>5</b>
1.1	建築と自由曲面 .....	5
1.2	自由曲面とパネリング問題 .....	6
1.3	本研究における目的と方針 .....	8
1.4	本研究の貢献 .....	10
1.5	本論文の構成 .....	10
<b>第 2 章</b>	<b>研究背景</b> .....	<b>12</b>
2.1	概説 .....	12
2.2	曲面の微分幾何学 .....	12
2.2.1	基本形式 .....	12
2.2.2	計量と径数付け .....	16
2.2.3	主曲率 .....	17
2.2.4	座標系 .....	19
2.2.4.1	曲率線座標系 .....	19
2.2.4.2	共役座標系 .....	20
2.2.5	曲面上の方向場 .....	23
2.3	離散曲面の微分幾何学 .....	25
2.3.1	三角形メッシュ .....	25
2.3.2	メッシュの基本的な幾何量 .....	26
2.3.3	径数付け .....	27
2.3.3.1	位相と写像 .....	28
2.3.3.2	区分線形写像の性質 .....	29
2.3.3.3	LSCM .....	31
2.3.3.4	MIPS .....	32
2.3.3.5	Mixed-Integer-Quadrangulation .....	33
2.3.4	離散曲面上の方向場 .....	34
2.4	自由曲面のパネリング手法 .....	36
2.4.1	パネルの形状に基づく分類 .....	36
2.4.2	四角形モデル .....	39
2.4.3	平面モデル .....	41
2.4.4	単曲率モデル .....	44

2.4.5	複曲率モデル .....	46
<b>第 3 章</b>	<b>k-離散柱面モデル.....</b>	<b>49</b>
3.1	概説 .....	49
3.2	準備 .....	50
3.2.1	離散柱面モデル.....	50
3.2.2	平面曲線の離散モデルと arc spline 曲線 .....	52
3.2.3	Arc spline 曲線.....	55
3.2.4	k-arc spline 曲線 .....	57
3.3	k-Arc Spline Approximation.....	58
3.3.1	最適化問題.....	58
3.3.1.1	近似エネルギー .....	58
3.3.1.2	補間制約.....	59
3.3.1.3	閉曲線制約 .....	59
3.3.1.4	側面制約.....	60
3.3.1.5	スケーリング変数.....	60
3.3.1.6	混合整数計画問題と連続最適化問題.....	61
3.3.2	初期化アルゴリズム .....	62
3.3.2.1	Curvature Clustering アルゴリズム .....	62
3.3.2.2	Fast Improvement アルゴリズム .....	64
3.3.3	複数曲線への拡張.....	68
3.4	数値解析 .....	69
3.4.1	単一曲線の数値解析例.....	69
3.4.2	複数曲線の数値解析例.....	73
3.5	結言 .....	74
<b>第 4 章</b>	<b>Cylindrical ストリップ・メッシュ .....</b>	<b>76</b>
4.1	概説 .....	76
4.2	準備 .....	78
4.2.1	可展面モデル .....	78
4.2.2	可展面と柱面 .....	80
4.2.3	Cylindrical strip モデルと Cylindrical メッシュ .....	82
4.2.4	連続曲面上の柱面共役場 .....	84
4.2.5	離散曲面上の柱面共役場 .....	86
4.2.6	Shadow contour 曲線と接触柱面 .....	89
4.3	C-strip モデル生成方法 A – アイソパラメータ曲線による方法 .....	91

4.3.1	Runge-Kutta 法による方向場の数値積分 .....	91
4.3.2	柱面共役場の生成と数値積分 .....	92
4.3.3	数値解析 .....	94
4.3.3.1	解析モデル a.....	94
4.3.3.2	解析モデル b .....	96
4.3.4	方法 A の問題点.....	98
4.4	C-strip モデル生成方法 B – Cylindrical メッシュによる方法 .....	99
4.4.1	離散曲面上での柱面共役場の生成手法.....	99
4.4.1.1	最適化問題 .....	99
4.4.1.2	初期化.....	102
4.4.2	共役場に沿った径数付け .....	104
4.4.3	Cylindrical メッシュの厳密解を求める最適化問題 .....	106
4.4.4	数値解析 .....	107
4.4.4.1	解析モデル a.....	107
4.4.4.2	解析モデル b .....	113
4.5	B-spline 形式による C-strip モデル .....	119
4.6	結言 .....	120
<b>第 5 章</b>	<b>k-Cylindrical Strip モデル.....</b>	<b>122</b>
5.1	概説 .....	122
5.2	準備 .....	123
5.2.1	k-離散モデルの緩和.....	123
5.2.2	k-cylindrical strip モデル .....	124
5.2.3	k-arc spline 曲線の拡張.....	125
5.3	k-Cylindrical Strip Approximation .....	126
5.3.1	モデルの整理 .....	126
5.3.2	最適化問題.....	128
5.3.2.1	近似エネルギー .....	128
5.3.2.2	線織方向の連続性エネルギー .....	129
5.3.2.3	フェアリングエネルギー .....	130
5.3.2.4	境界補間エネルギー .....	131
5.3.2.5	閉曲線エネルギー.....	131
5.3.2.6	無制約最適化問題.....	131
5.3.3	初期化アルゴリズム .....	132
5.3.3.1	Curvature Clustering アルゴリズム .....	132
5.3.3.2	Fast Improvement アルゴリズム .....	133

---

5.4	数値解析 .....	134
5.4.1	解析モデル a .....	134
5.4.2	解析モデル b .....	143
5.5	結言 .....	150
<b>第 6 章</b>	<b>結言 .....</b>	<b>151</b>
	<b>文献目録 .....</b>	<b>156</b>

# 第1章 序論

## 1.1 建築と自由曲面

近年、建築の設計・生産・施工に関わるさまざまな技術の飛躍的な発展を背景に、複雑な曲面を用いた建築が1つのトレンドとなっている(図 1-1)。これらの建築は、CAD(*computer-aided design*)技術を活用した自由曲面(*freeform surface*)を用いて設計されており、球面ドームや円筒ヴォールトなど、古典的曲面(*traditional surface*)を用いて設計された従来の曲面建築と大きく異なる。古典的曲面は、回転面や押し出し面など、ある曲線の滑らかな軌跡によって定められる曲面であり、その単純な幾何学的原理(e.g., 回転や平行移動)から形状記述が容易であるため、建築形態として古くから広く利用されてきた [1]。一方、自由曲面は古典的曲面では表現することができない複雑な形状をもつ曲面であり、単純な幾何学的原理の欠如から正確な形状記述が困難であるため、建築形態としての利用は極めて少なかった。しかし、1990年代に建築分野に導入されたCADシステムが多様な自由曲面の記述を可能としたことで、自由曲面が建築形態として積極的に利用され始め、“*parametricism*”と呼ばれる新たな建築論を形成しながら [2]、現在のトレンドに至った。

CADシステムによる曲面のモデリング手法には、パラメトリック曲面・ポリゴンメッシュ・細分割曲面などが存在し [3]、Rhinoceros®や AutoCAD などの汎用 CAD ソフトウェアには多くの手法が実装されている。これらの手法の中で、パラメトリック曲面(e.g., *Bézier* 曲面や *Nurbs* 曲面)は建築設計における曲面モデリングの現在の主流である。パラメトリック曲面は、曲面の形状をおおまかに定める制御ポリゴンを用いて定められる曲面であり、制御ポリゴンの頂点を多項式や有理多項式によりブレンドすることで生成される滑らかな曲面である(図 1-2)。パラメトリック曲面は、制御ポリゴンによる直感的な形状制御が可能であるうえ滑らかな曲面の厳密な表現が可能であるため、建築設計を含む工学系の分野で主に利用されている。特に、有理多項式によるブレンドを用いる *Nurbs* 曲面は、制御性・連続性・表現性・正確性に優れたパラメトリック曲面であるため、建築設計においてマスターモデルとして一般的に利用され

(a) Great Court at the British Museum\*<sup>1</sup>

(b) MyZeil Shopping Mall\*<sup>2</sup>

図 1-1 自由曲面を用いた建築

\*1 Foster+Partners, <https://www.fosterandpartners.com/projects/great-court-at-the-british-museum/>, 2021.11.07

\*2 FUKSAS studio, <https://fukas.com/myzeil-shopping-mall/>, 2021.11.07

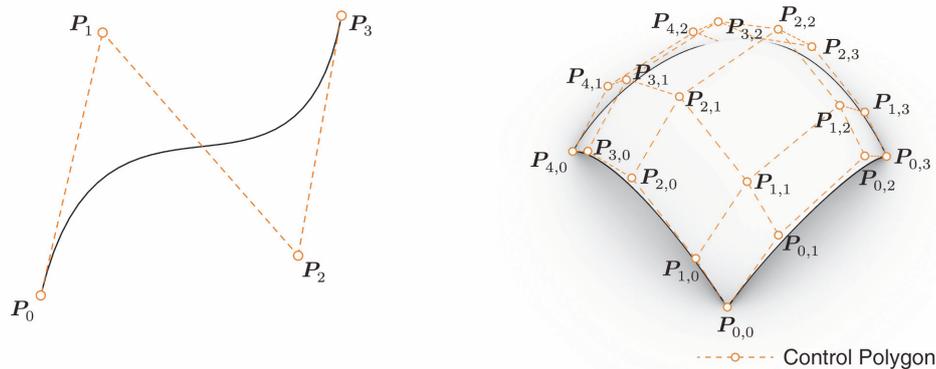


図 1-2 Nurbs 形式による曲線・曲面の制御

ている [4]。一方で、ポリゴンメッシュ(e.g., 三角形メッシュや四角形メッシュ)や細分割曲面(e.g., *Catmull-Clark subdivision surface*)は、位相的自由度が高く表現性に優れる手法であるが精度に欠けるため、建築設計におけるマスターモデルとして利用されることは少ない。ポリゴンメッシュは、構造解析などの有限要素モデルとして利用されることが多く、Nurbs 曲面によるマスターモデルを任意に離散化してモデル化され利用されている [5]。細分割曲面は、パラメトリック曲面で表現することが不可能な複雑な位相をもつ曲面を滑らかに表現する必要がある場合に利用されているが [1]、精度が要求されるマスターモデルとして利用するためにはパラメトリック曲面への変換が必要となる。

## 1.2 自由曲面とパネリング問題

高度な曲面モデリング手法を実装した CAD ソフトウェアは、滑らかで美しい自由曲面を自在にモデリングすることを可能とし、建築デザインの自由度を飛躍的に高めた。一方で、CAD ソフトウェアを用いてモデリングされた自由曲面を建築形態として実現するためには、建築のスケールに起因して生じるさまざまな課題を解決する必要がある [6]。本研究では、自由曲面を建築形態として実現するために生じる諸課題の中で「曲面のパネリング問題」を取り扱う。

自動車ボディのデザインやプロダクトデザインでは、CAD ソフトウェア上でモデリングされた曲面は、データ通りに曲面として製造されることが一般的である。一方で、建築設計では、CAD ソフトウェア上でモデリングされた曲面をデータ通りに製造・施工することは困難である。これは、建築スケールの大きな曲面を製作しようとする場合、材料の強度や部材の製作に関する制約から、曲面全体を単一の部材として製造することが不可能であるためである。1つの連続な曲面としてモデリングされた曲面は、多数の小片(部分曲面)に分割され、部分曲面ごとに製造された部材が現場に搬入され曲面全体が組み立てられる。このとき、部分曲面を支持するための支持構造材や接合部材が必要となり、曲面は部分曲面や支持構造材によって構成される複合的な構造物となる(図 1-3)。曲面の分割によって生じる部分曲面や支持構造材は、選択する材料・製造方法や要求される構造的な性能に応じて適切に設計される必要があるとともに、コストに配慮した設計が求められる [6]。一般的に許容されるコストの範囲内で、自由曲面の分割によって生じ



図 1-3 曲面の分割と支持構造

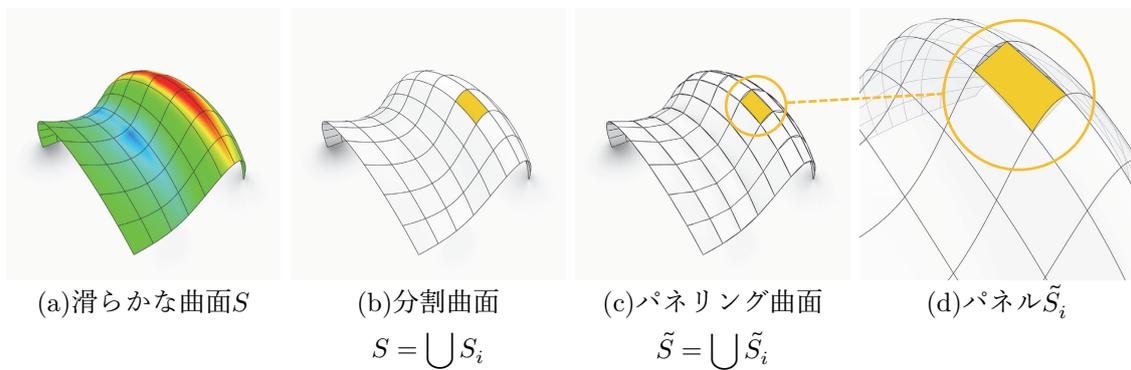


図 1-4 分割曲面とパネリング曲面

る部分曲面を直接製造することは困難であるため、製造コストを考慮した別の曲面で部分曲面を近似・置換する必要が生じる。このような部分曲面の近似・置換を含めた曲面の分割問題を特に「曲面のパネリング問題」と呼ぶ。つまり、「曲面のパネリング問題」は、与えられた曲面 $S$ に対して $S$ の単なる分割 $\{S_i\}$ を求める問題ではなく、それぞれの部分曲面 $S_i$ に対して工学的側面や経済的側面から生じる何らかの制約を満たす新たな部分曲面 $\tilde{S}_i$ を求める問題である(図 1-4)。本論文では、ここで得られる新たな部分曲面 $\tilde{S}_i$ をパネル、 $\tilde{S}_i$ の和集合によって定義される新たな曲面 $\tilde{S} = \bigcup \tilde{S}_i$ をパネリング曲面と呼ぶ。パネリング曲面 $\tilde{S}$ は設計条件に基づき設定される閾値の範囲内で不連続となることも許容される点に注意する。パネリング曲面 $\tilde{S}$ が満たすべき条件は対象とする問題ごとに異なるが、すべての問題において、与えられた制約下で対象とする曲面 $S$ を良く近似する曲面であることが求められる。このような性質から、「曲面のパネリング問題」は、与えられた制約下で対象とする曲面 $S$ に対するパネリング曲面 $\tilde{S}$ の近似精度を最大化する最適化問題として定式化されることが一般的である。

パネリング問題は古典的曲面を含む任意の曲面に内在する問題であるが、自由曲面に関して特に顕在化する問題である。古典的曲面の場合、その単純な幾何学的原理から制約を満たすパネリング曲面が自然に得られやすく、パネリング問題が顕在化することはまれである。たとえば、回転面の場合、円周方向に沿って合同な曲面パネルを配置するパネリング曲面やすべてのパネルを平面四辺形パネルとするパネリング曲面が得られることは明らかであろう。ガラスと鉄骨フレームによる球面ドームが19世紀にすでに実現されている [7]。一方で、自由曲面の場合、制

約を満たすパネリング曲面が自然に得られることはまれであるため、パネリング問題が顕在化する。このとき、自由曲面に対して制約を満たすパネリング曲面を求めるためには、前述の最適化問題のような何らかの数理問題を解くことが必要となる。このような点で、「曲面のパネリング問題」は、自由曲面に特有の問題といえる。

### 1.3 本研究における目的と方針

本研究では、弾性曲げ変形による成型が困難なガラスや GRC の曲面パネルを用いた自由曲面のパネリング法として、パネルの製造効率とパネリング曲面の滑らかさを両立する新たなパネリング法を提案する。本方法では、与えられた曲面  $S$  に対して、以下の条件を満たすパネリング曲面  $\tilde{S}$  を求める。

パネリング曲面  $\tilde{S} = \bigcup_{i=1}^N \tilde{S}_i$  としたとき、すべてのパネル  $\tilde{S}_i$  は  $k (< N)$  種類の柱面のトリムサーフェース(四辺形領域)のみで尽くされ、線織に沿って隣接するパネルは  $G^1$  … (\*) 連続、それ以外の方向に隣接するパネルは  $G^0$  連続

ここで、パネル  $\tilde{S}_i$  を定める四辺形のトリム領域は、2 境界曲線が柱面の線織に対応するトリム領域とする。このパネリング曲面(\*)には、次の特徴がある。

- (1) すべてのパネルが柱面によって定義されパネル製造が容易
- (2)  $k$  種類のパネルのみで構成されパネルの繰返し製造が可能
- (3) パネリング曲面の連続性が高い

まず、(1)より、パネリング曲面を構成するすべてのパネルが柱面によって定義されるため、複曲率を有する曲面やその他の可展面によって定義されるパネルと比較して、パネル製造が容易である [6] [8]。金属板の場合、平板のロール曲げ加工による成型が可能であり、成型に型枠を要するプレス加工や鋳造による成型が不要である。ガラスの場合、平板ガラスの冷間曲げ加工(曲率小)または熱間曲げ加工(曲率大)を用いて成型される。冷間曲げ加工は、平板ガラスを微小変形させ枠材に直接取り付けする方法であり特殊な加工を必要としない。熱間曲げ加工は、金型を用いた成型であるが、柱面は他の曲面と比較して金型の製作が容易であるため効率的にパネルを成型することができる。GRC パネルや PC パネルの場合は、型枠による成型が必須となるが、この場合も柱面は他の曲面と比較して型枠の製作が容易であるため、効率的なパネル製造が可能である。柱面パネルを用いたパネリング曲面の実例として、Strasbourg TGV station や Louis Vuitton Foundation in Paris などがある。Louis Vuitton Foundation in Paris では、一般の可展面によりモデリングされた曲面を柱面で近似することで、柱面ガラスパネルによるパネリング曲面を実現している [9]。

次に、(2)より、パネルの総枚数  $N$  より少ない  $k$  種類のパネルで構成されるため、同一パネルの繰返し製造が可能である。(1)で述べたように、ガラス(熱間曲げ加工)や GRC パネルなどでは、柱面パネルの製造に型枠を要する。一般的に、型枠の製造コストはパネルの製造コストよりも非常に高いため、必要となる型枠数を低減することはパネル全体の製造コスト低減に効果的である。型枠の繰返し利用を考慮したパネリング曲面の実例として、Lentille at Saint Lazare metro station や Louis Vuitton Foundation in Paris, Arena Corinthians in Sao Paolo などがある。Lentille

at Saint Lazare metro station では、対象とする形状をトーラスと球面を滑らかにつなぎ合わせた曲面によりモデリングすることで型枠の繰返し利用を可能とし、熱間曲げ加工された複曲率ガラスパネルによる滑らかなパネリング曲面を実現している [9]。Louis Vuitton Foundation in Paris では、一般の可展面によりモデリングされた曲面を柱面で近似したのち、曲率に応じてパネルをクラスタリングすることで、熱間曲げ加工に必要となる型枠の数を削減している。限定された型枠から製造された柱面パネルは、現場で冷間曲げ加工されることで最終形状に成型される [9]。Arena Corinthians in Sao Paolo では、ガラスの平面パネル・柱面パネル・複曲率パネルを組み合わせたパネリング曲面が実現されている。ここでは、パネル種類を最小化する最適化問題 [10]を解くことにより、855 枚のパネルが 61 個の型枠から製造されている [6]。

最後に、(3)より、パネリング曲面の連続性が高く意匠的なメリットが大きい。平面パネルを用いた一般的なパネリング曲面では、すべてのパネル境界でクリースを生じ、曲面の滑らかさが大きく損なわれる。また、パネルの繰返し製造を考慮した複曲率パネルによるパネリング曲面 [10] [11]では、すべてのパネル境界が不連続となる。これに対して、柱面パネルを1方向に $G^1$ 連続に接続したパネリング曲面(\*)は、1方向にクリースのないパネリング曲面であり滑らかで美しい外観をもつ。

本研究では、与えられた滑らかな曲面 $S$ から(\*)を満たすパネリング曲面 $\tilde{S}$ を求めるために、図1-5に示すアプローチを用いる。パネリング法は、大きく2つのステップで構成され、曲面 $S \rightarrow$  半離散曲面(cylindrical strip モデル)  $\rightarrow$  離散曲面( $k$ -cylindrical strip モデル)というフローに従い、曲面 $S$ を方向別に離散化しパネリング曲面 $\tilde{S}$ を求める。まず、ステップ1では、滑らかな曲面の特殊な半離散モデルとして知られる cylindrical strip モデル [12]を求める。Cylindrical strip モデルは、滑らかな曲面上の特定の共役座標系を半離散化することで得られるモデルであり、半離散化によって得られる曲線間を線形補間することで、滑らかな柱面を $G^0$ 連続に繋ぎ合わせた区分的滑らかな曲面が得られる。続いて、ステップ2では、ステップ1で得られる cylindrical strip モデルを、ユーザーが指定する $k$ 種類の柱面で構成される特殊な cylindrical strip モデル(= $k$ -cylindrical strip モデル)に変換する。ここで、cylindrical strip モデルを構成するすべての柱面は、 $k$ 種類の代表となる柱面(i.e., 型枠)のトリムサーフェスとして得られる柱面を、線織に沿って $G^1$ 連続に接続した柱面に変換される。ここで得られる $k$ -cylindrical strip モデルが、本研究が目指すパネリング条件(\*)を満たすパネリング曲面 $\tilde{S}$ であることは明らかであろう。

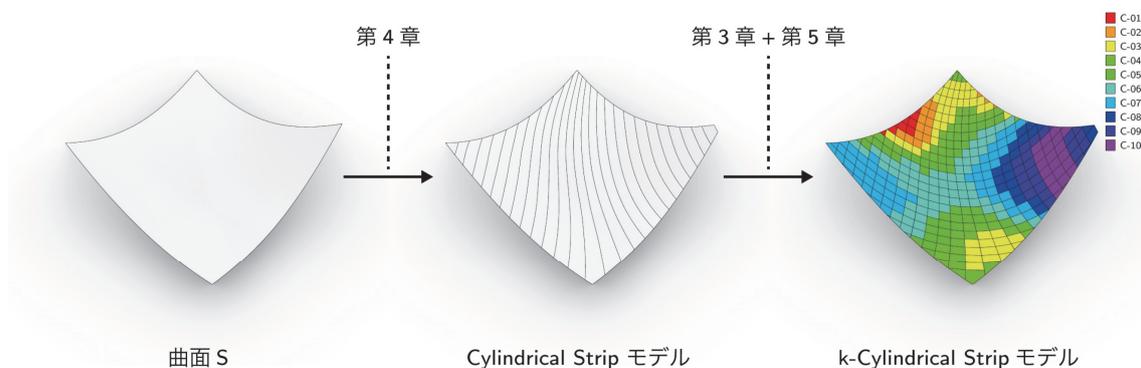


図 1-5 パネリング曲面(\*)へのアプローチ

## 1.4 本研究の貢献

本研究の貢献は以下のようにまとめられる。

- ・ 限られた種類(=  $k$ 種類)の曲線で $G^1$ 連続に補間可能な平面曲線の離散モデルを $k$ -離散モデルとして定義し(3.2.1 項)、この離散モデルの 1 つが対象曲線の曲率の離散化とクラスタリングにより得られることを示す(3.2.2 項)。また、この離散モデルがもつ $G^1$ 補間曲線を $k$ -arc spline 曲線として定義し、その数式表現を与える(3.2.4 項)。
- ・ 単一の柱面(または独立した複数の柱面)の準線を $k$ -離散モデルへ離散化することで、対象とする柱面を限られた種類(=  $k$ 種類)の柱面パネルで $G^1$ 連続にパネリングする方法を提案する(3.3 節)。本研究では、このパネリング問題を対象の準線を $k$ -arc spline 曲線で近似する最適化問題として定式化し(3.3.1 項)、クラスタリング法と補間法による特殊な初期化アルゴリズム(3.3.2 項)を用いた効率的な解法を提案する。
- ・ Cylindrical strip モデル [12]を共役座標系との対応関係の中に厳密に位置付けることで柱面共役座標系を定義する(4.2.3 項)。また、当該座標系に対応する共役場の条件を導き、その条件を用いて柱面共役場を定義する(4.2.4 項)。
- ・ 与えられた曲面から cylindrical strip モデルの離散解を求める 2 つの方法 A・B を提案する。方法 A は、柱面共役場を数値積分することで対応する座標系のアイソパラメータ曲線を求める方法であり(4.3 節)、方法 B は、離散曲面上の柱面共役場から共役場に沿う四辺形メッシュを求める方法である(4.4 節)。離散曲面上の柱面共役場を求めるために、連続系での柱面共役条件から離散系での柱面共役条件を導く(4.2.5 項)。
- ・ 柱面の特殊な離散モデルである $k$ -離散柱面モデル(第 3 章)を cylindrical strip モデル(第 4 章)に組み込んだ $k$ -cylindrical strip モデルを定義する(5.2.2 項)。このモデルは、cylindrical strip モデルを構成する複数の柱面を $k$ -離散柱面モデルで置き換えたモデルであり、1.3 節で設定したパネリング条件(\*)を満たす。
- ・ 与えられた cylindrical strip モデルから $k$ -cylindrical strip モデルを求める問題を、cylindrical strip モデルを構成する柱面の準線を $k$ -arc spline 曲線により近似する最適化問題として定式化する(5.3 節)。この最適化問題は、3.3.3 項で示す最適化問題を基本として定式化されるが、ここでは、隣接する柱面間の幾何学的関係として、柱面間交線の近似精度や線織の連続性を評価関数として組み込む(5.3.2 項)。

## 1.5 本論文の構成

本論文では、まず第 2 章において、曲面のパネリング問題に関係する基本的な事項について整理する。次に、第 3 章において、単一の柱面の特殊な離散モデルについて述べる。この離散モデルは、限られた種類の部分柱面により $G^1$ 補間可能な離散柱面であり、本論文において $k$ -離散柱面モデルとして新たに定義する離散モデルである。第 4 章では、任意の柱面から $k$ -離散柱面モデルを求める方法を提案する。次に、第 4 章において、cylindrical strip モデルおよびその離散モデルとして本論文で新たに定義する cylindrical メッシュについて述べる。Cylindrical strip モデル

は、関連研究 [12]において developable strip モデルの特別なモデルとして言及されたモデルであるが、第 4 章では、当該モデルを共役座標系との対応関係の中に厳密に位置付け、当該モデルと連続 - 半離散対応する特殊な共役座標系を柱面共役座標系として新たに定義する。この柱面共役座標系を起点として、cylindrical strip モデル(半離散)および cylindrical メッシュ(離散)の定義を与える。さらに、与えられた曲面から、cylindrical strip モデルおよび cylindrical メッシュを求める方法を提案する。次に、第 5 章において、第 3 章で定義する  $k$ -離散柱面モデルを、第 4 章で定義する cylindrical strip モデルに組み込んだモデルについて述べる。ここでは、このモデルを  $k$ -cylindrical strip モデルとして新たに定義する。このモデルは、指定された種類( $k$ 種類)の柱面のみで構成される cylindrical strip モデルであり、パネリング条件(\*)を満たす曲面である。ここでは、第 3 章で提案する方法を拡張することで、与えられた cylindrical strip モデルから  $k$ -cylindrical strip モデルを求める方法を提案する。最後に、第 6 章において結論を述べる。

## 第2章 研究背景

### 2.1 概説

本章では、本論文で扱う曲面のパネリング問題と関連する事項について整理する。まず、2.2節において、滑らかな曲面を対象とする微分幾何学に関する基本的な事項について整理する。滑らかな曲面を扱ううえで最も基本となる基本形式や計量などに関して整理したのち、曲面のパネリング問題で特に重要となる曲面上の座標系や交差場について整理する。続いて、2.3節では、離散曲面を対象とする微分幾何学に関する基本的な事項について整理する。ここでは、離散曲面として最も一般的なモデルである三角形メッシュを対象とする。2.3節で扱う事項は、2.2節で整理した事項の離散曲面上の対応物に他ならない。この対応関係を前提として離散曲面上の微分幾何学は展開されるので、2.2節で扱う事項は2.3節で扱う事項の基本となる。最後に、2.4節において曲面のパネリング問題に関する具体的な関連研究について整理する。ここでは、関連研究で扱われるパネリング曲面をパネル形状に応じて3つのタイプに分類し、それぞれのタイプごとに基本事項および具体的なアルゴリズムなどを整理する。

### 2.2 曲面の微分幾何学

本項では、2階以上微分可能で滑らかな曲面を対象とする微分幾何学に関する基本的な事項を主に [13] [14] [15] [16] [17]などを参照して整理する。本項では、 $\mathbb{E}^3$ に埋め込まれた曲面を前提とする。3階連続微分可能な写像 $\mathbf{x}: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ は、そのヤコビアンが $\Omega$ 上のいたるところでフルランクであれば $\mathbb{E}^3$ 内に曲面片 $S$ を定めるという [13]。曲面とは、 $\mathbb{E}^3$ 内の集合でこのような曲面片の和集合として定められる集合であり曲面片自身もまた曲面である。本項では主に曲面片を扱うが、曲面と曲面片を特に区別せずすべて曲面 $S$ と呼ぶ。

#### 2.2.1 基本形式

曲面 $S$ が、 $\mathbf{p} \in S$ の近傍で $(u, v)$ をパラメータとして $\mathbf{x}: \Omega \rightarrow S$ により径数付けられているとする。 $S$ が正則であることを前提とすれば、任意の $\mathbf{q} \in \Omega$ で $\mathbf{x}$ の微分 $d\mathbf{x}_{\mathbf{q}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は1対1写像である。ここで、この線形写像を表す行列を求める。 $\mathbf{q} = (u_0, v_0) \in \Omega$ を通り $u$ 軸に平行な直線( $v = v_0$ )と $v$ 軸に平行な直線( $u = u_0$ )を考えると、2直線の $\mathbf{q}$ における接ベクトルは $(u, v)$ 座標系で $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ である。この2直線は写像 $\mathbf{x}$ によって $\mathbf{x}(\mathbf{q}) \in S$ を通る曲面上の曲線に写され、2つの曲線の $\mathbf{x}(\mathbf{q})$ における接ベクトルは以下のように得られる。

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{x}(u, v_0) \right|_{u=u_0} = \mathbf{x}_u(u_0, v_0), \quad \left. \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{x}(u_0, v) \right|_{v=v_0} = \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \quad (2.1)$$

微分の定義より、 $\mathbf{x}$ の微分 $d\mathbf{x}_q$ は次の対応関係を与えることがわかる。

$$d\mathbf{x}_q(\mathbf{e}_1) = \mathbf{x}_u, \quad d\mathbf{x}_q(\mathbf{e}_2) = \mathbf{x}_v \quad (2.2)$$

この関係から、パラメータ空間上で $\mathbf{q}$ を始点とする任意の方向ベクトルを $\bar{\mathbf{v}} = \xi\mathbf{e}_1 + \eta\mathbf{e}_2$ とすれば、そのベクトルは微分 $d\mathbf{x}_q$ によって次のように写される。

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_q(\bar{\mathbf{v}}) &= \xi\mathbf{x}_u + \eta\mathbf{x}_v \\ &= [\mathbf{x}_u \quad \mathbf{x}_v] \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

つまり、線形写像 $d\mathbf{x}_q$ を表す行列は、 $\mathbf{x}$ の $\mathbf{q}$ でのヤコビアン $J_q = [\mathbf{x}_u \quad \mathbf{x}_v]$ となる。この写像が1対1対応を与えるということは、この行列がフルランクであることに他ならないので、 $S$ が正則であるということは、 $\Omega$ 上のいたるところで $\mathbf{x}$ のヤコビアン $J$ がフルランクであるということに他ならない。

ここで、(2.1)に戻ると、 $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ および $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ は $\mathbf{x}(\mathbf{q})$ を通る曲面上の曲線の $\mathbf{x}(\mathbf{q})$ における接ベクトルであった。 $S$ が正則であるとき、 $\Omega$ 上のいたるところで $\mathbf{x}$ のヤコビアンはフルランクであったので、 $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ および $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ はある平面を張り、その平面は $\mathbf{x}(\mathbf{q})$ において曲面 $S$ に接する。この平面を曲面 $S$ の点 $\mathbf{x}(\mathbf{q})$ における接空間と呼び $T_{\mathbf{x}(\mathbf{q})}S$ と表す。つまり、微分 $d\mathbf{x}_q$ はパラメータ空間のベクトルと接空間 $T_{\mathbf{x}(\mathbf{q})}S$ のベクトルの1対1の対応関係に他ならない。

次に、微分 $d\mathbf{x}_q$ による写像で生じるベクトル内積の変化を考える。 $\mathbf{q}$ におけるパラメータ空間上のベクトルを $\bar{\mathbf{v}}_1 = (\xi_1, \eta_1)$ 、 $\bar{\mathbf{v}}_2 = (\xi_2, \eta_2)$ とし、それらに対応する $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$ での接ベクトルを $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{x}_q(\bar{\mathbf{v}}_1)$ 、 $\mathbf{v}_2 = d\mathbf{x}_q(\bar{\mathbf{v}}_2)$ とすると、2ベクトルの内積は次のように得られる。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle &= \bar{\mathbf{v}}_1^T J^T J \bar{\mathbf{v}}_2 \\ &= [\xi_1 \quad \eta_1] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

つまり、接空間での内積 $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ は、パラメータ空間での内積 $\langle \bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2 \rangle$ に $J^T J$ による歪みを加えた内積であると解釈できる。ここで、第一基本形式を二次形式として次のように定義する。

### 定義 2-1 第一基本形式

$$I_p(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := [\xi_1 \quad \eta_1] \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

ここで、 $E := \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_u$ 、 $F := \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v$ 、 $G := \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_v$ であり第一基本量と呼ばれる。行列そのものを $I_p$ や $I$ と表記することもあるが特に区別せず適宜使い分ける。この第一基本形式 $I$ は、 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上に曲面 $S$ に由来する内積を定める。曲面 $S$ に計量を与えるということは、 $S$ の各接空間に内積を与えることである。計量が定まることにより長さの概念が導入されるので曲線の長さを表すことができる。 $U$ 上の曲線 $\mathbf{u}(t) = (u(t), v(t))$ を考えると、 $\mathbf{u}(t)$ の区間 $[a, b]$ における $I$ から定まる計量の下での長さは以下のように得られる。

$$\begin{aligned}
l(a, b) &= \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial t} \right\rangle_{\mathbf{I}}} dt \\
&= \int_a^b \sqrt{E \frac{\partial u(t)}{\partial t} \frac{\partial u(t)}{\partial t} + 2F \frac{\partial u(t)}{\partial t} \frac{\partial v(t)}{\partial t} + G \frac{\partial v(t)}{\partial t} \frac{\partial v(t)}{\partial t}} dt
\end{aligned} \tag{2.5}$$

(2.5)が表す長さは、 $\mathbf{u}(t)$ の $\mathbf{x}$ による像、すなわち曲面上の曲線 $\mathbf{x}(\mathbf{u}(t))$ の長さに他ならない。

次に、曲面 $S$ の $\mathbf{p} \in S$ における曲率を考える。曲線の曲率は接ベクトルの変化量によって定義されるが、曲面の曲率は法ベクトルの変化量によって定義される。 $\mathbf{p}$ での曲面 $S$ の法ベクトルは $T_{\mathbf{p}}S$ に直交する単位ベクトルとして次のように定義される。

**定義 2-2** 法ベクトル

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

法ベクトル $\mathbf{n}$ を $\mathbb{R}^3$ の点とみなすと、 $\mathbf{n}$ は曲面 $S$ から単位球面 $S^2$ への写像とみなすことができる。この写像 $\mathbf{n}$ をガウス写像と呼ぶ。ここで、 $\mathbf{n}$ の微分 $d\mathbf{n}$ を考えると、微分の定義から、 $d\mathbf{n}$ は $\mathbf{p}$ における $S$ の接空間 $T_{\mathbf{p}}S$ と $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ における $S^2$ の接空間を1対1対応させる線形写像である。この写像はワインガルデン写像として次のように定義される。

**定義 2-3** ワインガルデン写像

$$W_{\mathbf{p}} := d\mathbf{n}_{\mathbf{p}}: T_{\mathbf{p}}S \rightarrow T_{\mathbf{n}(\mathbf{p})}S$$

ここで、 $\mathbf{p}$ における $S$ の接ベクトル $\mathbf{v} = \xi \mathbf{x}_u + \eta \mathbf{x}_v$ を考えると、

$$W_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = d\mathbf{n}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \xi \mathbf{n}_u + \eta \mathbf{n}_v \tag{2.6}$$

2つの接空間 $T_{\mathbf{p}}S$ と $T_{\mathbf{n}(\mathbf{p})}S$ は明らかに平行であるので、(2.6)で与えられるベクトルは $T_{\mathbf{p}}S$ 上のベクトルと同一視できる。そこで、このベクトルの $\mathbf{v}$ 方向の成分を考えると、

$$\begin{aligned}
\langle W_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle &= \mathbf{x}_u^T \mathbf{n}_u \xi^2 + (\mathbf{x}_u^T \mathbf{n}_v + \mathbf{x}_v^T \mathbf{n}_u) \xi \eta + \mathbf{x}_v^T \mathbf{n}_v \eta^2 \\
&= -\mathbf{x}_{uu}^T \mathbf{n} \xi^2 - 2\mathbf{x}_{uv}^T \mathbf{n} \xi \eta - \mathbf{x}_{vv}^T \mathbf{n} \eta^2 \\
&= -[\xi \quad \eta] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{uu}^T \mathbf{n} & \mathbf{x}_{uv}^T \mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{uv}^T \mathbf{n} & \mathbf{x}_{vv}^T \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

(2.7)は $\mathbf{v}$ 方向の法ベクトルの変化率を表している。ここで、第二基本形式を二次形式として次のように定義する。

**定義 2-4** 第二基本形式

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &:= -\langle W_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle \\
&= [\xi \quad \eta] \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ここで、 $L := \mathbf{x}_{uu}^T \mathbf{n}$ 、 $M := \mathbf{x}_{uv}^T \mathbf{n}$ 、 $N := \mathbf{x}_{vv}^T \mathbf{n}$ であり第二基本量と呼ばれる。第一基本形式と同様に、行列そのものを $\Pi_{\mathbf{p}}$ や $\Pi$ と表記することもあるが特に区別せず適宜使い分ける。

(2.7)は $\mathbf{v}$ 方向の法ベクトルの変化率を表すので、 $\mathbf{v}$ を単位ベクトルに制限することにより正規

化された変化率が得られる。 $\mathbf{p}$ における法ベクトル $\mathbf{n}$ の $\mathbf{v}$ 方向の正規化された変化率を曲面の $\mathbf{p}$ での法曲率として次のように定義する。

**定義 2-5** 法曲率

$$\kappa_{n,\mathbf{p}}(\mathbf{v}) := \frac{\Pi_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$$

この定義の幾何学的解釈を与えるために、 $S$ 上の曲線 $\mathbf{c}(t)$ で $\mathbf{c}(0) = \mathbf{p}$ となる曲線を考える。この曲線は曲面上の曲線であるので、 $\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ と表すことができる。この曲線の曲率を考えるために弧長パラメータ $s = s(t)$ による微分を考えて、

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \quad (2.8)$$

$$\mathbf{c}''(t) = \mathbf{x}_{uu} u' u' + 2\mathbf{x}_{uv} v' u' + \mathbf{x}_{vv} v' v' + \mathbf{x}_u u'' + \mathbf{x}_v v'' \quad (2.9)$$

ここで、 $\bullet'$ は $s$ による微分を表す。 $\langle \mathbf{c}', \mathbf{c}' \rangle = 1$ より $\langle \mathbf{c}', \mathbf{c}'' \rangle = 0$ であるので、 $\mathbf{c}' \perp \mathbf{c}''$ である。そこで、 $\mathbf{c}''$ を曲面の法ベクトル成分 $\kappa_n$ と接平面成分 $\kappa_g$ に分解することを考えると、(2.9)は以下のように表せる。

$$\mathbf{c}''(t) = \kappa_n \mathbf{n} + \kappa_g \quad (2.10)$$

ここで、 $\kappa_n$ を法曲率ベクトル、 $\kappa_g$ を測地的曲率ベクトル、それぞれのベクトルの大きさを法曲率 $\kappa_n = \|\kappa_n\|$ 、測地的曲率 $\kappa_g = \|\kappa_g\|$ と定義する。(2.9)を用いて法曲率を具体的に表すと、法ベクトルを $\mathbf{n}$ として次のように表せる。

$$\kappa_n = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{n} \rangle u' u' + 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n} \rangle v' u' + \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n} \rangle v' v' \quad (2.11)$$

$s = s(t)$ を考慮して(2.11)を整理すると、次が得られる。

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{n} \rangle \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s} \right)^2 + 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n} \rangle \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s} + \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n} \rangle \left( \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s} \right)^2 \\ &= \frac{\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{n} \rangle \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n} \rangle \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n} \rangle \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2}{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

曲線 $\mathbf{c}(t)$ の接ベクトルは、次のように得られる。

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \frac{\partial u}{\partial t} \mathbf{x}_u + \frac{\partial v}{\partial t} \mathbf{x}_v \quad (2.13)$$

ここで、 $\bullet$ は一般のパラメータ $t$ による微分を表す。定義 2-1 および定義 2-4 に倣い(2.12)を整理すれば、次が得られる。

$$\kappa_{n,\mathbf{p}} = \frac{\Pi_{\mathbf{p}=\mathbf{c}(0)}(\dot{\mathbf{c}}(0), \dot{\mathbf{c}}(0))}{I_{\mathbf{p}=\mathbf{c}(0)}(\dot{\mathbf{c}}(0), \dot{\mathbf{c}}(0))} \quad (2.14)$$

つまり、定義 2-5 による曲面の法ベクトルは、 $\mathbf{p} \in S$ において $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ を接ベクトルとする曲面

上の曲線の法曲率に一致することがわかる。

最後に、定義 2-3 によるワインガルテン写像と定義 2-1 および定義 2-4 による基本形式の関係を整理する。 $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ を基底としたときのワインガルテン写像を表す行列を $W_p$ とすると、定義 2-4 は次のように変形される。

$$\begin{aligned}\Pi_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &:= -\langle JW_p\bar{\mathbf{v}}, J\bar{\mathbf{v}} \rangle \\ \therefore \bar{\mathbf{v}}^T \Pi_p \bar{\mathbf{v}} &= -\bar{\mathbf{v}}^T I_p W_p \bar{\mathbf{v}}\end{aligned}\tag{2.15}$$

ここで、 $\bar{\mathbf{v}}$ は $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ を基底としたときの $\mathbf{v}$ の局所座標である。上式からワインガルテン写像を表す行列 $W_p$ が次のように得られる。

$$W_p = -I_p^{-1} \Pi_p\tag{2.16}$$

(2.6)および(2.16)から特に次の関係が得られる。

$$[\mathbf{n}_u \quad \mathbf{n}_v] = [\mathbf{x}_u \quad \mathbf{x}_v] W_p\tag{2.17}$$

上式はワインガルテンの公式と呼ばれる。

### 2.2.2 計量と径数付け

まず、接ベクトル $\mathbf{v}$ のノルムについて考える。 $\mathbf{p} \in S$ における接空間 $T_p S$ での内積は(2.4)で与えられるので、接ベクトル $\mathbf{v}$ の二乗ノルムは次のように得られる。

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{I}(\mathbf{v}, \mathbf{v})\tag{2.18}$$

ここで、 $\mathbf{v}$ に対応するパラメータ空間のベクトル $\bar{\mathbf{v}}$ に関して二乗ノルムの最大・最小値を考える。 $\|\bar{\mathbf{v}}\| = 1$ を制約として、次のラグランジュ関数の停留解を求めればよい。

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{v}}, \lambda) = \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{I} \bar{\mathbf{v}} + \lambda(1 - \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{v}})\tag{2.19}$$

$\bar{\mathbf{v}}$ に関する停留条件から

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{v}}}(\bar{\mathbf{v}}, \lambda) &= 2\mathbf{I}\bar{\mathbf{v}} - 2\lambda\bar{\mathbf{v}} = 0 \\ \therefore (\mathbf{I} - \lambda \mathbf{I}d)\bar{\mathbf{v}} &= 0\end{aligned}\tag{2.20}$$

これは行列 $\mathbf{I}$ の固有値問題である。 $\mathbf{I}$ は実対称行列であり固有ベクトルは直交するので、固有ベクトルおよび固有値を $\bar{\mathbf{e}}_i, \lambda_i (i = 1, 2)$ とすれば、

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle &= \bar{\mathbf{e}}_1^T \mathbf{I} \bar{\mathbf{e}}_2 \\ &= \bar{\mathbf{e}}_1^T \lambda_2 \bar{\mathbf{e}}_2 \\ &= 0 \quad (\because \bar{\mathbf{e}}_1 \perp \bar{\mathbf{e}}_2)\end{aligned}\tag{2.21}$$

よって、固有ベクトルに対応する接空間のベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ も直交することがわかる。(2.19)は $\|\bar{\mathbf{v}}\|^2 = 1$ なる制約下での最適化問題に対するラグランジュ関数であるが、 $\|\bar{\mathbf{v}}\|^2 = 1$ はパラメータ空間で単位円を定める。つまり、この単位円が径数付け $\mathbf{x}$ のヤコビアン $J$ によって接空間上で $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ が定める楕円に写ることがわかる。この $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ が定める楕円を *Anisotropic ellipse* と呼ぶ。 $\mathbf{e}_i$ のノルムがこの楕円の半径に対応し、行列 $\mathbf{I}$ の固有値の平方根 $\sqrt{\lambda_i}$ (=ヤコビアン $J$ の特異値 $\sigma_i$ )と

なる。

次に、行列 $I$ と径数付け $\boldsymbol{x}$ の関係を考える。行列 $I$ は径数付け $\boldsymbol{x}$ を具体的に定めることにより定まる行列であるので、同じ計量に対しても座標系の取り方によって行列そのものはさまざまな値をもつ。そこで、特別な性質をもつ径数付けと行列 $I$ の関係を考える。まず、パラメータ空間の2ベクトル $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2$ と対応する接空間の2ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を考える。両空間での2ベクトルの角度を $\bar{\theta}, \theta$ とし、 $\bar{\theta} = \theta$ となる場合を考える。このとき以下が成り立てばよい。

$$\cos(\bar{\theta}) = \frac{\bar{\boldsymbol{v}}_1^T \bar{\boldsymbol{v}}_2}{\sqrt{\bar{\boldsymbol{v}}_1^T \bar{\boldsymbol{v}}_1} \sqrt{\bar{\boldsymbol{v}}_2^T \bar{\boldsymbol{v}}_2}} = \frac{\bar{\boldsymbol{v}}_1^T I \bar{\boldsymbol{v}}_2}{\sqrt{\bar{\boldsymbol{v}}_1^T I \bar{\boldsymbol{v}}_1} \sqrt{\bar{\boldsymbol{v}}_2^T I \bar{\boldsymbol{v}}_2}} = \cos(\theta) \quad (2.22)$$

よって、 $\exists \eta \in \mathbb{R}, I = \eta Id$ である。これは、 $I$ の特異値 $\sigma_1, \sigma_2$ に関して $\sigma_1 = \sigma_2$ が成り立つことと同値である。つまり、 $\sigma_1 = \sigma_2$ を満たす径数付けの下では2ベクトルの角度が保存されることがわかる。この角度が保存される性質を等角性と呼ぶ。次に、2ベクトルが張る四辺形の面積 $\bar{A}, A$ を考え、 $\bar{A} = A$ となる場合を考える。

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \sqrt{\bar{\boldsymbol{v}}_1^T \bar{\boldsymbol{v}}_1} \sqrt{\bar{\boldsymbol{v}}_2^T \bar{\boldsymbol{v}}_2} \sin(\bar{\theta}) & A &= \sqrt{\bar{\boldsymbol{v}}_1^T I \bar{\boldsymbol{v}}_1} \sqrt{\bar{\boldsymbol{v}}_2^T I \bar{\boldsymbol{v}}_2} \sin(\theta) \\ &= \sqrt{(\bar{\boldsymbol{v}}_1^T \bar{\boldsymbol{v}}_1)(\bar{\boldsymbol{v}}_2^T \bar{\boldsymbol{v}}_2) - (\bar{\boldsymbol{v}}_1^T \bar{\boldsymbol{v}}_2)^2} & &= \sqrt{(\bar{\boldsymbol{v}}_1^T I \bar{\boldsymbol{v}}_1)(\bar{\boldsymbol{v}}_2^T I \bar{\boldsymbol{v}}_2) - (\bar{\boldsymbol{v}}_1^T I \bar{\boldsymbol{v}}_2)^2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$\bar{\boldsymbol{e}}_1 = (\xi_1, \eta_1), \bar{\boldsymbol{e}}_2 = (\xi_2, \eta_2)$ として、 $\bar{A} = A$ を整理すると、

$$\begin{aligned} (EG - F^2)\xi_1^2 \eta_2^2 - 2(EG - F^2)\xi_1 \xi_2 \eta_1 \eta_2 + (EG - F^2)\xi_2^2 \eta_1^2 \\ = \xi_1^2 \eta_2^2 - 2\xi_1 \xi_2 \eta_1 \eta_2 + \xi_2^2 \eta_1^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

よって、 $EG - F^2 = 1 \Leftrightarrow \det(I) = 1$ である。つまり、 $\det(I) = 1$ を満たす径数付けの下では、2ベクトルが張る四辺形の面積が保存されることがわかる。この面積が保存される性質を等積性と呼ぶ。最後に、ベクトルノルムが等しくなる場合を考えると、

$$\|\bar{\boldsymbol{v}}_1\|^2 = \bar{\boldsymbol{v}}_1^T \bar{\boldsymbol{v}}_1 = \bar{\boldsymbol{v}}_1^T I \bar{\boldsymbol{v}}_1 = \|\boldsymbol{v}_1\|^2 \quad (2.25)$$

よって、 $I = Id$ である。これは、 $I$ の特異値 $\sigma_1, \sigma_2$ に関して $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ が成り立つことと同値である。つまり、 $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ を満たす径数付けの下ではベクトルノルムが保存されることがわかる。この長さが保存される性質を等長性と呼ぶ。以上の3性質と *Anisotropic ellipse* の性質をまとめると以下のようなになる。

- 等角性 :  $\Leftrightarrow \exists f: S \rightarrow \mathbb{R}, I = fId \Leftrightarrow \sigma_1 = \sigma_2 \Leftrightarrow \text{An anisotropic ellipse is a circle}$
- 等積性 :  $\Leftrightarrow \det(I) = 1 \Leftrightarrow \sigma_1 \sigma_2 = 1$
- 等長性 :  $\Leftrightarrow I = Id \Leftrightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = 1 \Leftrightarrow \text{An anisotropic ellipse is an unit circle}$

このような性質をもつ径数付けが常に存在するとは限らないが、存在するとき性質の良い径数付けを与えることが多く有効である。

### 2.2.3 主曲率

定義 2-5 において、 $\boldsymbol{p} \in S$ における $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{p}}S$ 方向の法曲率を定義した。ここで、 $\boldsymbol{p} \in S$ における

法曲率の $\mathbf{v}$ に関する最大・最小値を考える。定義 2-5 の法ベクトルの最大・最小解は次のラグランジュ関数の停留解である。

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{v}}, \lambda) = \bar{\mathbf{v}}^T \Pi \bar{\mathbf{v}} + \lambda(1 - \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{I} \bar{\mathbf{v}}) \quad (2.26)$$

ここでは、 $\|\mathbf{v}\| = 1$ の制約下で $\bar{\mathbf{v}}^T \Pi \bar{\mathbf{v}}$ の最大最小問題を考えた。 $\bar{\mathbf{v}}$ に関する停留条件から

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{v}}}(\bar{\mathbf{v}}, \lambda) &= 2\Pi\bar{\mathbf{v}} - 2\lambda\mathbf{I}\bar{\mathbf{v}} = 0 \\ \therefore (\mathbf{I}^{-1}\Pi - \lambda\mathbf{I}d)\bar{\mathbf{v}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

これは行列 $\mathbf{I}^{-1}\Pi$ の固有値問題である。固有ベクトルおよび固有値を $\bar{\mathbf{e}}_i$ ,  $\lambda_i (i = 1, 2)$ とし、(2.27)の両辺に $\bar{\mathbf{e}}_i^T$ を掛け $\mathcal{L}_{\lambda} = 0$ を適用すれば、

$$\bar{\mathbf{e}}_i^T \Pi \bar{\mathbf{e}}_i = \lambda_i \quad (2.28)$$

つまり、固有ベクトルに対応する法曲率は次のように得られる。

$$\kappa_i = \frac{\bar{\mathbf{e}}_i^T \Pi \bar{\mathbf{e}}_i}{\bar{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{I} \bar{\mathbf{e}}_i} = \lambda_i \quad (2.29)$$

したがって、 $\mathbf{p} \in S$ での法曲率の最大・最小値は $\mathbf{I}^{-1}\Pi$ の固有値に対応し、その方向は固有ベクトルに対応する。この法曲率の最大・最小値を主曲率、対応する方向を主曲率方向と定義する。また、主曲率・主曲率ベクトルを固有値・固有ベクトルとして与える行列 $\mathbf{I}^{-1}\Pi$ を特に型作用素 $S$ として次のように定義する。

**定義 2-6** 型作用素

$$S := \mathbf{I}^{-1}\Pi$$

$S$ の固有方程式が重解をもつ場合、 $\kappa_1 = \kappa_2$ であり法曲率 $\kappa_{n, \mathbf{p}}$ は定値となる。このような点は臍点と呼ばれ、その点では特定の主曲率方向が存在せず全方向に均等に曲面が曲がっている。 $\kappa_1 \neq \kappa_2$ である点において接空間での主曲率ベクトル $\mathbf{e}_i$ を考えると、2つの主曲率ベクトルの内積は以下のようになる。

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \bar{\mathbf{e}}_1^T \mathbf{I} \bar{\mathbf{e}}_2 \quad (2.30)$$

ここで(2.27)に主曲率ベクトル $\bar{\mathbf{e}}_i$ および主曲率 $\kappa_i$ を代入して次のように変形する。

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{e}}_2^T \Pi \bar{\mathbf{e}}_1 = \kappa_1 \bar{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{I} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_1^T \Pi \bar{\mathbf{e}}_2 = \kappa_2 \bar{\mathbf{e}}_1^T \mathbf{I} \bar{\mathbf{e}}_2 \end{cases} \quad (2.31)$$

$\mathbf{I}, \Pi$ の対称性から、 $\kappa_1 \neq \kappa_2$ であれば

$$\bar{\mathbf{e}}_1^T \mathbf{I} \bar{\mathbf{e}}_2 = 0 \quad (2.32)$$

(2.30), (2.32)から主曲率ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ の内積が0であることがわかり、2つの主曲率ベクトルは接空間上で常に直交していることがわかる。また、 $\mathbf{e}_i \in T_{\mathbf{p}}S$ であり $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{n}$ であるので、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ は $\mathbb{E}^3$ の正規直交な3ベクトルである。ここで、この3ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ を固有ベクトルとし、 $\kappa_1, \kappa_2, 0$ を固有値とする $3 \times 3$ 対称行列を曲率テンソル $C$ として次のように定義する。

**定義 2-7** 曲率テンソル

$$P = [e_1 \ e_2 \ n], \quad D = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2, 0), \quad C := PDP^{-1}$$

型作用素 $S$ はパラメータ空間の主曲率ベクトルを与え、曲率テンソル $C$ は接空間での主曲率ベクトルを与える。最後に、主曲率に関連する重要な曲率としてガウス曲率 $K$ および平均曲率 $H$ の定義を示す。

**定義 2-8** ガウス曲率・平均曲率

$$K := \kappa_1 \kappa_2, \quad H := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

**2.2.4 座標系**

本項では、曲面上の座標系について整理する。曲面とは写像 $\mathbf{x}$ が定める曲面片の和集合として定められる空間(本節では $E^3$ )内の集合であった。このとき各写像 $\mathbf{x}$ は自身が定める曲面片上に座標系 $(u, v)$ を定める。同じ曲面片に対しても座標変換により複数の座標系を定めることができることは明らかであろう。本項では、このように曲面片上で複数定まる座標系の中で、特別な性質を満たす座標系について整理する。

**2.2.4.1 曲率線座標系**

本項では、曲面上の重要な座標系の1つである曲率線座標系について整理する。曲面 $S$ が $(u, v)$ を座標系とする $\mathbb{R}^2$ 内の領域 $\Omega$ で定義された関数 $\mathbf{x}(u, v)$ により径数付けられているとき、この座標系が曲率線座標系であることは次のように定義される。

**定義 2-9** 曲面 $S$ の座標系 $(u, v)$ とその埋め込み写像を $\mathbf{x}$ とする。このとき、臍点を除くすべての点 $\mathbf{p} \in S$ で接ベクトル $\mathbf{x}_u$ および $\mathbf{x}_v$ が主曲率方向に一致するとき、座標系 $(u, v)$ を曲率線座標系という。

曲率線座標系は以下のように特徴付けられる。

**命題 2-1** 曲面 $S$ の座標系 $(u, v)$ に関して、臍点の集合を $U$ として

$$\text{曲率線座標系}(u, v) \iff \forall \mathbf{p} \in S \setminus U, F = M = 0$$

[証明] まず、 $\Rightarrow$ を示す。 $(u, v)$ が曲率線座標系なので、定義 2-9 より、臍点を除くすべての点 $\mathbf{p} \in S$ で $\mathbf{x}_u$ および $\mathbf{x}_v$ が主曲率方向に一致する。主曲率方向は、 $\mathbf{p}$ での型作用素 $S_{\mathbf{p}}$ の固有ベクトルとして得られ、主曲率方向が $\mathbf{x}_u$ および $\mathbf{x}_v$ に一致するとき $S_{\mathbf{p}}$ の固有ベクトルは $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ となるので、それぞれの固有値を $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ とすれば、 $S_{\mathbf{p}}$ の固有値分解を考えることで、

$$S_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

また、型作用素 $S_{\mathbf{p}}$ は曲面の第一基本形式および第二基本形式により、

$$S_p = -I^{-1}\Pi = \frac{-1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

両式を比較すると次の関係が得られる。

$$\frac{FM - GL}{EG - F^2} = \lambda_1, \quad \frac{FM - EN}{EG - F^2} = \lambda_2, \quad GM - FN = 0, \quad EM - FL = 0 \quad (2.35)$$

上式が臍点を除くすべての点 $p$ で成り立つので次が成り立つ。

$$F = M = 0 \quad (2.36)$$

次に、 $\Leftarrow$ を示す。臍点を除くすべての点 $p \in S$ において $F = M = 0$ なので、型作用素 $S_p$ は以下のように得られる。

$$S_p = -I^{-1}\Pi = \frac{-1}{EG} \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} = \frac{-1}{EG} \begin{bmatrix} GL & 0 \\ 0 & EN \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

上式から、 $S_p$ の固有ベクトルは $(1,0)$ 、 $(0,1)$ となり、 $\mathbb{E}^3$ における主曲率方向は $\mathbf{x}_u$ および $\mathbf{x}_v$ に一致する。以上で、曲率線座標系が $F = M = 0$ により特徴付けられることが示された。□

#### 2.2.4.2 共役座標系

本項では、第4章において特に重要な役割を果たす共役座標系について整理する。まず、曲面上の2つの接ベクトル間関係として定義される共役関係について示す。曲面 $S$ 上の点 $p$ における接ベクトル $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{w}$ が共役であることは次のように定義される。

**定義 2-10** 曲面 $S$ の $p \in S$ における接ベクトル $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{w}$ が次を満たすとき $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{w}$ は共役であるという。

$$\langle d\mathbf{n}_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, d\mathbf{n}_p(\mathbf{w}) \rangle = 0$$

2.2.1項で示したように、ガウス写像 $\mathbf{n}$ の微分 $d\mathbf{n}$ は $T_p S$ と $T_{\mathbf{n}(p)} S^2$ を1対1対応させる線形写像であり、 $\mathbf{v} \in T_p S$ に対する法ベクトル $\mathbf{n}$ の変化ベクトルを対応させる。つまり、共役な2ベクトルとは、一方の方向に対する法ベクトルの変化ベクトルがもう一方の方向の成分をもたないことを意味する。この共役条件に関して次が成り立つ。

**命題 2-2**  $\langle d\mathbf{n}_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, d\mathbf{n}_p(\mathbf{w}) \rangle = 0 \iff \Pi_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$

[証明] まず、 $\Rightarrow$ を示す。曲面 $S$ が $\mathbf{x}(u, v)$ により径数付けられているとする。このとき、 $\mathbf{v} = \xi_1 \mathbf{x}_u + \eta_1 \mathbf{x}_v$ 、 $\mathbf{w} = \xi_2 \mathbf{x}_u + \eta_2 \mathbf{x}_v$ とすると、

$$d\mathbf{n}_p(\mathbf{v}) = \xi_1 \mathbf{n}_u + \eta_1 \mathbf{n}_v \quad (2.38)$$

ワインガルデンの公式(2.17)から、 $\mathbf{n}_u$ 、 $\mathbf{n}_v$ と $\mathbf{x}_u$ 、 $\mathbf{x}_v$ との関係が次のように得られる。

$$[\mathbf{n}_u \quad \mathbf{n}_v] = -[\mathbf{x}_u \quad \mathbf{x}_v]I^{-1}\Pi \quad (2.39)$$

(2.38)、(2.39)を用いることで共役条件の定義式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\langle d\mathbf{n}_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle &= d\mathbf{n}_p(\mathbf{v})^T \mathbf{w} \\
&= -[\xi_1 \quad \eta_1] \Pi_p \Gamma_p^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u^T \\ \mathbf{x}_v^T \end{bmatrix} [\mathbf{x}_u \quad \mathbf{x}_v] \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \\
&= -[\xi_1 \quad \eta_1] \Pi_p \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \\
&= -\bar{\mathbf{v}}^T \Pi_p \bar{\mathbf{w}} = 0
\end{aligned} \tag{2.40}$$

以上で、 $\Pi_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ が示せた。

次に、 $\Leftarrow$ を示す。接空間とパラメータ空間の1対1対応の関係から、擬逆行列により $\bar{\mathbf{w}} = (J^T J)^{-1} J^T \mathbf{w}$ となるので、与式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{v}}^T \Pi_p \bar{\mathbf{w}} &= \bar{\mathbf{v}}^T \Pi_p (J^T J)^{-1} J^T \mathbf{w} \\
&= \bar{\mathbf{v}}^T \Pi_p \Gamma_p^{-1} J^T \mathbf{w} \\
&= \bar{\mathbf{v}}^T \Pi_p \Gamma_p^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u^T \\ \mathbf{x}_v^T \end{bmatrix} \mathbf{w} \\
&= -[\xi_1 \quad \eta_1] \begin{bmatrix} \mathbf{n}_u^T \\ \mathbf{n}_v^T \end{bmatrix} \mathbf{w} \\
&= -d\mathbf{n}_p(\mathbf{v})^T \mathbf{w} = 0
\end{aligned} \tag{2.41}$$

以上より、 $\langle d\mathbf{n}_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = 0$ が示せた。よって、共役条件が $\Pi_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ により特徴付けられることが示せた。□

さらに、命題2-2の条件に関して次の命題が成り立つ。

$$\text{命題 2-3} \quad \Pi_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \iff \kappa_{1,p} \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_{1,p} \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_{1,p} \rangle + \kappa_{2,p} \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_{2,p} \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_{2,p} \rangle = 0$$

ここで、 $\kappa_{i,p}$ および $\mathbf{e}_{i,p}$ は、 $\mathbf{p} \in S$ における主曲率および主曲率方向の単位接ベクトルである。以下の証明では、 $\mathbf{p}$ に関する添え字を省略して表記する。

[証明] まず、 $\Rightarrow$ を示す。主曲率方向の接ベクトルを基底として2つの接ベクトル $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{w}$ を次のように表す。

$$\mathbf{v} = \xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{w} = \eta_1 \mathbf{e}_1 + \eta_2 \mathbf{e}_2 \tag{2.42}$$

共役条件と接空間とパラメータ空間の1対1対応の関係から、

$$\begin{aligned}
\Pi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \bar{\mathbf{v}}^T \Pi \bar{\mathbf{w}} \\
&= \mathbf{v}^T J (J^T J)^{-1} \Pi (J^T J)^{-1} J^T \mathbf{w} \\
&= \mathbf{v}^T J \Gamma^{-1} \Pi \Gamma^{-1} J^T \mathbf{w} \\
&= -\mathbf{v}^T J S \Gamma^{-1} J^T \mathbf{w} \\
&= -\xi_1 \eta_1 \mathbf{e}_1^T J S \bar{\mathbf{e}}_1 - \xi_2 \eta_1 \mathbf{e}_2^T J S \bar{\mathbf{e}}_1 - \xi_1 \eta_2 \mathbf{e}_1^T J S \bar{\mathbf{e}}_2 - \xi_2 \eta_2 \mathbf{e}_2^T J S \bar{\mathbf{e}}_2 \\
&= -\xi_1 \eta_1 \mathbf{e}_1^T J \kappa_1 \bar{\mathbf{e}}_1 - \xi_2 \eta_1 \mathbf{e}_2^T J \kappa_1 \bar{\mathbf{e}}_1 - \xi_1 \eta_2 \mathbf{e}_1^T J \kappa_2 \bar{\mathbf{e}}_2 - \xi_2 \eta_2 \mathbf{e}_2^T J \kappa_2 \bar{\mathbf{e}}_2 \\
&= -\xi_1 \eta_1 \kappa_1 \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 - \xi_2 \eta_1 \kappa_1 \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 - \xi_1 \eta_2 \kappa_2 \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 - \xi_2 \eta_2 \kappa_2 \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 \\
&= -\kappa_1 \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_1 \rangle - \kappa_2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_2 \rangle = 0
\end{aligned} \tag{2.43}$$

上式の展開において(2.42)、型作用素 $S$ と主曲率ベクトルの関係、主曲率ベクトルの直交性を用いた。以上で $\Rightarrow$ が示せた。 $\Leftarrow$ は(2.42)の形式で2つの接ベクトルを表したうえで、(2.43)の逆をたどればよいので省略する。以上で命題2-3が示せ、共役条件はこの条件によっても特徴付けられることが示された。命題2-2による特徴付けがパラメータ空間での条件を与え、命題2-3による特徴付けが埋め込み区間での条件を与えることは明らかであろう。□

最後に自己共役方向に関する次の命題を示す。

**命題 2-4**  $\forall p \in \{q \in S | K(q) < 0\}, \exists v \in T_p S, \Pi(v, v) = 0$

ここで、 $K(q)$ は $q \in S$ におけるガウス曲率を表す。

[証明] ガウス曲率が負となる任意の点 $p$ を考える。このとき、法曲率が0となる方向(i.e. 漸近方向)が存在する。この漸近方向を $v$ として、 $v$ と第一主曲率方向がなす角を $\theta$ とすればオイラーの公式から次が得られる。

$$\kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta = 0 \quad (2.44)$$

漸近方向 $v$ に共役な方向 $w$ を考えると、命題2-3の共役条件から次が得られる。

$$\kappa_1 \cos \theta \cos \phi + \kappa_2 \sin \theta \sin \phi = 0 \quad (2.45)$$

ここで、 $\phi$ は $w$ が第一主曲率方向となす角である。(2.48), (2.49)をまとめて整理すると次が得られる。

$$\begin{aligned} \sin(\theta - \phi) &= 0 \\ \therefore \theta &= \phi + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \quad (2.46)$$

これは、 $v \parallel w$ を意味する。 $w = \alpha v$ とすれば $v$ と $w$ の共役性から次が得られる。

$$\begin{aligned} \Pi(v, w) &= \alpha \Pi(v, v) \\ \therefore \Pi(v, v) &= 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

よって、漸近方向 $v$ は自身と共役な関係にある方向(:=自己共役方向)である。□

次に、共役座標系について整理する。曲面 $S$ が $(u, v)$ を座標系とする $\mathbb{R}^2$ 内の領域 $\Omega$ で定義された関数 $\mathbf{x}(u, v)$ により径数付けられているとき、この座標系が共役座標系であることは次のように定義される。

**定義 2-11** 曲面 $S$ の座標系 $(u, v)$ とその埋め込み写像を $\mathbf{x}$ とする。このとき、すべての点 $p \in S$ で接ベクトル $\mathbf{x}_u$ および $\mathbf{x}_v$ が共役であるとき、座標系 $(u, v)$ を共役座標系という。

共役座標系は以下のように特徴付けられる。

**命題 2-5** 曲面 $S$ の座標系 $(u, v)$ に関して、

$$\text{共役座標系}(u, v) \iff \forall p \in S, M = 0$$

[証明] まず、 $\Rightarrow$ を示す。 $(u, v)$ が共役座標系なので、定義2-11より、すべての点 $p \in S$ で $\mathbf{x}_u$ と $\mathbf{x}_v$ が共役である。このとき、命題2-2より $\bar{\mathbf{x}}_u = (1, 0)$ および $\bar{\mathbf{x}}_v = (0, 1)$ に対して次が成り立つ。

$$[1 \ 0] \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.48)$$

$$\therefore M = 0$$

以上で $\Rightarrow$ が示された。逆に $\Leftarrow$ を示すと、すべての点 $\mathbf{p} \in S$ で $M = 0$ が成り立つので、 $\bar{\mathbf{x}}_u = (1, 0)$ および $\bar{\mathbf{x}}_v = (0, 1)$ に対して次が成り立つ。

$$[1 \ 0] \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.49)$$

よって、すべての点 $\mathbf{p} \in S$ で $\mathbf{x}_u$ と $\mathbf{x}_v$ は共役条件を満たすので、 $M = 0$ を満たす座標系 $(u, v)$ は共役座標系となる。この結果から明らかであるが、曲率線座標系は共役座標系の1つであり、直交性を満たす( $F = 0$ )共役座標系である。□

### 2.2.5 曲面上の方向場

本項では、滑らかな曲面上の方向場に関して [18]で述べられている事項について整理する。本項で整理する事項は、第4章で扱う曲面上の共役場を考えるうえで基本となる。

曲面 $S$ 上の点 $\mathbf{p}$ に単位接ベクトル $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ を対応させることで、 $\mathbf{p} \in S$ における $S$ 上の方向を定義することができる。特に、 $2\pi/N$ 回転に対して対称性をもつ方向が  $N$ -RoSy 方向として次のように定義される。

**定義 2-12** 曲面 $S$ 上の点 $\mathbf{p}$ に接ベクトルの集合 $d$ を

$$d = \left\{ \mathbf{v}_k = \text{Rot}_{\mathbf{n}} \left( \mathbf{v}_0, k \frac{2\pi}{N} \right) \mid \mathbf{v}_0 \in T_{\mathbf{p}}S, \|\mathbf{v}_0\| = 1, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

により定めるとき、この集合 $d$ を $\mathbf{p} \in S$ における  $N$ -RoSy 方向という。ここで、 $\text{Rot}_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}, \theta)$ は $\mathbf{p} \in S$ における法ベクトル $\mathbf{n}$ まわりの接ベクトル $\mathbf{v}$ の $\theta$ 回転を表す。

$N$ -RoSy 方向 $d$ は接空間内での $2\pi/N$ 回転に対して不変な方向である。 $S$ 上のすべての点 $\mathbf{p}$ に対して  $N$ -RoSy 方向を対応させることにより、 $S$ 上の  $N$ -RoSy 方向場が次のように定義される。

**定義 2-13** 曲面 $S$ 上の点 $\mathbf{p}$ における  $N$ -RoSy 方向を $d(\mathbf{p})$ としたとき、

$$\mathcal{D}_N = \{d(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in S\}$$

により定まる $S$ 上の  $N$ -RoSy 方向の集合を $S$ 上の  $N$ -RoSy 方向場という。

$N = 2$ が $S$ 上の線場を、 $N = 4$ が $S$ 上の交差場を表すことは明らかであろう。このようにして定義される $S$ 上の方向場 $\mathcal{D}_N$ のある曲線に沿った変化を考える。 $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in S$ を端点とする $S$ 上の曲線 $\gamma$ を考え、 $\gamma$ の弧長パラメータを $s$ とする。 $\gamma$ 上のダルブー標構を $(\mathbf{t}_\gamma, \mathbf{b}_\gamma, \mathbf{n})$ とすれば、 $\gamma$ の曲率ベクトルが次のように分解される。

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \kappa_{\gamma, g} \mathbf{b}_\gamma + \kappa_{\gamma, n} \mathbf{n}, \quad \kappa_{\gamma, g} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s}, \mathbf{b}_\gamma \right\rangle, \quad \kappa_{\gamma, n} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s}, \mathbf{n} \right\rangle \quad (2.50)$$

これは(2.10)に等しい。次に、 $\gamma$ に沿った $d(\mathbf{p}) = \{\mathbf{v}_k\}$ の $s$ による微分を求め、(2.50)と同様に分解すると次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial s} = \kappa_{d,g} \mathbf{b}_d + \kappa_{d,n} \mathbf{n}, \quad \kappa_{d,g} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial s}, \mathbf{b}_d \right\rangle, \quad \kappa_{d,n} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial s}, \mathbf{n} \right\rangle \quad (2.51)$$

ここで、 $\mathbf{b}_d = \mathbf{n} \times \mathbf{v}_k$ であり $(\mathbf{v}_k, \mathbf{b}_d, \mathbf{n})$ は方向場に沿った曲線のダルブー標構に対応している。 $\kappa_{\gamma,g}$ は曲線接ベクトルの接空間上の変化を与え、 $\kappa_{d,g}$ は方向場の曲線に沿った接空間上の変化を与える。つまり、微小長さ $ds$ に対して方向場の $\gamma$ に沿った微小回転角 $d\theta$ の関係が次のように得られる。

$$d\theta = (\kappa_{d,g} - \kappa_{\gamma,g}) ds \quad (2.52)$$

$\mathbf{p} \in \gamma$ での $\gamma$ の接ベクトル $\mathbf{t}_\gamma$ に対するベクトル $\mathbf{v}_k$ の角度を $\theta(\mathbf{p})$ とすれば、曲線端点での角度の関係が次のように得られる。

$$\theta(\mathbf{Q}) = \theta(\mathbf{P}) + \int_{\gamma} (\kappa_{d,g} - \kappa_{\gamma,g}) ds \quad (2.53)$$

$\gamma$ が閉曲線であるとき $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ であり $\theta(\mathbf{Q}) = \theta(\mathbf{P})$ となるが、方向場 $d(\mathbf{p}) = \{\mathbf{v}_k\}$ の回転対称性を考慮すると、 $1/N$ の整数倍数として*turning number*が次のように定義される。

$$T_d(\gamma) := \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} (\kappa_{d,g} - \kappa_{\gamma,g}) ds \quad (2.54)$$

次に、 $S$ 上の方向場 $\mathcal{D}_N$ の特異点を考える。まず、 $\mathbb{R}^2$ 上の一般のベクトル場 $\mathbf{v}(x, y)$ を考えると $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ で特異点指数が次のように定義される。

$$I(\mathbf{p}) := \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Omega(\mathbf{p})} d\theta \quad (2.55)$$

ここで、 $\Omega(\mathbf{p})$ は $\mathbf{p}$ の適当な(他の特異点を含まない)近傍、 $\partial\Omega(\mathbf{p})$ はその境界、 $\theta$ はある基準軸に対するベクトルの角度である。 $I(\mathbf{p})$ は整数値であり $I(\mathbf{p}) \neq 0$ のときベクトル場の特異点となる。回転対称性のある方向場 $\{\mathbf{v}_k\}$ の場合、 $I(\mathbf{p})$ は $1/N$ の整数倍数となるが、 $I(\mathbf{p}) \neq 0$ の点の特異点に対応することは同様である。ここで、 $S$ 上の方向場 $\mathcal{D}_N$ を考える。曲面上の方向場を考える場合、(2.55)で用いたような共通の基準軸を用いることができないが、基準軸として積分経路に沿った動標構を用いることで方向場の回転量を評価したものが(2.54)で定義した*turning number*であるので、動標構自身が閉曲線の周回によって1回転することを考慮して、次の関係が得られる。

$$T_d(\partial\Omega(\mathbf{p})) = I_d(\mathbf{p}) - 1 \quad (2.56)$$

この関係から、曲面上の方向場に対して特異点指数が次のように定義できる。

$$I_d(\mathbf{p}) := T_d(\partial\Omega(\mathbf{p})) + 1 \quad (2.57)$$

このように定義される特異点指数を用いることで曲面上の  $N$ -RoSy 場の特異点を判別することができる。

## 2.3 離散曲面の微分幾何学

本項では、離散曲面を対象とする微分幾何学に関する基本的な事項を主に [17] [19] [20]などを参照して整理する。本項では、離散曲面として三角形メッシュを前提とし、2.2節と同様に三角形メッシュは $\mathbb{E}^3$ に埋め込まれているとする。

### 2.3.1 三角形メッシュ

本項では離散曲面として三角形メッシュを前提とする。三角形メッシュ $M$ はグラフ構造 $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ と頂点の埋め込み座標 $\mathcal{P}$ により表現される。頂点の集合 $\mathcal{V}$ 、エッジの集合 $\mathcal{E}$ 、フェースの集合 $\mathcal{F}$ をそれぞれ以下のように表記する。

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \{v_1, v_2, \dots, v_V\} \\ \mathcal{E} &= \{e_1, e_2, \dots, e_E\}, \quad e_i \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \\ \mathcal{F} &= \{f_1, f_2, \dots, f_F\}, \quad f_i \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}\end{aligned}\tag{2.58}$$

グラフ構造の頂点は幾何学的な情報をもたないので(2.58)中の $\mathcal{V}$ は単なる添え字集合に過ぎず、エッジやフェースも添え字の順序対に過ぎない。各頂点に対応する $\mathbb{E}^3$ 上の埋め込み点の集合 $\mathcal{P}$ を次のように表記する。

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_V\}, \quad \mathbf{p}_i := \mathbf{p}(v_i) = \begin{bmatrix} x(v_i) \\ y(v_i) \\ z(v_i) \end{bmatrix} \in \mathbb{E}^3\tag{2.59}$$

(2.59)のように頂点に対応する $\mathbb{E}^3$ 上の点を定めることによりメッシュは幾何学的な意味をもつ。このグラフの $\mathbb{E}^3$ への埋め込みによって、各エッジは $\mathbb{E}^3$ 上の線分に対応し、各フェースは $\mathbb{E}^3$ 上の三角形に対応する。以後の議論では、グラフの埋め込みで得られる $\mathbb{E}^3$ 上の点・線分・三角形も特に区別せず頂点・エッジ・フェースと呼称する。

グラフの埋め込みは各頂点に $\mathbb{E}^3$ 上の点を対応させることによって定義されるが、埋め込みで得られるメッシュはすべての三角形フェースが各々の3頂点により線形補間された連続な曲面として考える。 $f = (i, j, k) \in F$ に対応する三角形 $T = (\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k)$ 内の点 $\mathbf{p}$ は次のように表される。

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \alpha \mathbf{p}_i + \beta \mathbf{p}_j + \gamma \mathbf{p}_k \\ \text{s.t. } &\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0\end{aligned}\tag{2.60}$$

この時の座標 $(\alpha, \beta, \gamma)$ を三角形 $T$ 上の重心座標と呼ぶ。メッシュ上のすべての三角形フェースはこの座標系を自然にもつ。同じ構造をもつメッシュ $M, M'$ に対して区分線形写像 $f: M \rightarrow M'$ を次のように定めることができる。

$$\alpha \mathbf{p}_i + \beta \mathbf{p}_j + \gamma \mathbf{p}_k \rightarrow \alpha \mathbf{p}'_i + \beta \mathbf{p}'_j + \gamma \mathbf{p}'_k\tag{2.61}$$

この写像は、 $M$ 上の $f \in F$ に対応する三角形 $T$ 上で重心座標が $(\alpha, \beta, \gamma)$ である点を、 $M'$ 上の $f' = f$ に対応する三角形 $T'$ 上で重心座標が $(\alpha, \beta, \gamma)$ となる点に対応させる写像である。

### 2.3.2 メッシュの基本的な幾何量

メッシュ  $M = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$  を考える。  $f \in F$  に対応する  $\mathbb{E}^3$  上の三角形  $T$  の 3 頂点を  $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k$  とすると、  $T$  上でメッシュ法ベクトルが次のように定義される。

**定義 2-14** フェース法ベクトル

$$\mathbf{n}(T) := \frac{(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \times (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_i)}{\|(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i) \times (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_i)\|}$$

これは  $T$  が定める平面の単位法ベクトルに他ならない。次に、頂点  $v \in \mathcal{V}$  に対応する点  $\mathbf{p}_v$  でのメッシュ法ベクトルが近傍フェースの法ベクトルの重み付き平均により次のように定義される。

**定義 2-15** 頂点法ベクトル

$$\mathbf{n}(v) := \frac{\sum_{T \in \mathcal{N}_1(v)} \alpha_T \mathbf{n}(T)}{\left\| \sum_{T \in \mathcal{N}_1(v)} \alpha_T \mathbf{n}(T) \right\|}$$

ここで  $\mathcal{N}_1(v)$  は頂点  $v$  の 1-Ring 近傍を表す(図 2-1)。  $\alpha_T$  は近傍内の法ベクトルを平均化するために用いる重み係数でありさまざまな定義が存在するが、中心点  $\mathbf{p}_v$  まわりの三角形の内角  $\theta_T$  を  $\alpha_T$  として用いる定義(AWPN)が最も有効であるとされている。本研究でも AWPN による法ベクトルを用いる。

次に、メッシュの曲率に関する定義を整理する。メッシュの曲率に関してもさまざまな定義が存在するが、ここでは離散曲率テンソルに基づく定義 [21] を整理する。滑らかな曲面に関して、接空間上の主曲率ベクトルを固有ベクトルとする行列が曲率テンソル  $C$  (定義 2-7) として定義された。メッシュ上で同様の行列を定義することを考える。エッジ  $e \in \mathcal{E}$  に対応する  $\mathbb{E}^3$  上の線分を表すベクトルを  $\mathbf{e}$  とすると、  $\mathbf{e}$  上の点で線分の方に曲面は平坦であり、  $\mathbf{e}$  に直交する方向に隣接するフェースの二面角で曲面は曲がっている。ここで、二面角を  $\beta$  として線分  $\mathbf{e}$  に対して行列  $C$  を次のように定義する(図 2-2(a))。

**定義 2-16** 離散曲率テンソル(エッジ)

$$C(\mathbf{e}) := \frac{\beta \mathbf{e} \mathbf{e}^T}{\|\mathbf{e}\|^2}$$

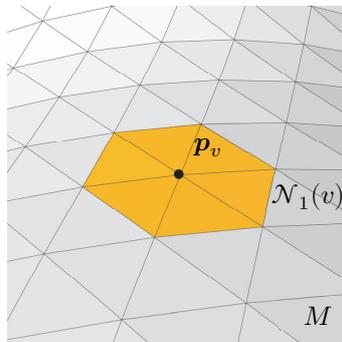


図 2-1 1-Ring 近傍

(a)二面角 $\beta$ (b)近傍 $R(v)$ 

図 2-2 離散曲率テンソル

この行列 $C$ に対して次が成り立つ。

$$C(\mathbf{e})\mathbf{e} = \beta\mathbf{e}, \quad C(\mathbf{e})\mathbf{e}_\perp = 0 \quad (2.62)$$

ここで、 $\mathbf{e}_\perp$ は $\mathbf{e}$ に直交する任意のベクトルである。つまり、定義 2-16 で定義される行列は、固有値 $(\beta, 0, 0)$ 、固有ベクトル $(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{\perp 1}, \mathbf{e}_{\perp 2})$ をもつ行列であり、滑らかな曲面の場合に定義された曲率テンソルと類似の性質をもつ行列であると考えられる。ただし、非零な固有値 $\beta$ に対応する固有ベクトル方向に曲面は平坦であり、連続系での曲率テンソルの主曲率・固有ベクトルの関係と逆の関係になることに注意が必要である。この行列 $C$ を頂点 $v$ の埋め込み点 $\mathbf{p}$ の近傍で平均化することで頂点 $v$ の曲率テンソルが次のように定義される。

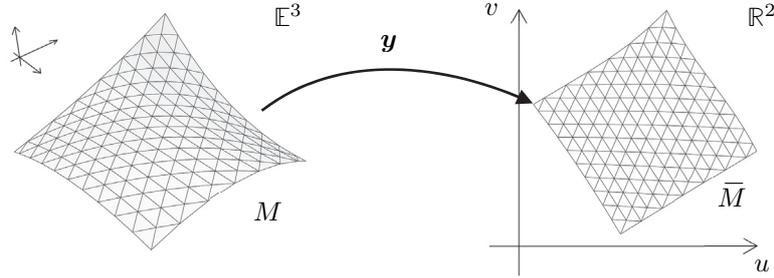
**定義 2-17** 離散曲率テンソル(頂点)

$$C(v) := \frac{1}{A(R(v))} \sum_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}} \|\mathbf{e} \cap R(v)\| C(\mathbf{e})$$

ここで、 $R(v)$ は $\mathbf{p}$ を中心とし適当な半径をもつメッシュ上の近傍、 $A(\bullet)$ は領域の面積を表す(図 2-2(b))。このように定義される曲率テンソルは、連続系での曲率テンソルと同様に、一般に1つの零固有値と2つの非零固有値をもち、零固有値に対応する固有ベクトルが法ベクトルに対応する。この法ベクトルはAWPNによる法ベクトル(定義 2-15)に一般に一致しないため、曲率テンソルにより定まる主曲率ベクトルを用いる場合は、矛盾を防ぐために曲率テンソルから定まる法ベクトルを頂点の法ベクトルとして採用することが多い。また、線分で定義される曲率テンソルの場合と同様に、固有値・固有ベクトルの関係と主曲率・主曲率ベクトルの関係に入れ替えが生じていることに注意する。つまり、第一固有ベクトル方向の主曲率は第二固有値に対応している。

### 2.3.3 径数付け

2.2節で対象とした滑らかな曲面は、曲面片 $S$ の和集合で定められる空間内の集合であり、 $S$ は埋め込み写像 $\mathbf{x}: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ によって定められるのであった。つまり、滑らかな曲面は何らかの座標系を自然に備えている。これに対して、メッシュ $M$ は $\mathbb{E}^3$ に埋め込まれた離散曲面であり、滑らかな曲面のような座標系をあらかじめ備えていない。このように座標系を自然にもたないメ

図 2-3 写像  $y$ 

メッシュに対して座標系を定めることをメッシュの径数付け (*Parameterization*) と呼ぶ。メッシュの径数付けでは、 $M$  と同じ構造をもつ  $\mathbb{R}^2$  上のメッシュ  $\bar{M}$  への写像  $y: M \subset \mathbb{E}^3 \rightarrow \bar{M} \subset \mathbb{R}^2$  を定める (図 2-3)。これは連続な曲面の埋め込み写像  $x$  に対して逆の写像であり、埋め込み空間上のメッシュからパラメータ空間上のメッシュへの写像である。2.3.1 項で示したように、同じ構造をもつ 2 つのメッシュは区分線形写像により対応させることができるので、写像  $y$  を定めるためには  $\bar{M}$  の頂点  $v_i$  の埋め込み点  $\bar{p}_i \in \mathbb{R}^2$  を定めればよい。 $M$  と  $\bar{M}$  は同じ構造をもつので  $M$  の頂点  $p_i \in \mathbb{E}^3$  と  $\bar{M}$  の頂点  $\bar{p}_i \in \mathbb{R}^2$  が対応することは明らかであろう。このような写像  $y$  の定め方は無数に存在するため、 $\bar{M}$  に関する条件やアイソパラメータ方向に関する条件を設定することで写像を一意に定めることが多い。ここでは、写像  $y$  に関する基本事項と写像  $y$  によって定まる  $\bar{M}$  の性質について整理したのち、具体的な既往手法 (LSCM [22]、MIPS [23]、Mixed-Integer-Quadrangulation [24]) について整理する。

### 2.3.3.1 位相と写像

まず、連続系について考える。ここでは曲面  $S$  と曲面片  $S$  を区別して扱う。曲面片  $S$  は位相同型写像  $x: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset S$  による径数付けをもち、 $S$  が正則であるとき  $x$  のヤコビアンはフルランクである。リーマンの定理から、 $S$  が円板と位相同型 (i.e.  $\Omega$  も円板と位相同型) であれば共形写像  $x: \Omega \rightarrow S$  が存在することが知られている [22]。共形写像は次を満たす写像である。

$$\mathbf{x}_v = \mathbf{n} \times \mathbf{x}_v \quad (2.63)$$

この座標系の下で、パラメータ空間の 2 ベクトル  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  がなす角度  $\bar{\theta}$  と接空間の 2 ベクトル  $v_1, v_2$  がなす角度  $\theta$  を考えれば次のようになる。

$$\cos(\bar{\theta}) = \frac{\bar{v}_1^T \bar{v}_2}{\|\bar{v}_1\| \|\bar{v}_2\|}, \quad \cos(\theta) = \frac{v_1^T v_2}{\|v_1\| \|v_2\|} = \frac{\bar{v}_1^T J v_2}{\|J \bar{v}_1\| \|J v_2\|} = \frac{\bar{v}_1^T \bar{v}_2}{\|\bar{v}_1\| \|\bar{v}_2\|} \quad (2.64)$$

上式で、(2.63) から第一基本量に関して  $E = G$ ,  $F = 0$  を用いた。これは、2.2.2 項で示した等角写像に他ならず、共形写像とはパラメータ空間と接空間で角度を保存するような写像である。また、 $x$  が共形写像であるときその逆写像  $x^{-1}$  も共形写像であることは明らかであろう。

ここで、メッシュの径数付けについて考える。メッシュの径数付けとは、写像  $y: M \subset \mathbb{E}^3 \rightarrow \bar{M} \subset \mathbb{R}^2$  を定めることであった。このとき写像  $y$  として共形な写像を定めることができれば、 $M$

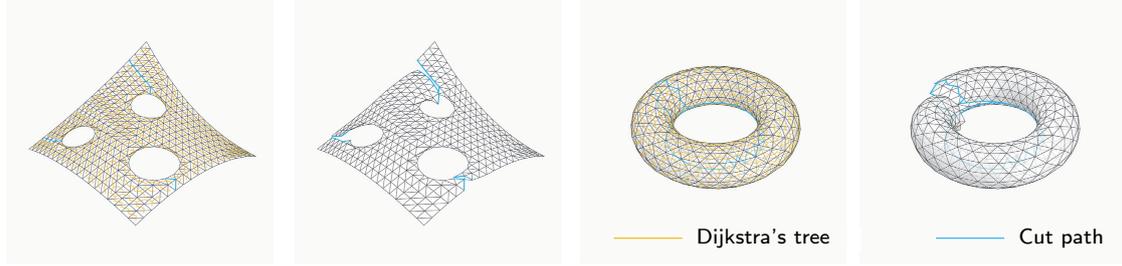


図2-4 ダイクストラツリーによるメッシュの分解

と $\bar{M}$ の間で角度を保存することができ歪みの少ない径数付けを定めることができる。すでに示したように、写像 $\mathbf{y}$ が共形写像であるためには、 $M$ が円板と位相同型である必要があるが、一般に $M$ はこのような性質を満たさない。そこで、メッシュの径数付けでは、共形写像による径数付けを定めるために次の手順を採用することが多い。

1.  $M$ を円板と位相同型な部分メッシュ $M_i$ (チャート)に分割
2. 部分メッシュ $M_i$ を径数付け

$M$ を部分メッシュ $M_i$ (チャート)に分割する方法としてダイクストラツリーを用いる方法(図2-4)などがあるがここでは深く触れない。本項では、部分メッシュ $M_i$ の径数付けについてのみ整理する。よって、次項以降では $M$ そのものが円板と位相同型であることを前提とする。

### 2.3.3.2 区分線形写像の性質

$M$ 上の三角形 $T$ 上で定義される線形写像 $\mathbf{y}_T$ を考える。 $T = (\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k)$ とし、次に定める基底ベクトルにより正規直交な局所座標系 $(X, Y)$ を $T$ に定める(図2-5(a))。

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i}{\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\|}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{n}(T) \times \mathbf{X} \quad (2.65)$$

三角形 $T$ は写像 $\mathbf{y}_T$ により $\bar{M} \subset \mathbb{R}^2$ 上の三角形 $\bar{T}$ に写る。 $\bar{T}$ の3頂点の座標が定めれば $T$ 上の点と $\bar{T}$ 上の点を対応させる写像 $\mathbf{y}_T$ が定まる。そこで、 $\mathbb{R}^2$ の座標系を $(u, v)$ とし、3頂点 $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k$ の対応点を $\mathbf{u}_i = (u_i, v_i), \mathbf{u}_j = (u_j, v_j), \mathbf{u}_k = (u_k, v_k)$ としたときの写像 $\mathbf{y}_T$ を考える。 $T$ 上の点 $\mathbf{p}$ の局所座標表示を $\tilde{\mathbf{p}} = (X, Y)$ として(2.65)の基底ベクトルを用いれば、3頂点 $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k$ は次のように表せる。

$$\mathbf{p}_i = [\mathbf{X} \ \mathbf{Y}] \tilde{\mathbf{p}}_i + \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{p}_j = [\mathbf{X} \ \mathbf{Y}] \tilde{\mathbf{p}}_j + \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{p}_k = [\mathbf{X} \ \mathbf{Y}] \tilde{\mathbf{p}}_k + \mathbf{p}_i \quad (2.66)$$

また、 $T$ 上の点 $\mathbf{p}$ は重心座標 $(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k)$ により次のように表せる。

$$\mathbf{p} = \lambda_i \mathbf{p}_i + \lambda_j \mathbf{p}_j + \lambda_k \mathbf{p}_k \quad (2.67)$$

(2.66)を代入することで(2.67)は次のように変形される。

$$\mathbf{p} = (\lambda_i X_i + \lambda_j X_j + \lambda_k X_k) \mathbf{X} + (\lambda_i Y_i + \lambda_j Y_j + \lambda_k Y_k) \mathbf{Y} + \mathbf{p}_i \quad (2.68)$$

つまり、 $\mathbf{p}$ の局所座標 $\tilde{\mathbf{p}} = (X, Y)$ は次のように表せる。

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \lambda_i \tilde{\boldsymbol{p}}_i + \lambda_j \tilde{\boldsymbol{p}}_j + \lambda_k \tilde{\boldsymbol{p}}_k \quad (2.69)$$

重心座標が満たすべき条件 $\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k = 1$ を考慮して(2.69)と連立することで、重心座標と局所座標の関係が次のように得られる。

$$\begin{bmatrix} \lambda_i \\ \lambda_j \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \frac{1}{2|T|} \begin{bmatrix} Y_j - Y_k & X_k - X_j & X_j Y_k - X_k Y_j \\ Y_k - Y_i & X_i - X_k & X_k Y_i - X_i Y_k \\ Y_i - Y_j & X_j - X_i & X_i Y_j - X_j Y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

ここで $|T|$ は三角形 $T$ の面積である。 $T$ 上の点 $\boldsymbol{p}$ に対応する $\bar{T}$ 上の点を $\boldsymbol{u} = (u, v)$ とすると、(2.61)に示した重心座標の対応関係から $\boldsymbol{u}$ は次のように表せる。

$$u = \lambda_i u_i + \lambda_j u_j + \lambda_k u_k, \quad v = \lambda_i v_i + \lambda_j v_j + \lambda_k v_k \quad (2.71)$$

(2.71)に(2.70)を代入することで、

$$u(X, Y) = \frac{1}{2|T|} [X \ Y \ 1] \begin{bmatrix} Y_j - Y_k & Y_k - Y_i & Y_i - Y_j \\ X_k - X_j & X_i - X_k & X_j - X_i \\ X_j Y_k - X_k Y_j & X_k Y_i - X_i Y_k & X_i Y_j - X_j Y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

$$v(X, Y) = \frac{1}{2|T|} [X \ Y \ 1] \begin{bmatrix} Y_j - Y_k & Y_k - Y_i & Y_i - Y_j \\ X_k - X_j & X_i - X_k & X_j - X_i \\ X_j Y_k - X_k Y_j & X_k Y_i - X_i Y_k & X_i Y_j - X_j Y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \end{bmatrix}$$

(2.72)により、 $T$ 上で定義される線形写像 $\boldsymbol{y}_T = (u(X, Y), v(X, Y))$ が、 $T$ の3頂点の $\mathbb{R}^2$ 上の対応点の座標により表された。次に、両式の勾配ベクトルを求めると、

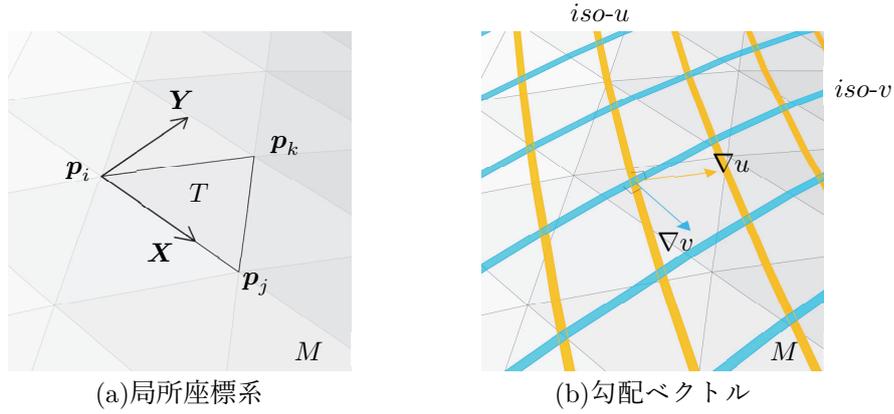
$$\nabla u = \frac{1}{2|T|} \begin{bmatrix} Y_j - Y_k & Y_k - Y_i & Y_i - Y_j \\ X_k - X_j & X_i - X_k & X_j - X_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} := M_T \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

$$\nabla v = \frac{1}{2|T|} \begin{bmatrix} Y_j - Y_k & Y_k - Y_i & Y_i - Y_j \\ X_k - X_j & X_i - X_k & X_j - X_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \end{bmatrix} := M_T \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \end{bmatrix}$$

この勾配ベクトルは $T$ 上の定ベクトルである。ここで、この勾配ベクトルの意味を考えると、増分ベクトル $\Delta = (\Delta X, \Delta Y)$ に対して、 $u$ の増分 $\Delta u$ は線形性から以下のように得られる。

$$\Delta u = u(X + \Delta X, Y + \Delta Y) - u(X, Y) = \langle \nabla u, \Delta \rangle \quad (2.74)$$

つまり、 $\nabla u \perp \Delta$ を満たす増分ベクトル $\Delta$ に対して $u$ は変化せず定値となるので、 $T$ 上で $\nabla u$ に直交する方向の直線は $iso-u$ 曲線に対応することがわかる。 $v$ 方向に関しても同様であり、 $\nabla v$ に直交する方向の直線は $iso-v$ 曲線に対応する。(2.73)が表す方向は、アイソパラメータ方向との関係を与える(図2-5(b))。

図 2-5 線形写像  $y_T$ 

### 2.3.3.3 LSCM

LSCM 法では、等角性を条件として写像  $\mathbf{y}$  を定める。連続系における等角写像の条件は  $\exists f: S \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{I} = fId \Leftrightarrow E = G, F = 0$  である。つまり、パラメータ方向の接ベクトルのノルムが等しくかつ直交していればよい。三角形メッシュ上では、(2.73) で示した  $T$  上のベクトル  $\nabla u$  および  $\nabla v$  に直交する方向が  $T$  上のアイソパラメータ曲線方向に一致する。よって、 $\mathbf{y}_T$  が等角性を満たすためには以下が成り立てばよい。

$$\|\nabla u\| = \|\nabla v\|, \quad \nabla u \perp \nabla v \quad (2.75)$$

(2.72) において、 $\nabla u$  および  $\nabla v$  は  $T$  上の正規直交な局所座標系で表示されているので、 $T$  上の反時計回りの 90 度回転により (2.75) は次のように整理される。

$$\nabla v = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \nabla u \quad (2.76)$$

メッシュ上のすべての三角形  $T$  において (2.76) が満たされるような写像  $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}_T\}$  を求めれば  $\mathbf{y}$  は等角写像となる。連続系においてこのような写像が位相に関するある条件下で常に存在することについて 2.3.3.1 項で触れたが、離散系ではこれは厳密には成立しない。これは、三角形メッシュ上で隣接する三角形  $T_1, T_2$  とその対応三角形  $\bar{T}_1, \bar{T}_2$  を考えれば明らかである。等角写像では角度が保存されるので、 $T_1 \propto \bar{T}_1, T_2 \propto \bar{T}_2$  であるが、 $T_1, T_2$  は 1 辺を共有するので両三角形の相似関係を表すスケール係数は等しくなる。すべての三角形でこの関係が成立するとき、この写像は等長写像である。つまり、三角形メッシュでは等長写像と等角写像は等しく、すべての三角形  $T$  において (2.76) が満たされるような写像  $\mathbf{y}$  は可展面に対してのみ存在する。そこで、任意の曲面に対しては、(2.76) の残差ノルムを最小化する問題を考える。最小化すべきエネルギーは次のようになる。

$$E_{LSCM} = \sum_{T=(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k)} |T| \left\| M_T \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_T \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (2.77)$$

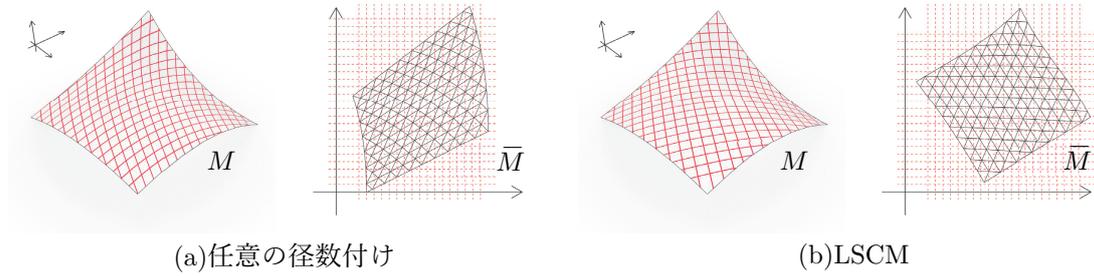


図 2-6 LSCM による径数付け

(2.77)は(2.76)の残差ノルムの二乗和である。この関数は二次関数であるので最適解を 1 回の線形計算により求めることができるが、 $\bar{M} \subset \mathbb{R}^2$ に関する $\mathbb{R}^2$ 上の剛体変換の自由度を考慮して、少なくとも 2 点の座標をあらかじめ決定することで線形方程式を正則化する必要があることに注意する。ここで得られる最適解 $\mathbf{u}_1 = (u_1, v_1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (u_2, v_2)$ , ...,  $\mathbf{u}_V = (u_V, v_V)$ により $\bar{M}$ が定まり写像 $\mathbf{y}$ が定まる(図 2-6)。

### 2.3.3.4 MIPS

MIPS 法も LSCM 法と同様に等角性を条件として写像 $\mathbf{y}$ を定める。連続系における等角写像の条件は $\exists f: S \rightarrow \mathbb{R}, I = fId \Leftrightarrow \sigma_1 = \sigma_2$ である。ここで、 $\sigma_1, \sigma_2$ は第一基本形式Iの特異値である。連続系と同様に写像 $\mathbf{y}_T$ のヤコビアン $J_T$ は次のようになる。

$$J_T = \begin{bmatrix} \nabla u^T \\ \nabla v^T \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

このヤコビアンを用いて、連続系と同様に第一基本形式Iを定めれば次が得られる。

$$I_T = J_T^T J_T \quad (2.79)$$

(2.79)による第一基本形式 $I_T$ の特異値を $\sigma_{T,1}, \sigma_{T,2}$ とすれば、その比率は次のように得られる。

$$\frac{\sigma_{T,1}}{\sigma_{T,2}} = \|J_T\|_2 \|J_T^{-1}\|_2 \quad (2.80)$$

特異値の比率が最小(=1)となれば $\sigma_{T,1} = \sigma_{T,2}$ となり等角性の条件を満たす。MIPS 法では(2.80)式の 2 ノルムをフロベニウスノルムで置き換え、次の関数を最小化する。

$$\begin{aligned} E_{MIPS} &= \sum_{T=(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k)} \|J_T\|_F \|J_T^{-1}\|_F \\ &= \sum_{T=(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k)} \frac{\text{trace}(I_T)}{\det(J_T)} \end{aligned} \quad (2.81)$$

LSCM 法と同様に、 $\bar{M} \subset \mathbb{R}^2$ に関する $\mathbb{R}^2$ 上の剛体変換の自由度を考慮して(2.81)を最小化することにより、最適解 $\mathbf{u}_1 = (u_1, v_1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (u_2, v_2)$ , ...,  $\mathbf{u}_V = (u_V, v_V)$ から $\bar{M}$ が定まり写像 $\mathbf{y}$ が定まる。(2.81)は非線形方程式であるので LSCM 法と比較して計算コストは非常に高い。

### 2.3.3.5 Mixed-Integer-Quadrangulation

*Mixed-Integer-Quadrangulation* 法(MIQ 法)は、三角形メッシュを四辺形メッシュに変換すること (*Quadrangulation*)を目的とする方法である。MIQ 法は大きく分けて次の2つのステップで構成されている。

1. メッシュ上の直交交差場の生成
2. 交差場に沿う径数付け

ここでは、径数付け部分に関してのみ整理する。メッシュ上の交差場については2.3.4項で詳細を述べるのでここでは詳細は扱わない。

メッシュ上の各フェースで2方向の接ベクトルにより交差方向 $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i, -\mathbf{v}_i, -\mathbf{w}_i\}$ が定まっているとする。MIQ 法は、メッシュ上の交差場にアイソパラメータ方向が一致するような径数付けを求めることを目的とする。 $\mathbf{v}_i$ がパラメータ空間の $u$ 軸方向、 $\mathbf{w}_i$ がパラメータ空間の $v$ 軸方向に対応すると仮定すると、パラメータ空間の $u$ 軸方向・ $v$ 軸方向はそれぞれメッシュ上の $iso-v$ 曲線方向・ $iso-u$ 曲線方向に対応するので、 $\mathbf{y}_{T_i}$ に関して次が成り立てばよい。

$$\|h\nabla u - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}_i\|^2 + \|h\nabla v - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i\|^2 = 0 \quad (2.82)$$

ここで、 $h$ は全体のスケーリング係数である。もし交差場が直交性を満たしているのであれば、 $\mathbf{w}_i = \text{Rot}_{90}(\mathbf{v}_i)$ なので、より簡単に次が成り立てばよい。

$$\|h\nabla u - \mathbf{v}_i\|^2 + \|h\nabla v - \mathbf{w}_i\|^2 = 0 \quad (2.83)$$

回転行列が省略されるとともに対応するベクトルも逆になることに注意する。よって、メッシュ全体で最小化すべきエネルギーが以下のように得られる。

$$E = \sum_{f_i \in \mathcal{F}} |T_i| (\|h\nabla u - \mathbf{v}_i\|^2 + \|h\nabla v - \mathbf{w}_i\|^2) \quad (2.84)$$

上式は(2.77)と同様に二次関数であり最適解を容易に求めることができるが、交差場 $\{\{\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i, -\mathbf{v}_i, -\mathbf{w}_i\} | f_i \in \mathcal{F}\}$ が特異点をもつ場合、追加の制約を設定する必要がある。制約を設定するためには、特異点を含むカットパス $P$ によって $M$ に切り込みを入れて得られる新たなメッシュ $M_c$ の径数付けを考えればよい。 $M_c$ はカットパス $P$ と重複するパス $P'$ を含み、両パスを境にして $M_c$ 上の交差場は対応する特異点の指数に応じて回転する。したがって、 $M_c$ を径数付けたときに得られる $\mathbb{R}^2$ 上のメッシュを $\bar{M}_c$ とし、 $\bar{M}_c$ 上のカットパスを $\bar{P}$ 、 $\bar{P}'$ とすれば、特異点の指数に応じて定まる回転数 $i$ に対して両パスは次の回転関係を満たす必要がある。

$$\bar{P}' = \text{Rot}_{90}^i(\bar{P}) \quad (2.85)$$

ここで、 $\text{Rot}_{90}^i$ は特異点回りの $i \times \pi/2$ 回転を表す。 $M_c$ を対象として、(2.85)の制約下で(2.84)を最小化することにより $\bar{M}_c$ が定まり径数付けを求めることができる。ここで示したカットメッシュを用いる方法は、 $M$ が円板と位相同型でない場合にも応用することができるが詳細については触れない。

### 2.3.4 離散曲面上の方向場

2.2.5 項において滑らかな曲面上の方向場について整理した。本項では [25] でモデル化された三角形メッシュ上のベクトル場について整理する。[25] ではベクトル場  $\mathbf{v}$  がモデル化されているが、本項では  $\|\mathbf{v}\| = 1$  とした方向場を前提として整理する。また、基本事項について整理したのち、[18] で示された本モデルの *N-RoSy* 方向場への拡張について整理する。

メッシュ上の方向場(またはベクトル場)には、メッシュ上の離散的な方向場の定義域に応じて、*face-based*, *edge-based*, *vertex-based* の3つのモデルが存在する [26]。ここで整理する方向場のモデルは *face-based* モデルであり、方向場  $\mathbf{v}$  は  $\mathbf{v}: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{E}^3$  となる。[25] では、このようにして定まるメッシュ上の離散的な方向場  $\mathbf{v}$  をメッシュ上で補間することでメッシュ上の連続な方向場を生成する。*face-based* モデルの定義域に対応する離散点として  $f \in \mathcal{F}$  に対応する三角形  $T_f$  の重心  $G(f)$  を用い、 $G(f)$  に  $T_f$  上の単位接ベクトルを対応させ  $\mathbf{v}(f)$  とする。 $T_f$  上の単位接ベクトル  $\mathbf{v}(f)$  は、 $T_f$  上の任意の正規直交な局所座標系  $(X, Y)$  による座標表示を用いて、次のように表すことができる。

$$\mathbf{v}(f) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

ここで、 $\theta$  は局所座標系の第一軸  $\mathbf{X}(f)$  と  $\mathbf{v}(f)$  のなす角である。一般に局所座標系の第一軸として  $T_f$  の適当な1辺に対応するベクトルが用いられる。ここで、頂点  $v_i, v_j$  間のエッジを  $e_{ij}$  とし、 $e_{ij}$  を共有するフェースを  $f, f'$  とする。この隣接するフェースの重心  $G(f), G(f')$  間の方向場を  $\mathbf{v}(f), \mathbf{v}(f')$  を用いて線形補間することを考える。 $e_{ij}$  の中点  $G(e_{ij})$  を経由する補間経路  $e_{ij}^*$  を考えると、この補間経路上での方向場の変化量の総量は角度  $\theta$  の変化量として次のように得られる。

$$\Delta\theta(e_{ij}^*) = \angle_{flat}(\mathbf{X}(f), \mathbf{X}(f')) + \theta(f') - \theta(f) + 2p(e_{ij}^*)\pi \quad (2.87)$$

ここで、 $\angle_{flat}(\mathbf{X}(f), \mathbf{X}(f'))$  はヒンジマップで展開したときの基準軸間の角度、 $p(e_{ij}^*) \in \mathbb{Z}$  は *period jump parameter* として定義されるパラメータであり、ベクトルの回転対称性から、経路上で  $2\pi$  回転に対する自由度が存在することを考慮したパラメータである。補間経路が直線であれば、この増分  $\Delta\theta$  から  $\mathbf{p} = (1-t)G(f) + tG(f')$  での角度が  $\theta(\mathbf{p}) = \theta(G(f)) + t\Delta\theta$  で得られるが、補間経路  $e_{ij}^*$  は一般に直線ではない。そこで、中点までの補間比率  $\alpha$  を次のように定義する。

$$\alpha := \frac{h(G(f), G(e_{ij}))}{H(G(f), G(f'))} \quad (2.88)$$

これは、ヒンジマップで平面展開したときの線分  $G(f)G(e_{ij})$  と線分  $G(f)G(f')$  を適当な直線に射影したときの長さの比率である。この  $\alpha$  を用いて、前半経路  $(G(f) \sim G(e_{ij}))$  上の点  $\mathbf{p} = (1-t)G(f) + tG(e_{ij})$  での角度が次のように得られる。

$$\theta(\mathbf{p}) = \theta(G(f)) + t\alpha\Delta\theta \quad (2.89)$$

つまり、 $G(f) \sim G(e_{ij})$  までの間に全増分  $\Delta\theta$  の  $\alpha$  倍が変化することになる。後半経路  $(G(e_{ij}) \sim G(f'))$  上の点に関しても全増分  $\Delta\theta$  の  $(1-\alpha)$  倍の増分を対応させることで角度が得られる。以上で、隣接するフェースの重心間の補間経路上での方向場が定まった。この重心間で補間

された方向場をさらにフェース上に拡張することでフェース上の全点で補間された方向場が定まり、メッシュ上の方向場が定まる。ここでは、メッシュ全域の方向場は必要としないので詳細は扱わない。次に、モデル化された方向場の特異点を考える。頂点 $v_i$ とその近傍 $\mathcal{N}(v_i)$ を考え、 $v_j \in \mathcal{N}(v_i)$ に対してエッジ $e_{ij}$ の双対エッジ $e_{ij}^*$ をつないでできる閉経路を $\Omega(v_i)$ とする。 $\Omega(v_i)$ を構成する各双対エッジが、(2.87)での隣接するフェース重心間の補間経路に対応することは明らかであろう。このとき $v_i$ の特異点指数が次のように得られる。

$$\begin{aligned} I(v_i) &= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{e^* \in \Omega(v_i)} \Delta\theta(e^*) + A_d(v_i) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{v_j \in \mathcal{N}(v_i)} \angle_{flat}(\mathbf{X}(f), \mathbf{X}(f')) + A_d(v_i) \right) + \sum_{v_j \in \mathcal{N}(v_i)} p(e_{ij}^*) \end{aligned} \quad (2.90)$$

ここで、 $f, f'$ はエッジ $e_{ij}$ に隣接するフェースを表す。第1項はメッシュの幾何学的性質のみから定まる量であり、メッシュ上の方向場に依存しない量である。ここで、連続系での *turning number*(2.54)および特異点指数(2.57)と(2.90)の関係を考える。まず、エッジ $e_{ij}$ と $e_{ij}$ を共有するフェース $f, f'$ を考えて、(2.53)を曲率定値として回転角に置き換えて変形すると、

$$\theta_{d,g,ij} = \theta(f') - \theta(f) - \theta_{\gamma,g,ij} + 2p(e_{ij}^*)\pi \quad (2.91)$$

ここで(2.87)と同様に、*period jump* 値を導入した。 $\theta_{\gamma,g,ij}$ はダルブー標構の総回転角であるので、基準軸の回転角と考えられ $\angle_{flat}(\mathbf{X}(f), \mathbf{X}(f'))$ に等しい。(2.54)を $\gamma = \Omega(v_i)$ とし曲率定値として考えれば、

$$T_d(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{v_j \in \mathcal{N}_1(v_i)} \theta_{d,g,ij} - \varphi \right) \quad (2.92)$$

ここで、 $\varphi$ は経路 $\gamma$ の曲率の積分であるがメッシュ上の頂点回りの閉経路であることを考慮すると $p_i$ まわりの内角総和に等しい。つまり、*Angle defect*  $A_d$ を導入すれば以下のように表せる。

$$\varphi = 2\pi - A_d(v_i) \quad (2.93)$$

(2.57)に(2.92)、(2.93)を適用すると、 $v_i$ の特異点指数が次のように得られる。

$$\begin{aligned} I(v_i) &= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{v_j \in \mathcal{N}(v_i)} \theta_{d,g,ij} - 2\pi + A_d(v_i) \right) + 1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{v_j \in \mathcal{N}(v_i)} \theta_{\gamma,g,ij} + A_d(v_i) \right) + \sum_{v_j \in \mathcal{N}(v_i)} p(e_{ij}^*) \end{aligned} \quad (2.94)$$

これは(2.90)に等しく、(2.57)と(2.90)が連続 - 離散対応していることが確かめられる。次に *RoSy* 方向場への拡張を考える。 $2\pi/N$ の回転対称性をもつ単位ベクトルの集合 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$ を $f \in$

$\mathcal{F}$ の重心 $G(f)$ に対応させる。エッジ $e_{ij}$ を共有する隣接フェース間の角度の増分式(2.87)が次のように拡張される。

$$\Delta\theta(e_{ij}^*) = \angle_{flat}(\mathbf{X}(f), \mathbf{X}(f')) + \theta(f') - \theta(f) + \frac{2\pi}{N}p(e_{ij}^*) \quad (2.95)$$

この増分式を補間式(2.88)に適用すれば、 $N$ -RoSy 方向場での隣接するフェース間の補間式が得られる。(2.90)と同様の計算により、 $N$ -RoSy 方向場の特異点指数が次のように得られる。

$$I(v_i) = \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{v_j \in \mathcal{N}(v_i)} \angle_{flat}(\mathbf{X}(f), \mathbf{X}(f')) + A_d(v_i) \right) + \sum_{v_j \in \mathcal{N}(v_i)} \frac{p(e_{ij}^*)}{N} \quad (2.96)$$

$N$ -RoSy 方向場の場合、 $I(v_i)$ は整数値ではなく $1/N$ の整数倍となる。以上で、メッシュ上の  $N$ -RoSy 方向場に対する補間式および特異点指数が導かれた。

## 2.4 自由曲面のパネリング手法

建築工学における自由曲面のパネリング問題では、意匠・構造・生産などのさまざまな工学的側面から、パネリング曲面 $\tilde{S} = \bigcup \tilde{S}_i$ に制約が生じる。特に、プロジェクトごとに指定されるパネル材料によって製造可能なパネルの形状が制約されるため、パネル $\tilde{S}_i$ の形状が制約される。そこで本節では、パネル $\tilde{S}_i$ の形状に基づきパネリング曲面を分類し、それぞれのモデルに関連する事項を整理する。

### 2.4.1 パネルの形状に基づく分類

パネルの形状は様々な指標で分類できるが、本節では2つの指標(外形線・曲率)を用いてパネルを評価しパネリング曲面を分類する。まず、パネルの外形線の頂点数に基づいて、パネリング曲面を(A)三角形モデル(B)四角形モデル(C)任意多角形モデル(混合モデルを含む)の3つに分類する(図 2-7)。ここでは、実例の多い三角形モデルと四角形モデルの特徴を比較する。両モデルの特徴を次に示す。

[三角形モデル]

- 任意の分割レイアウトの下ですべてのパネルを平面で定義できる
- 1 節点に集まる分割線が平均 6 本
- 分割線の数が多い( $\|\mathcal{E}\| \approx 3\|\mathcal{V}\|$ )

[四角形モデル]

- 任意の分割レイアウトの下ではパネルを平面で定義できない
- 1 節点に集まる分割線が平均 4 本
- 分割線の数が少ない( $\|\mathcal{E}\| \approx 2\|\mathcal{V}\|$ )

まず、三角形モデルは、任意の曲面・任意の分割レイアウトの下ですべてのパネルを平面で定義可能であるため、任意の曲面に対して平面パネルのみを用いたパネリング曲面を容易に求め

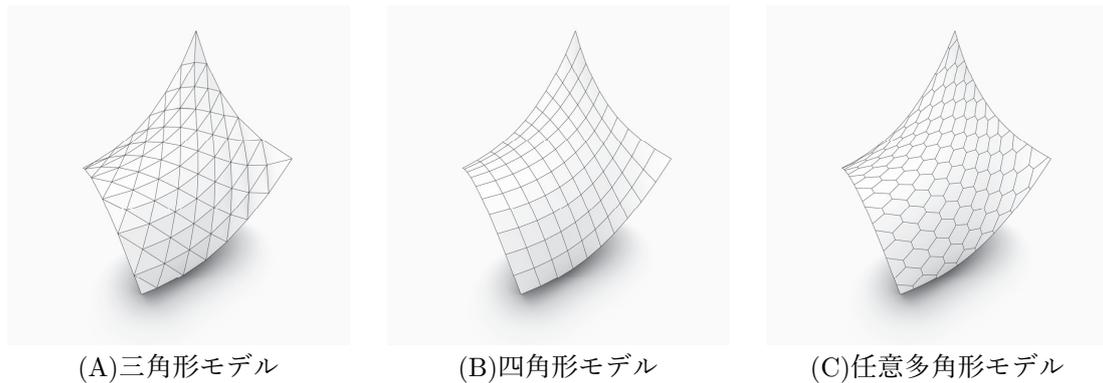


図 2-7 外形線によるモデルの分類

ることができる。平面パネルは、成型に特殊な工程を必要とせず安価かつ迅速に製造できるため、平面パネルのみを用いたパネリング曲面はパネルの製造コストや工数の観点で優れたパネリング曲面となる。これに対して、四角形モデルは、任意の曲面・任意の分割レイアウトの下ではすべてのパネルを平面で定義することが不可能であるため、一般的に平面パネルのみを用いたパネリング曲面は実現できない(図 2-9)。このとき、曲面パネルの製造が必須となるが、曲面パネルはパネル製造に型枠製作や切削などの特殊な工程を含むため、平面パネルと比較して大幅にパネル製造コストが増大する。一般的なコストの制約下で多数かつ多種類の曲面パネルを製造することは困難であるので、自由曲面に対して四角形モデルが用いられることは少なかった。すべてのパネルを平面で定義可能なパネリング曲面を自然に求めることができる回転面や推動曲面などの曲面(i.e. 古典的曲面)に限り、四角形モデルが用いられてきた [27]。次に、両モデルの分割線に関する特徴を比較すると、三角形モデルでは 1 節点に集まる分割線が平均 6 本であるのに対して、四角形モデルでは平均 4 本である。パネリング曲面では分割線に沿ってパネル支持部材が配置されるため、1 節点に集まる分割線が多いモデルでは接合部の形状が複雑になり、支持部材および接合部の製造コストが高くなる(図 2-8)。特に、支持部材を曲面全体の主構造材とするグリッドシェル構造としてパネリング曲面を設計する場合、構造材接合部の複雑さがコストの観点で重要な要因となる [7]。次に、分割線の総数を比較すると、三角形モデルは四角形モデルと比較してパネリング曲面全体で分割線の総数が多くなる傾向がある。分割線に沿って支持部材が配置されるため、パネリング曲面全体の重量の増加や外観上の問題を引き起こしやすい。両モデルの比較をまとめると次のように結論付けることができる。

[自由度] 三角形モデル > 四角形モデル

[品質] 三角形モデル < 四角形モデル

[コスト] 三角形モデル > 四角形モデル (四角形モデルが曲面パネルとなる場合)

三角形モデルが設計の自由度に優れる一方で、四角形モデルはパネリング曲面としての品質に優れる。許容コストの制約下で四角形モデルを設計することができれば、質の高いパネリング曲面を実現できる。

次に、パネルの曲率に基づいて、パネリング曲面を(a)平面モデル(b)単曲率モデル(c)複曲率モデルの 3 つに分類する(図 2-10)。ここでは混合モデルは対象としない。それぞれのモデルの特徴



図 2-8 三角形モデルの支持部材接合部(MyZeil Shopping Mall)

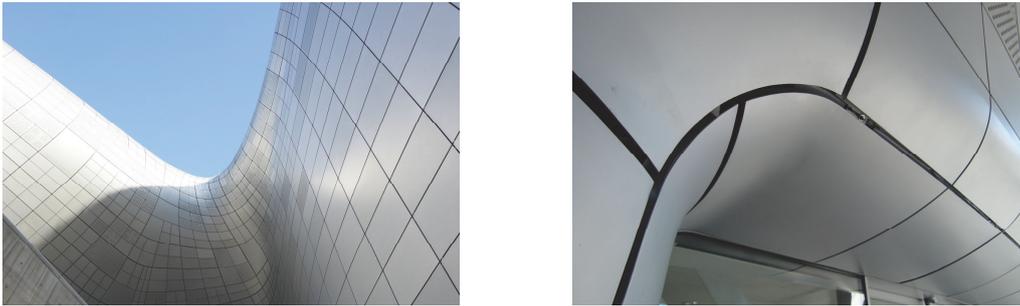


図 2-9 四角形モデルでの曲面パネルの利用(Dongdaemun Design Plaza)

を次に示す。

[平面モデル]

- $\forall \tilde{S}_i, \kappa_1 = 0 \text{ and } \kappa_2 = 0$
- すべてのパネル材料で特殊な成型工程が不要
- 三角形モデル以外では分割レイアウトが限られる

[単曲率モデル]

- $\forall \tilde{S}_i, (\kappa_1 = 0 \text{ and } \kappa_2 \neq 0) \text{ or } (\kappa_1 \neq 0 \text{ and } \kappa_2 = 0)$
- 曲げ変形可能な材料であればすべてのパネルを平面パネルの曲げ変形により成型可能
- 分割レイアウトが限られる

[複曲率モデル]

- $\forall \tilde{S}_i, \kappa_1 \neq 0 \text{ and } \kappa_2 \neq 0$
- 全てのパネルで型枠を用いた成型や切削による成型が必要
- 分割レイアウトに制約がない

まず、平面モデルはすべてのパネルが平面で定義されたモデルである。すでに述べたように、平面パネルは曲面パネルと比較して安価かつ迅速に製造できるため、パネルの製造コストや工数の観点で優れたパネルング曲面となる。一方で、三角形モデル以外のモデルでは、任意の分割レイアウトの下では平面モデルを構成できず分割レイアウトの自由度は低い。次に、単曲率モデルはすべてのパネルが可展面で定義されたモデルである。可展面は平面と等長対応する曲面であり、平面状態から伸び変形およびせん断変形を伴わない純粋な曲げ変形のみで曲面形状を生成することができる。つまり、金属板など曲げ変形可能なパネルを用いる場合、平面パネルの曲げ変形による成型が可能であるので効率的なパネル製造が可能である。また、曲げ変形による成

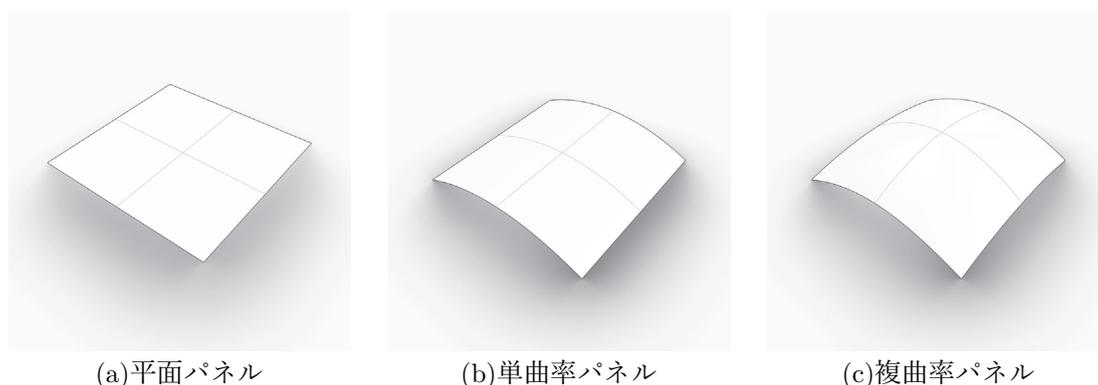


図 2-10 曲率によるモデルの分類

型が不可能で型枠による成型が必要となるパネル材料の場合でも、曲げ変形を利用して型枠を製作することで型枠の製作を大幅に効率化することができる。平面モデルと比較すると、パネルの製造工程がやや煩雑でありコスト面や製造効率の面で劣るが、それぞれのパネルが曲率をもった曲面であり、より滑らかなパネリング曲面となるため意匠的に優れる。設計の自由度の観点では、平面モデルと同様に、任意の分割レイアウトの下では単曲率モデルを構成できないため、分割レイアウトの自由度は低い。最後に、複曲率モデルはすべてのパネルが非可展な曲面で定義されるモデルである。このモデルでは、すべての曲面パネルで型枠を用いた成型や切削による成型が必須となる。複曲率をもつ曲面形状は複雑であるため、いずれの成型方法でもパネルの製造工程は煩雑になり、パネルの製造コストは大幅に増加する。パネルの製造コストを抑制するためには、必要となる型枠の数を削減するなど、パネルの製造効率を高めることが求められる。一方で、すべてのパネルが複曲率をもつ曲面であるため、他のモデルよりも滑らかで意匠的に優れるパネリング曲面となるとともに、分割レイアウトの制約をもたず自由度も高い。以上、全モデルの比較をまとめると次のように結論付けることができる。

[自由度] 平面モデル  $\approx$  単曲率モデル  $\ll$  複曲率モデル

[品質] 平面モデル  $<$  単曲率モデル  $\ll$  複曲率モデル

[コスト] 平面モデル  $>$  単曲率モデル  $\gg$  複曲率モデル

以上で、2つの指標(外形線・曲率)に基づきパネリング曲面が分類された。本研究が目的とするパネリング曲面(\*) (1.3節参照)は、(B)四角形モデルおよび(b)単曲率モデルに含まれるモデルである。すでに述べたように、単曲率モデルはすべてのパネルが可展面となるモデルであるが、四角形モデルと組み合わせることで、各パネルの4境界曲線のうち2曲線を直線とすることが可能であり、隣接する4パネルのうち2つのパネル間の接続を容易に扱うことが可能である。本節では、次項以降、四角形モデルを前提とするパネリング法について、(a)~(c)のモデル別にさらに詳細に整理する。

## 2.4.2 四角形モデル

本項では、四角形モデルに関する基本的な事項について整理する。すでに述べたように、四角形モデルはすべてのパネル曲面の外形線が4頂点をもつ曲線であるパネリング曲面である。パ

ネリング曲面では、パネル曲面の外形線に沿って支持構造材が配置されるため、パネル曲面の外形線が構成する曲面全体の分割線は滑らかな曲線であることが意匠的・構造的に望ましい。対象とする曲面から滑らかな分割線をもつ四角形モデルを得るためには、曲面上の座標系を用いることが有効である [28]。2.2 節で述べたように、曲面は曲面片の集合として定められ、各曲面片は  $(u, v)$  を座標系とする  $\mathbb{R}^2$  上の領域  $\Omega$  で定義される写像  $\mathbf{x}: \Omega \rightarrow \mathbb{E}^3$  で定められるのであった。ここでは、簡単のために曲面が 1 つの曲面片で構成されるとし、曲面と曲面片を同一視すれば、曲面上の  $u$  方向 ( $v = v_1, v_2, \dots, v_{m-1} = \text{const.}$ ) および  $v$  方向 ( $u = u_1, u_2, \dots, u_{n-1} = \text{const.}$ ) の有限個のアイソパラメータ曲線が張るネットワークが曲面を分割し四角形モデルを導く (図 2-11)。このようにして得られる分割線が、写像  $\mathbf{x}$  の可微分性から滑らかな曲線となることは明らかであろう。つまり、与えられた曲面から滑らかな分割線をもつ四角形モデルを求めたい場合、何らかの座標系  $(u, v)$  による曲面の径数付け  $\mathbf{x}(u, v)$  を求めればよい。

2.3.3 項でも述べたように、滑らかな曲面は何らかの座標系を自然に備えている。CAD ソフトウェアで用いられる Nurbs 曲面や B-spline 曲面の場合も同様に、それらの曲面は基底関数が定める座標系を自然に備えている。つまり、滑らかな曲面が与えられるということは、何らかの座標系  $(u, v)$  による曲面の径数付け  $\mathbf{x}(u, v)$  とその定義域  $\Omega$  が与えられるということである。しかし、この自然に与えられる座標系が求めたい四角形モデルを導く座標系と一致することはまれであり、このとき、求めたい四角形モデルを導く別の座標系  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  および径数付け  $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u}, \tilde{v})$  を求める必要がある。ある座標系  $(u, v)$  により  $\mathbf{x}(u, v)$  として径数付けられた曲面  $S$  に対して、別の座標系  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  による径数付け  $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u}, \tilde{v})$  を求めることは、座標変換  $u = u(\tilde{u}, \tilde{v})$ ,  $v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$  を求めることである。求めたい四角形モデルを導く座標系  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  が満たすべき条件がこの座標変換を定めるので、求めたい四角形モデルがどのような座標系と対応するかが重要である。2.4.3 項や 2.4.4 項で整理するモデルは、2.2.4.2 項で述べた共役座標系と対応するモデルである。

座標系  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  が満たすべき条件が座標変換  $u = u(\tilde{u}, \tilde{v})$ ,  $v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$  を定めるが、任意の曲面・任意の径数付けに対して、この座標変換を解析的に求めることは困難である。このような場合、座標変換そのものを求めるのではなく、座標系  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  のアイソパラメータ曲線を数値解析的に求めることが有効である。座標系が満たすべき条件をアイソパラメータ曲線が満たすべき条件に置き換え、数値積分などを用いて有限個のアイソパラメータ曲線を求めればよい。これは、前述のように、有限個のアイソパラメータ曲線のネットワークが求めれば四角形モデルを導けるためである。2.4.3 項や 2.4.4 項で整理する方法でも、共役座標系が満たすべき条件をアイソパラメータ

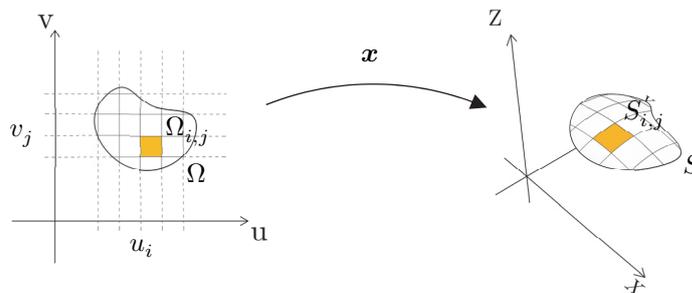


図 2-11 座標系と四角形モデル

タ曲線の接ベクトルが満たすべき共役条件に置き換え、共役座標系のアイソパラメータ曲線を数値積分により求める方法が用いられている。

### 2.4.3 平面モデル

本項では、すべてのパネルが平面によって定義可能な平面モデルに関して整理する。まず、平面モデルと曲面上の共役座標系との関係について整理したのち、平面モデルを求める既往手法について整理する。

離散微分幾何学や形状処理工学において、四辺形メッシュの中ですべてのフェースが平面性を満たすメッシュを特に *Planar Quadrilateral Mesh* (PQ メッシュ) と呼ぶ。改めてその定義を示せば、

**定義 2-18** メッシュ  $M = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$  に関して、すべての  $f \in \mathcal{F}$  が四辺形かつ平面であるとき、メッシュ  $M$  を PQ メッシュという。

ここで、連続な曲面  $S \subset \mathbb{E}^3$  とその曲面の離散モデルとして得られる四辺形メッシュ  $M$  を考える。曲面  $S$  に対する離散モデルとしての四辺形メッシュ  $M$  は、四辺形メッシュとしての構造  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$  をもち、すべての頂点  $v_i \in V$  の埋め込みによる像  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{E}^3$  が  $S$  の十分近くにあるようなメッシュと定義できる。ここで、“十分近くにある”とは“十分な細分割により  $S$  上に収束する”と考える。つまり、 $S$  の離散モデル  $M$  を求める問題は、四辺形メッシュとしての構造  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$  と  $S$  に収束するような埋め込み写像  $\mathbf{x}: V \rightarrow \mathbb{E}^3$  を求める問題となる。特に、PQ メッシュによる離散モデル  $M_{PQ}$  を求める場合は、すべてのフェースが平面となるような埋め込み写像を求める問題となる。

$S$  の離散モデル  $M_{PQ}$  を求める方法は、 $S$  と平面の交点を逐次求めていく方法などさまざま考えられるが、メッシュエッジが滑らかに配列されたフェアなメッシュを求めることは容易ではない。滑らかな分割線をもつ四角形モデルが曲面  $S$  の座標系を用いることで得られることを 2.4.2 項で述べたが、ここでも同様に、曲面  $S$  からフェアな四辺形メッシュを求めるためには、 $S$  の何らかの径数付け  $\tilde{\mathbf{x}}(u, v)$  に従って  $S$  を離散化することが有効である [28]。このとき、メッシュの埋め込み写像  $\mathbf{x}$  は次のように定義できる(図 2-12)。

$$\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{x}(v_{ij}) := \tilde{\mathbf{x}}(i\Delta u, j\Delta v) \quad (2.97)$$

ここで、 $i, j \in \mathbb{Z}$  であり、 $\mathbf{x}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$  となる。この離散化によって得られるメッシュが離散幅  $\Delta u \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0$  の極限において曲面  $S$  に収束し離散モデルとしての条件を満たすことは明らかであろう。2.4.2 項でも述べたように、曲面上の座標系に基づいて四角形モデルを求める場合、求めたい四角形モデル(ここでは PQ メッシュ)が曲面のどのような座標系に対応するかが重要であるが、本項で扱う PQ メッシュは、2.2.4.2 項で述べた曲面上の共役座標系に対応することが知られている [29]。これは、共役座標系で径数付けられた曲面を(2.97)に従って離散化することで PQ メッシュが導かれることを意味する。ここでは、[28]を参照して、共役座標系がもつ幾何学的性質について整理し、共役座標系が PQ メッシュを導く根拠を改めて整理する。まず、

$\tilde{\mathbf{x}}(u, v)$ により径数付けられた曲面 $S$ を $\mathbf{p}_0 = \tilde{\mathbf{x}}(u_0, v_0) \in S$ において二次近似することを考える。このとき、近似曲面 $S_q$ は次のように径数付けられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_q(u, v) = & \tilde{\mathbf{x}}(u_0, v_0) + \tilde{\mathbf{x}}_u(u_0, v_0)(u - u_0) + \tilde{\mathbf{x}}_v(u_0, v_0)(v - v_0) \\ & + \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{x}}_{uu}(u_0, v_0)(u - u_0)^2 + 2\tilde{\mathbf{x}}_{uv}(u_0, v_0)(u - u_0)(v - v_0) \\ & + \tilde{\mathbf{x}}_{vv}(u_0, v_0)(v - v_0)^2) \end{aligned} \quad (2.98)$$

ここで $\mathbf{x}_q(u_0, v_0)$ から3点 $\mathbf{x}_q(u, v_0)$ ,  $\mathbf{x}_q(u_0, v)$ ,  $\mathbf{x}_q(u, v)$ への3ベクトルが張る平行6面体の体積 $V$ を求めると、

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{6} \left( (\tilde{\mathbf{x}}_u \times \tilde{\mathbf{x}}_v) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{uv} \Delta u^2 \Delta v^2 + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{x}}_{uu} \times \tilde{\mathbf{x}}_v) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{uv} \Delta u^3 \Delta v^2 + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{x}}_u \times \tilde{\mathbf{x}}_{vv}) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{uv} \Delta u^3 \Delta v^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (\tilde{\mathbf{x}}_{uu} \times \tilde{\mathbf{x}}_{vv}) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{uv} \Delta u^3 \Delta v^3 \right) \end{aligned} \quad (2.99)$$

ここで、 $\Delta u = u - u_0$ ,  $\Delta v = v - v_0$ とした。 $\tilde{\mathbf{x}}(u, v)$ が共役座標系による径数付けである場合、命題2-5より、すべての点 $\mathbf{p} \in S$ で $M = 0$ であるので、 $\tilde{\mathbf{x}}_{uv} \in \text{span}(\tilde{\mathbf{x}}_u, \tilde{\mathbf{x}}_v)$ であり、(2.99)の第1項は0となる。よって、体積 $V$ に関して、次が得られる。

$$V = \begin{cases} o(\Delta^4) & \text{if } (u, v) \text{ is a conjugate coordinate system} \\ o(\Delta^3) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.100)$$

これは、共役座標系から得られる4点 $\mathbf{p}_0 = \tilde{\mathbf{x}}(u_0, v_0)$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}(u_0 + \Delta u, v_0)$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}(u_0, v_0 + \Delta v)$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ が張る四辺形が、任意の座標系から得られる4点 $\mathbf{p}_0 = \tilde{\mathbf{y}}(u_0, v_0)$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}(u_0 + \Delta u, v_0)$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}(u_0, v_0 + \Delta v)$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ が張る四辺形と比較して、より高次に平面であることを意味する。共役座標系がもつこの性質がPQメッシュを導くことは明らかであろう。ここで示した共役座標系とPQメッシュの関係から明らかであるが、共役座標系に基づく離散化(2.97)で得られる四辺形メッシュは離散化によって生じる誤差を含むため厳密には平面性を満たさない。PQメッシュの厳密解を求める場合は、最適化問題などを利用して離散化によって生じる誤差を解消する必要がある [29] [30] [31]。

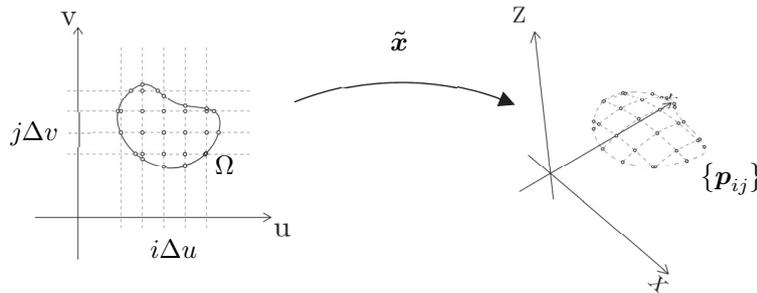


図 2-12 埋め込み写像の離散化

ここから、PQメッシュを求める具体的な既往手法について整理する。与えられた曲面に対して何らかの共役座標系による径数付けを定めることができれば、(2.97)によってPQメッシュが得られるのであった。任意の曲面に対して、この径数付けを解析的に求めることが困難であることはすでに述べたが、推動曲面や回転面などの一部の性質の良い曲面では、曲面が自然にもつ座標系が共役座標系となる。対象とする曲面を推動曲面や回転面を用いて近似し、得られた近似曲面を直接離散化することでPQメッシュを求める方法が提案されている [7] [27]。当該手法で求まるPQメッシュは、対象曲面を良く近似するPQメッシュであるが、対象曲面の厳密な離散モデルではないことに注意する。対象とする曲面の厳密な離散モデルとしてPQメッシュを得る手法として [32] [29] [30] [33] [31]などがあげられる。[32]は与えられた曲面(離散曲面を含む)から四辺形メッシュを求めることを目的とした手法である。任意の曲面において、臍点を除く全点で曲率線座標系が一意に定まることを利用して、この座標系のアイソパラメータ曲線から四辺形メッシュを求める。2.2.4.2項で述べたように、曲率線座標系は共役座標系の1つであるので、ここで求まる四辺形メッシュはPQメッシュとなる。[29]では、与えられた四辺形メッシュからPQメッシュの厳密解を求める手法が示されている。メッシュフェースの平面性やメッシュエッジのフェアネスを評価する関数を定め、PQメッシュを導く最適化問題を定式化している。この最適化問題は非線形最適化問題であり、収束性の観点から、適用可能な四辺形メッシュに限界がある。最適解近傍の四辺形メッシュやフェース数の少ない四辺形メッシュを初期解としたときにのみ適切な収束解が得られるため、初期解として [32]で得られるメッシュを用いる方法や細分割アルゴリズムと最適化問題を組み合わせた方法などが示されている。[30]では、[29]で示された最適化問題の初期解として任意の共役座標系を離散化して得られる四辺形メッシュを用いる方法が示されている。対象とする曲面上の共役曲線ネットワーク(i.e., 共役座標系のアイソパラメータ曲線が張るネットワーク)から初期解となる四辺形メッシュを求める。この方法は、均質な共役曲線ネットワークを求めることが困難であるなど共役曲線ネットワークの制御性に欠点をもつ。[33]は、滑らかな曲面上の共役曲線ネットワークを求める問題を、離散曲面上の共役場を求める問題として扱い、共役条件下で非直交交差場のディリクレエネルギーを最小化することで離散曲面上の共役場を求める方法を提案している。[31]は、[33]と同様に離散曲面上の共役場を求めるが、[33]で扱うことができない特異点指数 $\pm 1/4, \pm 3/4, \dots$ の特異点を含む共役場を求めることができる。[34]は、四辺形メッシュの中点細分割で得られるメッシュ(チェッカーボードパターン)を利用して、メッシュ頂点でのエッジ交角が全頂点で等しいPQメッシュを求める最適化問題を定式化している。

ここまで述べた既往手法は、ある曲面が与えられたとき、その曲面を良く近似するまたはその曲面の厳密な離散モデルとなるPQメッシュを求める手法である。これに対して、PQメッシュを直接モデリングする手法も存在する。[29] [30]では、細分割アルゴリズムの中にPQメッシュの厳密解を求める最適化問題を組み込んだモデリング手法が提案されている。細分割と最適化を逐次繰り返すことで、最適解を安定して求めることが可能となる。[35]では、PQメッシュの条件を満たす *Marionette Mesh* と呼ばれるメッシュが提案されている。*Marionette Mesh* は2方

向からの立面曲線によって制御される。[36]では、キルヒホッフシェル要素の特性を用いて PQ メッシュをモデリングする方法が提案されている。これらの PQ メッシュを直接モデリングする手法は、表現できる曲面に限界がある一方で、対象を近似することを目的とした手法と比較すると、安定して高速に PQ メッシュを生成することが可能である。

#### 2.4.4 単曲率モデル

本項では、すべてのパネルが可展面によって定義可能な単曲率モデルに関して整理する。まず、単曲率モデルを構成する可展面に関する基本的な事項について簡単に整理したのち(詳細は 4.2 節参照)、単曲率モデルと曲面上の共役座標系の関係について整理する。最後に、単曲率モデルを求める既往手法について整理する。

可展面は直線の 1 パラメータ族である線織面に属する曲面であり、柱面・錐面・接線曲面を滑らかに繋ぎ合わせた曲面である(図 2-13)。可展面が面内に含む直線を線織(*Ruling*)と呼ぶ。線織面の中で可展面を特徴付ける条件はガウス曲率 $K = 0$ であり、可展面の法ベクトルは線織に沿って定ベクトルとなる。この性質から可展面は平面の 1 パラメータ族の包絡面という性質をもつ。

すべてのパネルが可展面で定義される単曲率モデルを考える場合、平面モデルと異なりパネル境界でのパネリング曲面の連続性を考慮する必要がある。平面モデルの場合は、すべてのパネルが $G^0$ 連続に接続されたパネリング曲面(=四辺形メッシュ)を前提としたが、ここではパネル境界の連続性として、 $G^0$ 連続/ $G^1$ 連続の 2 つの連続性を想定する。すでに述べたように可展面はその面内に直線を含むため、接続する境界曲線に応じて満たすことのできる連続性が異なる。2 つの異なる可展面を $G^1$ 連続に接続する場合、線織に沿った接続が必須となる。これは、線織ではない曲線に沿って $G^1$ 連続に 2 つの可展面が接続できた場合、境界曲線に沿って接平面が共有されることになり本質的に 2 つの可展面は等しい可展面となるためである。 $G^0$ 連続に接続する場合は、境界曲線の形状が一致していればいずれの方向にも接続可能である。

ここで、複数の帯状の可展面を線織でない境界曲線に沿って $G^0$ 連続に接続して得られる区分的滑らかな曲面を考える。この区分的滑らかな曲面を連続する線織で分割することで、単曲率モデルが得られることは明らかであろう(自身も単曲率モデルである)。この単曲率モデルは、1 方向に $G^0$ 連続、もう 1 方向に $G^1$ 連続なパネリング曲面である。今、区分的滑らかな曲面を構成する可展面の離散モデルを $n \times 1$ の PQ メッシュ [29]として考えると、曲面全体で $n \times m$ の PQ メ

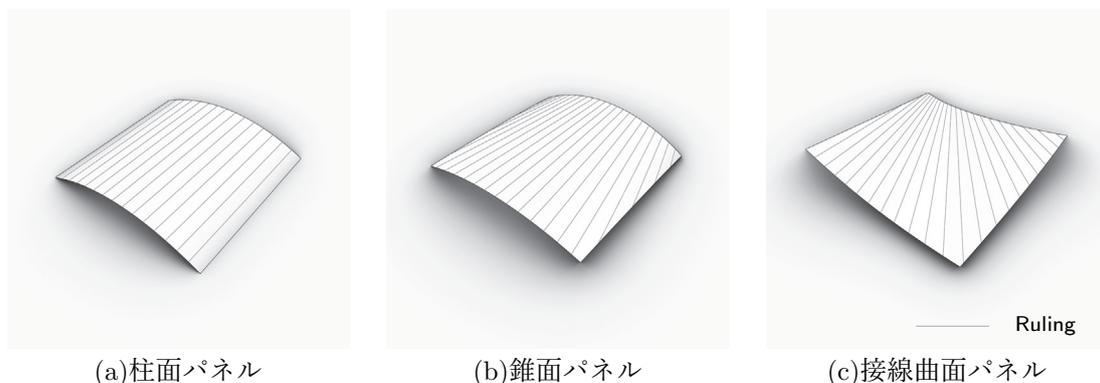


図 2-13 可展面パネルの分類

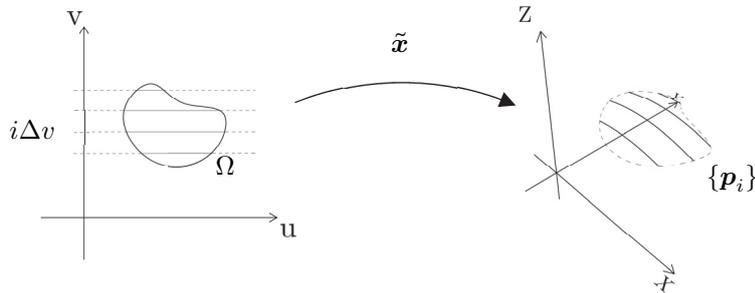


図 2-14 埋め込み写像の半離散化

ッシュが得られる。この PQ メッシュは、細分割数  $n \rightarrow \infty$  の極限において滑らかな可展面を  $G^0$  連続に接続した元の区分的滑らかな曲面に収束する [12]。この関係と、2.4.3 項で述べた PQ メッシュと共役座標系との関係を考慮すると、ここで考えた区分的滑らかな曲面は、ある曲面  $S$  上の共役座標系の半離散モデルとなる [12]。この半離散モデルは、曲面  $S$  の共役座標系による径数付け  $\tilde{\mathbf{x}}(u, v)$  に対して、一方の方向のみを離散化することで次のように表現できる(図 2-14)。

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{x}_i(u) := \tilde{\mathbf{x}}(u, i\Delta v) \quad (2.101)$$

ここで、 $i \in \mathbb{Z}$  であり、 $\mathbf{x}_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$  となる。このモデルは Developable Strip モデル(D-strip モデル)として定義されるモデル [12]である。この D-strip モデルに基づく単曲率モデルは、単曲率モデルの中で最も連続性の高いモデルであることは明らかであろう(2 方向に  $G^1$  連続は実現不可能)。与えられた曲面から単曲率モデルを求める場合、共役座標系の半離散化を用いることで性質の良いモデルを求めることができる。

ここから、単曲率モデルに関する具体的な既往手法について整理する。上述のように対象とする曲面の厳密な離散モデルとして単曲率モデルを求める方法は [12]に限られる。[12]では、[29][31]などを用いて得られる共役座標系のアイソパラメータ曲線を B-spline 形式で表し、曲線間に張られる線織面が可展面となるような最適化問題を解くことで単曲率モデルを得る。一方で、対象とする曲面を可展面または区分的可展面で近似する手法にはさまざまな手法が存在する。[37]は、三角形を帯状につなぎ合わせたメッシュ(三角形ストリップ)が平面展開可能であることを用いて、対象とするメッシュを三角形ストリップの集合で置換する。各ストリップを割り当てる対象メッシュ上の領域を求めるために、特徴線による領域分割を初期解として、各領域の幅を指定された幅以下まで縮小させることでストリップ状の領域に対象のメッシュを分割する。[38]は、対象メッシュ上の分割領域を逐次拡大させながら、各ステップで各領域を最良近似する円錐面を求めることで区分可展面を求める。[39]は、対象の領域分割が与えられていることを前提とし、各領域に対応する可展面を  $(1, n)$  の B-spline 曲面で表し、可展条件を強制約、近似・フェアリング条件を弱制約とした最適化問題を解くことで可展面または区分可展面を求める。[40]は、可展面が直交する測地線ネットワークにより特徴付けられるという性質に基づき、直交測地線ネットワークと離散対応する四辺形メッシュを生成することで可展面を生成する。本手法は、与えられた曲面に対する近似を目的とした手法ではなく可展面のモデリングを目的とした手法である。[41]は、三角形メッシュが可展面となる条件を、全頂点の 1-Ring 近傍にヒンジ

が存在するという条件として直接導き、このヒンジ条件を評価するエネルギーを最小化することで可展面または区分可展面を求める。[42]は、四辺形メッシュの midpoint 分割で得られるメッシュ(チェッカーボードパターン)を利用して、四辺形メッシュ間の等長対応関係を定量化し、平面上の四辺形メッシュと等長対応する四辺形メッシュを求めることで可展面を求める。[43]は、可展面のガウス写像が  $S^2$  上の 1 次元量(曲線)となることに着目し、与えられた曲面  $S$  の任意の分割で得られる各部分曲面のガウス写像の 2 次元的広がりを最小化することで、各部分曲面を近似可展面へと変形し近似的な区分可展面を求める。

これらの既往手法の中で、建築工学における曲面のパネリングに適した方法は、[12] [42] [43] であろう。[12]は、座標系に基づく分割であるためフェアな分割レイアウトが得られる。[42]や [43]は、求める可展面を近似可展面として緩和しているため、分割レイアウトの制約を受けにくく自由度の高い分割レイアウトが実現可能である。厳密な可展面が必要となる場合は [12]を、近似可展面が許容される場合はより自由度の高い [42]や [43]を用いればよい。

### 2.4.5 複曲率モデル

本項では、すべてのパネル曲面が非可展な曲面で定義される複曲率モデルに関して整理する。複曲率モデルは、任意の曲面パネルを包括する一般モデルであり、対象とする問題ごとに固有の指標が導入されることが一般的であるため、すべての問題で共通する指標は存在しない。本項では、主に、パネル曲面の反復性に関する事項について整理する。

双方向に曲率をもつ複曲率パネルは、型枠を用いた成型や切削による成型が必須となるため、平面パネルや可展面パネルと比較して、パネルの製造コストが大幅に増大する。特に、型枠を用いた成型を必要とする曲面パネルの場合、型枠の製作コストがパネルの製造コストに大きく影響する。ここで、型枠の繰返し利用による効率的なパネル製造を行うことができれば、全パネルの総製造コストを効果的に抑制することが可能となる。このようなパネル製造を可能とするためには、可能な限り少ない種類のパネルのみで構成されるパネリング曲面を求める必要がある。つまり、ここでは、パネルの反復性が重要な指標となる。

パネルの反復性を考慮したパネリング法は、[10]や [11]で提案されている。[10]では、使用するパネルを平面・柱面・放物面・トーラス・一般三次曲面に限定したパネリング法を提案している。パネリング問題は混合整数計画問題として定式化され、離散変数と連続変数を分解して扱う解法が示されている。離散変数を扱うステップでは、型枠に相当する型曲面を複数定義したのちに、パネル境界で許容されるギャップの範囲内で、各パネルの領域に型曲面を最大効率で割り当てていく。連続変数を扱うステップでは、離散変数を扱うステップで求めた型曲面の割り当ての下で、型曲面の形状パラメータとパネリング分割線を最適化変数として、パネル間の不連続量と対象曲面との誤差を最小化する最適化問題を解く。この手法は任意の曲面に適用可能であり汎用性が高い一方で、混合整数計画問題を解く必要があり計算コストが非常に大きい。[11]では、曲面の放物面近似とワインガルデン曲面を用いる方法が提案されている。ワインガルデン曲面は、主曲率に関して特殊な性質をもつ曲面であり次のように定義される。

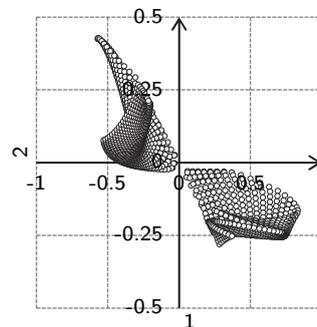
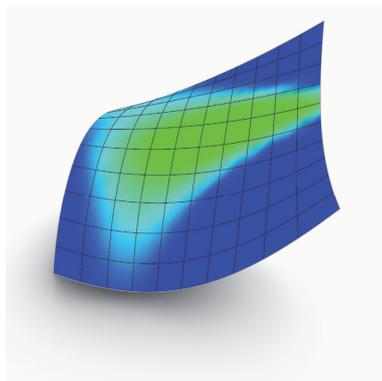
**定義 2-19** 曲面  $S$  の主曲率  $\kappa_1, \kappa_2$  に関するある関数  $F(\kappa_1, \kappa_2)$  が存在して、 $S$  の全域で  $F(\kappa_1, \kappa_2) = 0$  を満たすとき、曲面  $S$  をワインガルデン曲面という。

定ガウス曲率曲面( $\kappa_1\kappa_2 - C = 0$ )や定平均曲率曲面( $\kappa_1 + \kappa_2 - C = 0$ )はワインガルデン曲面の例である。上述の定義から明らかであるが、ワインガルデン曲面は主曲率に関して 1 次元量的な性質をもつ曲面である。一般の曲面  $S$  の場合、 $S$  上の点とその主曲率の順序対を対応させる写像  $f: S \rightarrow (\kappa_1, \kappa_2) \in \Omega$  を考えたとき、 $\Omega$  は  $\mathbb{R}^2$  上の 2 次元の広がりをもつ領域となる。これに対して、ワインガルデン曲面  $S$  の場合、 $\Omega$  は  $\mathbb{R}^2$  上の 1 次元的広がりをもつ領域(i.e., 曲線)となる(図 2-15)。つまり、ワインガルデン曲面上には、濃度が 1 でない連続な部分集合  $S_i = \{\mathbf{p} \in S | F(\kappa_1(\mathbf{p}), \kappa_2(\mathbf{p})) = 0\}$  が存在し、 $S = \cup S_i$  となる。この部分集合の存在がパネル曲面の反復性に大きな役割を果たす。

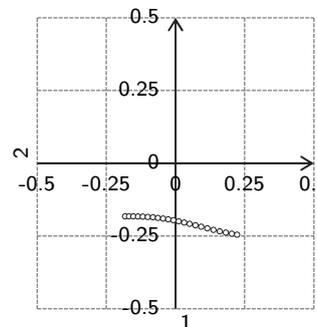
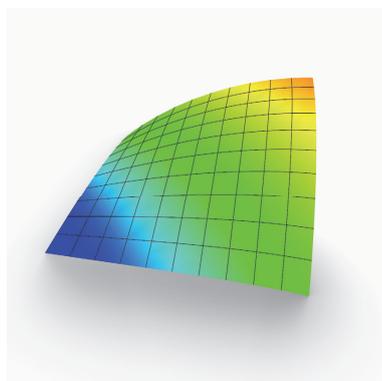
ここで、 $\mathbf{p} \in S$  で  $S$  に接する放物面を考える。 $\mathbf{p} \in S$  の主曲率座標系を  $(x, y, z)$  とし、 $\mathbf{p}$  で  $S$  に接する次の放物面  $\hat{S}$  を考える。

$$z = \frac{1}{2}\kappa_1x^2 + \frac{1}{2}\kappa_2y^2 \tag{2.102}$$

この放物面  $\hat{S}$  は  $\mathbf{p} \in S$  で  $S$  に接し、 $\mathbf{p}$  での主曲率方向および主曲率が  $S$  の主曲率方向および主曲率に一致する曲面である。つまり、放物面  $\hat{S}$  は  $\mathbf{p}$  の近傍で  $S$  を二次のオーダーまで近似する曲面であり、曲面上のある領域内で主曲率の変動が小さければ放物面  $\hat{S}$  は対象領域の十分良い近似を与える。一般的に、曲面のパネリング問題では、1 つのパネルに対応する曲面上の領域内における曲面の曲率変動は小さいため、放物面  $\hat{S}$  によりパネルを定義すれば、パネルは対象を良く近似する。(2.102) が定める放物面は、主曲率  $\kappa_1, \kappa_2$  にのみ依存するため、ワインガルデン曲面を放物面



(a)任意曲面

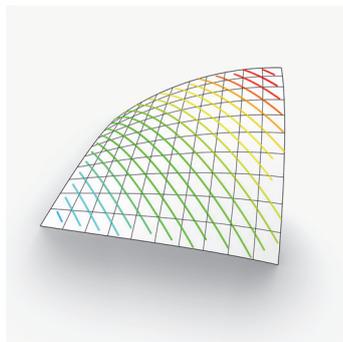


(b)ワインガルデン曲面

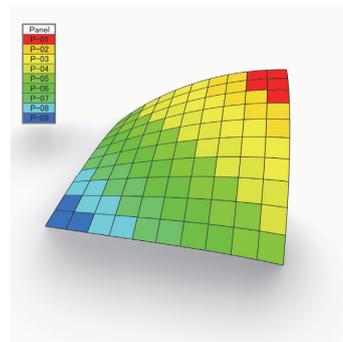
図 2-15 ワインガルデン曲面と主曲率

$\hat{S}$ で近似する場合、 $\forall \mathbf{p} \in S_i$ で同じ放物面 $\hat{S}_i$ により曲面が近似される。つまり、ワインガルデン曲面を放物面 $\hat{S}$ によりパネリングすることで、パネルの反復を促進することが可能となる(図2-16)。  
[11]では、パネル総数 $N$ 枚のパネリング曲面が約 $\sqrt{N}$ 種類のパネルで構成できることが数値解析により実験的に確認されている。さらに、[11]では、ワインガルデン曲面と等長変換を組み合わせることで、より自由度の高い曲面を実現するパネリング法も提案されている。

いずれの方法においても、得られるパネリング曲面は、パネル境界にギャップを生じる不連続なパネリング曲面となる。パネルの反復性を考慮する手法では、その形状に関する厳しい制約からパネル境界での連続性を保つことが困難であるため、パネリング曲面が不連続となることを許容する場合が多い。これは実際の設計においてパネル境界に配置されるサッシュやシールなどの接合部材によって、ある程度のギャップを吸収可能であるためである。それぞれの設計条件に応じて設定される不連続量の許容値を満たすようなパネリング曲面を求めればよい。



(a)  $(\kappa_1, \kappa_2)$ 等位線の分布



(b) 放物面パネルによるパネリング  
(等位線に沿ったクラスタリング)

図2-16 ワインガルデン曲面の放物面パネルによるパネリング

## 第3章 k-離散柱面モデル

### 3.1 概説

本章では、一般柱面の特殊な離散モデルとして要素反復性と連続性を考慮した $k$ -離散柱面モデルを定義し、任意の柱面を $k$ -離散柱面モデルにより離散化するアルゴリズムを定式化する。自由曲線を準線とする柱面を壁や屋根の形状に応用した建築は従来から存在し、ガラスやPCパネルなどさまざまな材料を用いて実現されている。これらの建築では、図3-1に示す準線の分割で得られる分割レイアウトによるパネリングが採用されることが一般的である。本章においても、この分割レイアウトを前提として一般柱面の離散モデルをモデル化する。

上述の分割レイアウトで柱面をパネリングする場合、準線の多角形化で得られるパネリング曲面(図3-1(b-1))を採用することが一般的である。このとき得られるパネリング曲面は平面モデルであるため、最もコスト面で優れたパネリング曲面である一方で、パネル接合部にクリースが生じ曲面の滑らかさが大幅に失われるため意匠面で理想的なパネリング曲面ではない。曲面の滑らかさを考慮した別のパネリング曲面として、準線の単純な分割で得られるパネリング曲面(図3-1(b-2))が考えられる。このパネリング曲面は対象曲面に一致し、意匠面で最も理想的な曲面であるが、すべてのパネルが曲面パネルとなるためコスト面で不利なパネリング曲面である。特に自由曲線を準線とする柱面の場合、すべてのパネルが形状の異なる曲面パネルとなるためパネルの製造コストは大幅に増加する。これらの既往手法の性質を考慮すると、パネルの製造コストを抑制し、かつ、連続性の高いパネリング曲面を実現するためには、(b-1)と(b-2)の中間的な位置付けとなるパネリング法が求められる。

パネリング曲面を連続性の側面で評価する場合、1.不連続 2. $G^0$ 連続 3. $G^1$ 連続の3つに分類して評価することが一般的である。1.不連続なパネリング曲面はパネル間にギャップを生じ、2. $G^0$ 連続なパネリング曲面はパネル間にクリースを生じるため、ともに滑らかでない曲面として評

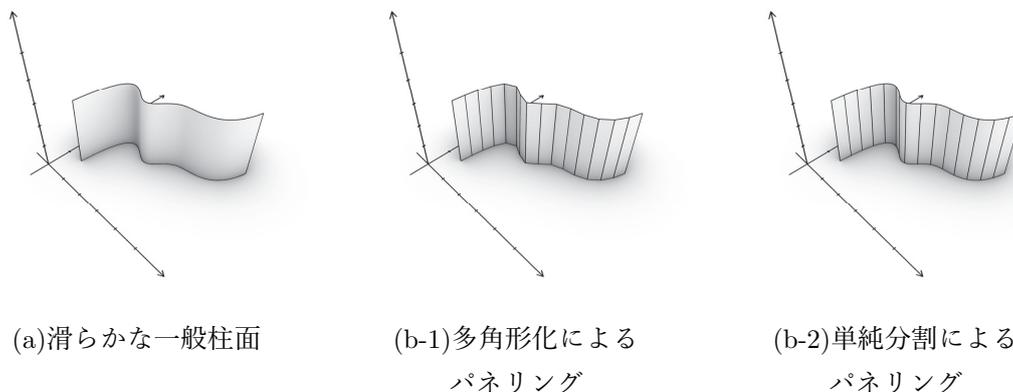


図3-1 柱面のパネリングレイアウト

価される。一方で、 $G^1$ 連続なパネリング曲面は滑らかな曲面として評価され、 $G^1$ 連続を超える高階な連続性は特別区別されない。つまり、連続性の高いパネリング曲面を目的とする場合、連続性の下限として $G^1$ 連続を設定すれば十分である。本章では、クリースのない滑らかなパネリング曲面を得るために、 $G^1$ 連続を連続性の下限として設定する。

$G^1$ 連続を連続性の下限として設定したことにより、曲面パネルが必須となる。2.4節で述べたように、曲面パネルは製造時に型枠を用いた成型や切削による成型など特殊な工程を要するため、平面パネルと比較して製造コストが非常に高い。特に、型枠による成型が必要となる場合、型枠の製作コストが全体コストに大きな影響を与える。このような場合、パネル製造に要する型枠数を低減しパネルの製造効率を高めることで、パネル全体の製造コストを効果的に抑制することが可能である。そこで、本章では、曲面パネルの製造コストを抑制するために、必要となる型枠数を制限することを条件として設定する。型枠数の制限により、限られた種類の形状のパネルのみでパネリング曲面を構成する必要が生じる。以上をまとめると、本章で設定する一般柱面のパネリング条件は以下のようになる。

$$\begin{array}{ll} \text{[意匠上の条件]} & G^1 \text{連続} \\ \text{[コスト上の条件]} & \text{限られた種類のパネルのみを用いる} \end{array} \quad \dots (*^3)$$

これらの条件を満たしたうえで、対象とする柱面を最良近似するパネリング曲面を求めることが本章の目的である。本章の構成は以下の通りである。まず、3.2節において、本節で示したパネリング条件を前提とした離散柱面モデルとそれらのモデルの構成に必要な平面曲線の離散モデルについて整理する。3.3節では、3.2節で定義した離散モデルによる柱面近似アルゴリズムについて述べる。3.4節では、3.3節で述べる近似アルゴリズムの数値解析例を示し、3.5節で結言を述べる。

## 3.2 準備

本節では、3.1節で示した条件(\*<sup>3</sup>)を満たすパネリング曲面を求めるために必要となる基本的な事項について整理する。まず3.2.1項において、本章で前提とする分割レイアウトに基づく離散柱面モデルの定義を示す。続いて3.2.2項において、平面曲線の離散モデルと arc spline 曲線との関係を導き、3.2.3項において arc spline 曲線の数式表現を整理する。最後に、3.2.4項において、セグメント種類に制約を設けた特殊な arc spline 曲線である  $k$ -arc spline 曲線の定義を示し、その数式表現を与える。

### 3.2.1 離散柱面モデル

本章で対象とする一般柱面は、任意の平面曲線を準線とする柱面であり、準線方向を  $u$  パラメータ、準線がのる平面に垂直な方向を  $v$  パラメータとして径数付けることができる。準線  $g$  の径数付けを  $g(u)$  とすると、柱面  $C$  は以下のように径数付けられる。

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{g}(u) + v\mathbf{z} \quad (3.1)$$

ここで、 $\mathbf{z}$  は準線  $g$  がのる平面に直交する単位ベクトルである。この径数付けに従えば、 $u$  方向

の離散化 $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ によって図 3-1 に示した分割レイアウトに基づく離散柱面が得られることは明らかであろう。これは、図 3-1 の分割レイアウトに基づく離散柱面の本質が準線 $g$ の離散モデルであることを意味する。よって、平面曲線 $g$ を準線とし線織方向を $z$ とする柱面 $C$ の離散モデル $\mathcal{C}$ を以下のように定義する。

**定義 3-1** 連続な柱面 $C$ の準線 $g$ に対してその離散モデルを $\{g_i\}$ としたとき、

$$\mathcal{C} = \{g_i + vz\}$$

により定まる直線の可算集合を柱面 $C$ に対する離散柱面モデル $\mathcal{C}$ という。

ここで、準線 $g$ の離散モデル $\{g_i\}$ が径数付け $g(u)$ の直接的な離散化で得られる点列 $\{g(u_i)\}$ である必要はないことに注意する。離散モデル $\{g_i\}$ は、十分な細分割によって準線 $g$ に収束するような点列であればよい(図 3-4)。

ここで、パネリング曲面を構成するパネルを扱うために、離散柱面モデル $\mathcal{C}$ の隣接する線分間の補間を考える。 $\mathcal{C}$ のすべての線分は平行であるので、線分間が柱面によって補間可能であることは明らかであろう。この補間により補間柱面 $\{C_{i,i+1}\}$ が生成されるとすると、柱面 $C_{i,i+1}$ は次のように径数付けられる。

$$\mathbf{x}_{i,i+1}(u, v) = \mathbf{g}_{i,i+1}(u) + vz \quad (u \in [0,1], v \in \mathbb{R}) \quad (3.2)$$

ここで、 $\mathbf{g}_{i,i+1}(u)$ は、 $\mathbf{g}_{i,i+1}(0) = \mathbf{g}_i$ 、 $\mathbf{g}_{i,i+1}(1) = \mathbf{g}_{i+1}$ を満たす平面曲線の径数付けであり、柱面 $C_{i,i+1}$ の準線 $g_{i,i+1}$ の径数付けに対応する。つまり、離散柱面モデル $\mathcal{C}$ を柱面で補間することは、準線 $g$ の離散モデル $\{g_i\}$ を平面曲線で補間することに他ならない。このとき得られる補間曲面 $\tilde{C} = \bigcup C_{i,i+1}$ の連続性が、補間曲線 $\tilde{g} = \bigcup g_{i,i+1}$ の連続性に等しいことは明らかであろう。また、この曲面 $\tilde{C}$ が本章で対象とするパネリング曲面(図 3-1)そのものであることも明らかであろう。

ここで、3.1 節でパネリング曲面に設定した条件(\*<sup>3</sup>)を考える。 $\tilde{C}$ が $G^1$ 連続かつ限られた種類の柱面のみで構成される曲面であるとき、 $\tilde{C}$ は条件(\*<sup>3</sup>)を満たす。 $\tilde{C}$ がこのような曲面であるためには、補間曲線 $\tilde{g}$ が $G^1$ 連続かつ限られた種類(<セグメント総数)のセグメントのみから構成される曲線であればよい。曲線の離散モデルの中で、このような補間曲線をもつことが可能なモデルを $k$ -離散モデルとして次のように定義する。

**定義 3-2** 滑らかな曲線 $g$ の離散モデル $\{g_i\}$ が、

$$\exists \mathcal{G} = \{g^j: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid j \in \Omega = \{0, \dots, k-1\}\}, \exists \mathcal{R} = \{R_{i,i+1} \in SO(3)\}, \exists \mathcal{V} = \{v_{i,i+1} \in \mathbb{R}^3\}, \forall i, \exists \xi, \eta \in \Omega,$$

$$\mathbf{g}_{i-1} = R_{i-1,i}(\mathbf{g}^\xi(0)) + v_{i-1,i}$$

$$\mathbf{g}_i = R_{i-1,i}(\mathbf{g}^\xi(1)) + v_{i-1,i} = R_{i,i+1}(\mathbf{g}^\eta(0)) + v_{i,i+1}$$

$$\mathbf{g}_{i+1} = R_{i,i+1}(\mathbf{g}^\eta(1)) + v_{i,i+1}$$

$$R_{i-1,i}(\dot{\mathbf{g}}^\xi(1)) = R_{i,i+1}(\dot{\mathbf{g}}^\eta(0))$$

を満たすとき、離散モデル $\{g_i\}$ を $k$ -離散モデルという。ここで、 $\dot{\mathbf{g}}$ は写像 $g$ の微分ベクトルであり $g$ の接ベクトルを表す。

本章のように平面曲線のみを考える場合は、 $g^j$ の値域を曲線がのる平面 $\Pi$ に限定すればよい。 $k$ -離散曲線は $k$ 種類のセグメントにより $G^1$ 補間可能な点列である。この $k$ -離散曲線を用いることで、条件(\*<sup>3</sup>)を満たす離散柱面モデルが特に $k$ -離散柱面モデルとして次のように定義される。



図 3-2 離散柱面モデルと離散準線モデル

**定義 3-3** 連続な柱面  $C$  の準線  $g$  に対してその  $k$ -離散モデルを  $\{g_i\}$  としたとき、

$$C = \{g_i + vz\}$$

により定まる直線の可算集合を柱面  $C$  に対する  $k$ -離散柱面モデル  $\mathcal{C}$  という。

本章の目的は、柱面  $C$  に対する  $k$ -離散柱面モデルの中で、柱面  $C$  を最良近似する離散柱面を求めることである。その定義から明らかに、この問題は、柱面  $C$  の準線  $g$  に対する  $k$ -離散モデルの中で準線  $g$  を最良近似する離散曲線を求めることと等価である。そこで、本章ではこれ以後、準線  $g$  (つまり平面曲線) のみを考察の対象とする。

### 3.2.2 平面曲線の離散モデルと arc spline 曲線

3.2.1 項において曲線の特殊な離散モデルとして  $k$ -離散モデルを定義した(定義 3-2)。本項では、対象曲線を平面曲線に限定したとき、この離散モデルの 1 つが、対象曲線の曲率の離散化から得られることを示す。本項では、平面曲線を対象とするので空間を  $\mathbb{R}^2$  に限定して議論する。

まず、曲率の離散化から曲線の離散モデルが得られることを示す。弧長径数  $s$  により  $\mathbf{p}(s) \in \mathbb{R}^2$  として径数付けられた平面曲線  $g$  を考える。 $\mathbf{p}(s)$  の  $s$  に関する微分は  $g$  の単位接ベクトルを与える。この単位接ベクトルを  $\mathbf{e}_1(s)$  とし、 $\mathbf{e}_1(s)$  を半時計回りに  $\pi/2$  回転して得られる単位ベクトルを  $\mathbf{e}_2(s)$  とすれば、 $\mathbf{e}_1(s)$  および  $\mathbf{e}_2(s)$  は曲線上の正規直交な標構を定める。これをフレネ枠と呼ぶ。正規直交性から次の関係が成り立つ。

$$[\mathbf{e}'_1(s) \quad \mathbf{e}'_2(s)] = [\mathbf{e}_1(s) \quad \mathbf{e}_2(s)] \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

ここで、 $\kappa(s)$  は曲線上のスカラー関数であり曲線の曲率を表す。(3.3) は平面曲線に関するフレネの公式と呼ばれる。(3.3) は常微分方程式であり、曲率  $\kappa(s)$  が定まれば境界条件の自由度を除いてフレネ枠が一意に定まることを意味する。 $\mathbf{e}_1(s) = \mathbf{p}'(s)$  の関係から、ここでも同様に  $\mathbf{e}_1(s)$  が定まれば境界条件の自由度を除いて  $\mathbf{p}(s)$  が一意に定まるので、(3.3) は曲率  $\kappa(s)$  が定まれば境界条件の自由度を除いて平面曲線  $\mathbf{p}(s)$  が一意に定まることを意味する。これは平面曲線の基本定理として次のように整理される。

**定理 3-1** 曲率  $\kappa(s)$  が定まれば合同変換に関する自由度を除いて平面曲線は一意に定まる。

次に、平面曲線 $g$ の離散モデル $\{g_i\}$ を考える。一般的に、微分方程式の解に対する離散モデルを考える場合、図3-3に示す対応関係を満たすことが重要である [44]。つまり、平面曲線の離散モデルを考える場合、(3.3)の離散化により得られる離散曲線(点列)が、離散幅 $\Delta s \rightarrow 0$ の極限において(3.3)の一般解に収束すればよい。そこで、曲線 $p(s)$ の定義域を $[0, \bar{s}]$ としてこの定義域を $n$ 等分して離散化することを考える。区間 $[s_i, s_{i+1}]$ で曲率が $\kappa_i = \kappa(s_i) = const.$ であると仮定すれば(3.3)から次の関係が導ける。

$$e_1''(s) = -\kappa_i^2 e_1(s) \tag{3.4}$$

この微分方程式の解は次のように得られる。

$$e_1(s) = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_i s + \theta_i) \\ \sin(\kappa_i s + \theta_i) \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

ここで、 $\theta_i$ は境界条件から定まる積分定数である。上式を $s$ に関して積分することで区間 $[s_i, s_{i+1}]$ における曲線 $p_i(s)$ が次のように得られる。

$$\begin{aligned} p_i(s) &= \int_{s_i}^s e_1(s) ds + g_i \\ &= \frac{1}{\kappa_i} \begin{bmatrix} \sin(\kappa_i s + \theta_i) \\ -\cos(\kappa_i s + \theta_i) \end{bmatrix} + g_i + \frac{1}{\kappa_i} \begin{bmatrix} -\sin(\kappa_i s_i + \theta_i) \\ \cos(\kappa_i s_i + \theta_i) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.6}$$

ここで、 $g_i$ は境界条件から定まる積分定数であり曲線 $p_i(s)$ の始点である。上式は点 $g_i$ を $C_i = g_i + 1/\kappa_i[-\sin(\kappa_i s_i + \theta_i) \cos(\kappa_i s_i + \theta_i)]$ を中心として回転させて得られる軌跡を表しており、区間 $[s_i, s_{i+1}]$ における曲線 $p_i(s)$ が $C_i$ を中心とする半径 $1/\kappa_i$ の円弧であることを意味する。各区間で(3.5)、(3.6)を求める際に用いる境界条件が連続であることを仮定すれば、区間 $[0, \bar{s}]$ で $G^1$ 連続に接続された $n$ 個の円弧が得られる。この曲線は、*arc spline* 曲線 [45]に等しく、平面曲線の曲率 $\kappa = \kappa(s)$ の離散化による離散的なフレネの公式から *arc spline* 曲線(厳密には *arc spline* 曲線によって補間可能な点列)が得られることを意味する。この曲線を離散曲線(i.e., 点列)として解釈すれば、点列 $\{g_i\}$ は(3.6)から次の関係を満たす。

$$g_{i+1} = p_i(s_{i+1}) = g_i + \frac{1}{\kappa_i} \begin{bmatrix} \sin(\kappa_i s_{i+1} + \theta_i) - \sin(\kappa_i s_i + \theta_i) \\ -\cos(\kappa_i s_{i+1} + \theta_i) + \cos(\kappa_i s_i + \theta_i) \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

次に、この点列が離散幅 $\Delta s \rightarrow 0$ の極限において(3.3)の一般解に収束することを示す。終点 $g_n$

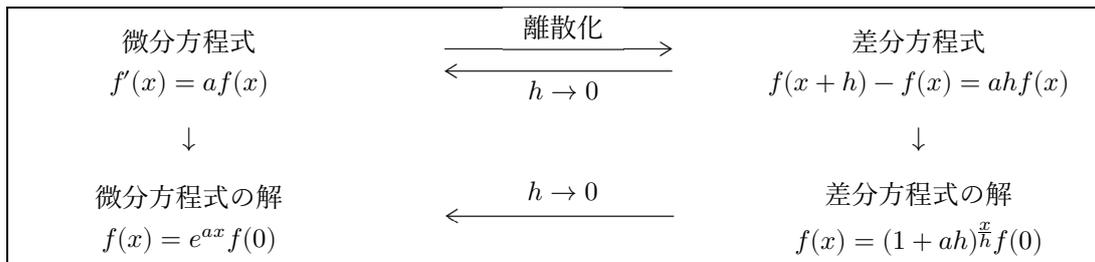


図 3-3 微分方程式と離散モデル [44]

が曲線の終点 $\mathbf{p}(\tilde{s})$ に収束することを示せばよい。終点 $\mathbf{g}_n$ は曲線の始点 $\mathbf{g}_0 = \mathbf{p}(0)$ から(3.7)を順次適用することで次のように得られる。

$$\mathbf{g}_n = \mathbf{g}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\kappa_i} \begin{bmatrix} \sin(\kappa_i s_{i+1} + \theta_i) - \sin(\kappa_i s_i + \theta_i) \\ -\cos(\kappa_i s_{i+1} + \theta_i) + \cos(\kappa_i s_i + \theta_i) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

上式はテイラー展開を用いて次のように変形される。

$$\mathbf{g}_n = \mathbf{g}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \begin{bmatrix} \Delta s \cdot \cos(\kappa_i s_i + \theta_i) + o(\Delta s^2) \\ \Delta s \cdot \sin(\kappa_i s_i + \theta_i) + o(\Delta s^2) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

ここで、(3.3)の境界条件として $\mathbf{e}_1(0) = [\cos\theta_0, \sin\theta_0]$ が与えられているとすると、各区間で境界条件が連続であることを仮定したので、(3.5)を順次適用することで $\theta_i$ は次のように得られる。

$$\theta_i = \theta_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \kappa_j \Delta s - \kappa_i s_i \quad (3.10)$$

(3.10)を(3.9)に代入して次が得られる。

$$\mathbf{g}_n = \mathbf{g}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \begin{bmatrix} \Delta s \cdot \cos\left(\theta_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \kappa_j \Delta s\right) + o(\Delta s^2) \\ \Delta s \cdot \sin\left(\theta_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \kappa_j \Delta s\right) + o(\Delta s^2) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

(3.11)は $\Delta s \rightarrow 0$ の極限で次に収束する。

$$\mathbf{g}_n = \mathbf{g}_0 + \int_0^{\tilde{s}} \begin{bmatrix} \cos\left(\theta_0 + \int_0^s \kappa(s) ds\right) \\ \sin\left(\theta_0 + \int_0^s \kappa(s) ds\right) \end{bmatrix} ds \quad (3.12)$$

これは、(3.3)式の解曲線 [46]の $s = \tilde{s}$ における点に一致するので、離散曲線 $\{\mathbf{g}_i\}$ は対象曲線に収束する。以上の議論により、平面曲線 $g$ の曲率を離散化することで得られる離散曲線 $\{\mathbf{g}_i\}$ が離散幅 $\Delta s \rightarrow 0$ の極限で対象曲線に収束すること、および、離散曲線 $\{\mathbf{g}_i\}$ が円弧により $G^1$ 補間可能

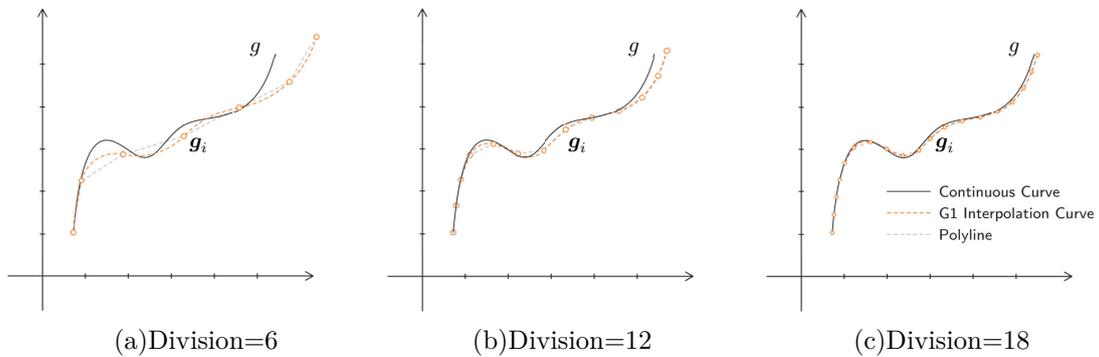


図 3-4 離散モデルの収束

であることが示せた(図 3-4)。

次に、ここで導かれた離散モデルがk-離散モデルとなる条件を考える。離散曲線 $\{g_i\}$ は一般的に点列の補間に $k = n$ 種類の円弧を要するが、このとき $k < n$ であればk-離散モデルの条件を満たす。この条件を満たすためには、ある濃度kの実数集合 $M = \{\kappa^0, \kappa^1, \dots, \kappa^{k-1}\}$ が存在して、(3.4)で用いた各区間 $[s_i, s_{i+1}]$ の定曲率 $\kappa_i$ が $\kappa_i \in M$ を満たせばよいが、このようにして定める定曲率 $\kappa_i$ は離散曲線としての収束条件を満たす必要がある。離散曲線としての収束条件は、 $\Delta s \rightarrow 0$ (つまり $n \rightarrow \infty$ )の極限で(3.11)が(3.12)に収束することであった。今、通常離散モデルを導く定曲率を $\kappa_i (= \kappa(s_i))$ とし、集合 $M$ から設定される定曲率を $\tilde{\kappa}_i$ とすれば、 $k \rightarrow n$ の極限で $\tilde{\kappa}_i \rightarrow \kappa_i$ となるように、集合 $M$ およびセグメント集合 $A$ との対応関係 $\lambda: A \rightarrow M$ が定まっていれば、 $\tilde{\kappa}_i$ が導く離散曲線は $\kappa_i$ が導く離散曲線に収束するので、 $\Delta s \rightarrow 0$ の極限で対象曲線に収束する。よって、 $k \rightarrow n$ の極限で $\tilde{\kappa}_i \rightarrow \kappa_i$ を満たす定曲率 $\tilde{\kappa}_i$ が導く離散曲線は、平面曲線のk-離散モデルとなる。

以上で、平面曲線の曲率の離散化により得られる離散モデルの補間曲線が arc spline 曲線に一致すること、および、その離散モデルがk-離散モデルとなるための離散化における条件が導かれた。本章ではこれ以後、ここで導かれた離散モデル(i.e., arc spline 曲線によって補間可能な離散モデル)を求めるべき離散モデルとする。

### 3.2.3 Arc spline 曲線

本項では、3.2.2 項で導かれた曲率の離散化から得られる平面曲線の離散モデルの自然な補間曲線である arc spline 曲線について整理する。

Arc spline 曲線は、円弧セグメントまたは直線セグメントを $G^1$ 連続に接続した曲線として定義され、CNC 加工機のツールパスへの応用を主な目的として CAD 分野で広く研究されてきた。Arc spline 曲線をツールパスとして応用した場合、直線セグメントのみで構成されるパスと比較して、加工機の挙動安定性・加工効率・加工精度において多くの利点がある [47] [48]。CAD ソフトウェア上で Nurbs 形式や B-spline 形式で定義された曲線を arc spline 曲線に置換するために、離散点列を対象とした arc spline 近似手法 [49] [45] [50] [51] [48] [52] [53]や曲線を対象とした arc spline 近似手法 [54] [55] [47] [56] [57] [58] [48] [59]がこれまでに数多く提案されている。これらの手法の多くは、biarc 曲線 [60]を用いて対象曲線を近似する arc spline 曲線を求める手法である。biarc 曲線は、 $G^1$ 連続に接続された2つの円弧のペアで構成される曲線であり、任意の2点とその2点での接ベクトルを補間することが可能である。1つの円弧が任意の2点と2点のうちの1点での接ベクトルのみ補間可能であるのに対して、biarc 曲線は両端点での接ベクトルまで補間可能であるうえ、形状決定において境界条件以外にさらにもう1自由度をもつため制御性が高い。上述の手法の多くは、対象点列間を biarc 曲線で補間することで arc spline 曲線を生成するアプローチを採用している。それぞれは、補間点列の抽出法・補間点列での接ベクトルの推定法・biarc 曲線の形状決定法(形状決定のために必要な第六条件の設定)に違いがある。biarc 曲線を用いない方法としては、arc spline 曲線を有理 Bézier 形式で直接表現し対象曲線との誤差を最小化する方法 [49]や、対象曲線を二次 Bézier 曲線に限定したうえで対象を曲率単調な部分曲線に分割し、各部分曲線に一つの円弧を割り当てる方法 [54]などが存在する。

これらの既往研究においては、arc spline 曲線による近似アルゴリズムは、近似精度と必要となる円弧セグメント総数で評価され、より少ないセグメント数でより精度の高い arc spline 曲線

を求めることが目的とされている。これは、既往研究の多くが arc spline 曲線を CNC 加工機のツールパスへ応用することを目的としているためである。このような評価指標から、既往研究のアプローチは大きく二つに分類することが可能である。1つのアプローチは、指定された許容誤差の範囲内でより少ないセグメント数の arc spline 曲線を生成するアプローチであり、もう1つのアプローチは曲率などの情報を用いて適切なセグメント数を推定したうえで対象との誤差を最小化するアプローチである。本論文の目的は、arc spline 曲線を補間曲線としてもつ平面曲線の  $k$ -離散モデル(定義 3-2)の中で、対象とする曲線を最良近似するものを求めることであるので、後者と類似の最適化によるアプローチを用いる。

最適化によるアプローチにおいて、対象曲線に対する離散モデルの近似精度を評価するために、離散モデルと対象曲線上の対応点との二乗距離を用いる。本論文で扱う離散モデルは、arc spline 曲線を補間曲線としてもつ離散曲線であるので、arc spline 曲線の表示式を用いて離散曲線(i.e., 点列)を表すことができる。3.2.2 項で示したように、 $k$ -離散モデルでは濃度  $k$  の実数集合  $\{\kappa^0, \kappa^1, \dots, \kappa^{k-1}\}$  と区間の対応関係を考慮する必要があるが、ここではまず、この関係を考慮しない通常の離散モデルの表示式を示す。この対応関係を考慮する表示式は 3.2.4 項で詳細を示す。

Arc spline 曲線のセグメント結節点列を  $\{\mathbf{P}_i\}$ 、結節点における単位接ベクトル列を  $\{\mathbf{e}_i^1\}$ 、セグメントの曲率半径列を  $\{r_i\}$ 、弧長列を  $\{l_i\}$ 、セグメントの従法線ベクトル列を  $\{\mathbf{e}_i^3\}$  とする(図 3-5)。このとき点列  $\{\mathbf{P}_i\}$  が離散曲線に対応する。Arc spline 曲線の第  $i$  セグメントは次のように表される。

$$\mathbf{P}_i(s) = r_i \begin{bmatrix} \cos\left(\mathbf{e}_{i,z}^3 \frac{s}{r_i} + \theta_i\right) \\ \sin\left(\mathbf{e}_{i,z}^3 \frac{s}{r_i} + \theta_i\right) \end{bmatrix} + \mathbf{P}_i - r_i \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{bmatrix}, \quad s \in [0, l_i] \quad (3.13)$$

ここで、 $\theta_i$  は  $\mathbf{e}_i^1$  が X 軸となす角度、 $\mathbf{e}_{i,z}^3 \in \{-1, 1\}$  は第  $i$  セグメントの従法線ベクトル  $\mathbf{e}_i^3$  の Z 成分を表す。(3.13) から点列の漸化式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i+1} &= \mathbf{P}_i(l_i) \\ &= r_i \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i+1}) \\ \sin(\theta_{i+1}) \end{bmatrix} + \mathbf{P}_i - r_i \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}_i + r_i(\mathbf{e}_{i+1}^1 - \mathbf{e}_i^1) \times \mathbf{e}_i^3 \quad (i = 0, 1 \dots n-1) \end{aligned} \quad (3.14)$$

また、単位接ベクトルの漸化式が次のように得られる。

$$\mathbf{e}_{i+1}^1 = R\left(\mathbf{e}_{i,z}^3 \frac{l_i}{r_i}\right) \mathbf{e}_i^1 \quad (i = 0, 1 \dots n-1) \quad (3.15)$$

ここで、 $R(\bullet)$  は X-Y 平面上の回転行列を表す。離散モデルがもつ補間曲線(i.e., arc spline 曲線)を含めた近似精度を評価する場合、arc spline 曲線の各セグメント上の 1 点を評価点として追加することが有効である。これは、1 円弧が 3 補間点を指定することで一意に決定されるためである。本研究では、評価点として各セグメントの中点を採用する。第  $i$  セグメントの中点  $\mathbf{P}_i^m$  は以下のように得られる。

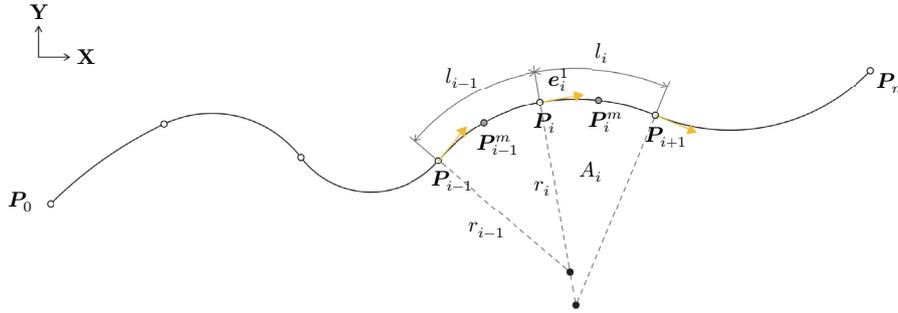


図 3-5 Arc spline 曲線

$$P_i^m = P_i + r_i \left( R \left( e_{i,z}^3 \frac{l_i}{2r_i} \right) e_i^1 - e_i^1 \right) \times e_i^3 \quad (i = 0, 1 \dots n-1) \quad (3.16)$$

以上で、arc spline 曲線を補間曲線としてもつ離散モデルの漸化形式の表示式が得られた。補間曲線である arc spline 曲線の境界条件(初期点  $P_0$  および初期点での単位接ベクトル  $e_0^1$ )、セグメントの曲率半径列  $\{r_i\}$ 、弧長列  $\{l_i\}$ 、セグメントの従法線ベクトル列  $\{e_i^3\}$  によって離散モデルが制御される。また、すべての表示式は  $P_0, e_0^1, r_i, l_i$  に関して可微分であることは明らかであろう。

### 3.2.4 k-arc spline 曲線

3.2.3 項では、曲率の離散化から得られる通常の離散モデルがもつ補間曲線である arc spline 曲線について整理した。本項では、この離散モデルが  $k$ -離散モデルとなるときの補間曲線である特殊な arc spline 曲線について示す。

3.2.2 項で示したように、曲率の離散化から得られる離散モデルが  $k$ -離散モデルとなるとき、その補間曲線である arc spline 曲線のセグメント曲率  $\kappa_i$  は、濃度  $k$  のある実数集合  $\{\kappa^0, \kappa^1, \dots, \kappa^{k-1}\}$  に含まれる。このような性質を満たす arc spline 曲線を  $k$ -arc spline 曲線として次のように定義する。

**定義 3-4**  $A = \{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}\}$  を  $n$  セグメントで構成される arc spline 曲線とし、 $(r_i, l_i)$  を第  $i$  セグメント  $A_i$  の半径と弧長とする。このとき、ある集合  $\mathcal{M} = \{(r^0, l^0), \dots, (r^{k-1}, l^{k-1})\}$  ( $2 \leq k < n$ ) が存在して、

$$\{(r_i, l_i) | i = 0, 1, \dots, n-1\} = \mathcal{M}$$

を満たすとき、 $A$  を  $k$ -arc spline 曲線という。

定義中の右下添え字は、arc spline 曲線の始点から始まるセグメントインデックスを表し、右上添え字は  $k$  種類の型となる円弧のインデックスを表す。以下の議論では統一してこの表記を採用する。上記の定義から明らかであるが、 $k$ -arc spline 曲線は  $k$  種類の円弧によって構成される arc spline 曲線であり、 $k$  種類の円弧の曲率半径と弧長が  $(r^0, l^0), \dots, (r^{k-1}, l^{k-1})$  に対応している。 $k$ -arc spline 曲線の形状を決定するためには、 $n$  個のセグメントと  $k$  種類の円弧の対応関係を決定する必要があるが、この対応関係は写像  $\lambda: \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$  で定めることができる。前

項で示した通常の arc spline 曲線の点列表示式を  $k$ -arc spline 曲線に拡張するために、写像  $\lambda$  を用いて以下の変数を導入する。

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (\lambda(i) = j) \\ 0 & (\lambda(i) \neq j) \end{cases} \quad (i = 0, 1 \dots n-1, j = 0, 1, \dots, k-1) \quad (3.17)$$

この変数  $\delta_{i,j}$  の導入により、(3.14)~(3.16)は以下のように拡張することができる。

$$\mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{P}_i + \sum_j \delta_{i,j} r^j (\mathbf{e}_{i+1}^1 - \mathbf{e}_i^1) \times \mathbf{e}_i^3 \quad (i = 0, 1 \dots n-1) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{P}_i^m = \mathbf{P}_i + \sum_j \delta_{i,j} r^j \left( R \left( \mathbf{e}_{i,z}^3 \frac{\sum_j \delta_{i,j} l^j}{2 \sum_j \delta_{i,j} r^j} \right) \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_i^1 \right) \times \mathbf{e}_i^3 \quad (3.19)$$

$(i = 0, 1 \dots n-1)$

$$\mathbf{e}_{i+1}^1 = R \left( \mathbf{e}_{i,z}^3 \frac{\sum_j \delta_{i,j} l^j}{\sum_j \delta_{i,j} r^j} \right) \mathbf{e}_i^1 \quad (i = 0, 1 \dots n-1) \quad (3.20)$$

以上で、arc spline 曲線を補間曲線としてもつ  $k$ -離散モデルの漸化形式の表示式が得られた。ここでは、補間曲線である arc spline 曲線の境界条件(初期点  $\mathbf{P}_0$  および初期点での単位接ベクトル  $\mathbf{e}_0^1$ )、 $k$ 種類の円弧の曲率半径と弧長  $\{(r^j, l^j)\}$ 、セグメントと円弧の対応関係  $\{\delta_{i,j}\}$ 、セグメントの従法線ベクトル列  $\{\mathbf{e}_i^3\}$  によって離散モデルが制御される。また、ここでもすべての表示式が  $\mathbf{P}_0, \mathbf{e}_0^1, r^j, l^j$  に関して可微分であることは明らかであろう。

### 3.3 k-Arc Spline Approximation

3.2 節において、平面曲線の  $k$ -離散モデルのうち補間曲線が arc spline 曲線となる離散モデルが導かれ、この離散モデルがもつ補間曲線が特に  $k$ -arc spline 曲線として定義された。本章の目的は、arc spline 曲線を補間曲線としてもつ  $k$ -離散モデルの中で、対象曲線を(補間曲線も含めた意味で)最良近似する離散曲線を求めることである。この問題は対象曲線を最良近似する  $k$ -arc spline 曲線を求める問題に等しい。本節では、この最良近似曲線を導く最適化アルゴリズムについて述べる。最適化アルゴリズムは、最適化ステップと初期化ステップの2つのステップで構成される(図3-7)。まず、3.3.1項において最適化ステップで解く最適化問題の定式化について述べ、3.3.2項において初期化ステップで行う最適化問題の初期化について述べる。

#### 3.3.1 最適化問題

##### 3.3.1.1 近似エネルギー

$k$ -arc spline 曲線の近似精度を、 $k$ -arc spline 曲線上の点列と対象曲線上の対応点との二乗距離の総和により次のように評価する。

$$E = \sum_{i=0}^n \langle \tilde{P}_i - P_i, \tilde{P}_i - P_i \rangle + \sum_{i=0}^{n-1} \langle \tilde{P}_i^m - P_i^m, \tilde{P}_i^m - P_i^m \rangle \quad (3.21)$$

ここで、 $P_i$ および $P_i^m$ は(3.18), (3.19)で表される $k$ -arc spline 曲線のセグメント結節点とセグメント中点であり、 $\tilde{P}_i$ および $\tilde{P}_i^m$ は各点に対応する対象曲線上の点である(3.3.2項にて詳述)。本章における以下の議論では、 $\tilde{\bullet}$ は対象曲線の幾何量を表す。

### 3.3.1.2 補間制約

特定点において対象曲線を補間する必要がある場合、制約条件が必要となる。ここでは、特に始終点での補間制約について示す。始終点における $G^0$ 補間条件は以下である。

$$\begin{cases} \tilde{P}_0 - P_0 = 0 \\ \tilde{P}_n - P_n = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

(3.18)~(3.20)において、初期点 $P_0$ は独立変数であるので $P_0$ を定数として扱うことで第1式は省略することができる。よって、 $P_0$ を変数から除外したうえで以下の条件を制約として設定すればよい。

$$\tilde{P}_n - P_n = 0 \quad (3.23)$$

ここで、 $G^0$ 補間制約として、ノルム二乗の形式 $\langle \tilde{P}_n - P_n, \tilde{P}_n - P_n \rangle = 0$ を用いないことに注意する。これは、ノルム二乗形式の制約式では、制約式の勾配ベクトルが許容解で零ベクトルとなり、数値解析の安定性に影響を及ぼすためである。次に、始終点において $G^1$ 補間が求められる場合、以下の条件を制約として設定する。

$$\begin{cases} \tilde{P}_n - P_n = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon_{feas}} (\langle \tilde{e}_n^1, e_n^1 \rangle - 1) = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

$G^0$ 補間制約の場合と同様に、 $P_0$ および $e_0^1$ を定数として扱い変数から除外することで始点における制約を省略した。第2式中の $\varepsilon_{feas}$ は、最適化アルゴリズム内で用いる制約に対する零閾値である。終点における接ベクトルの補間条件である第2式は、第1式と異なりノルム二乗の形式であるので、スケールの違いを考慮して $\varepsilon_{feas}$ でスケールリングする。

### 3.3.1.3 閉曲線制約

対象曲線が閉曲線である場合、 $k$ -arc spline 曲線が $G^1$ 連続な曲線であるためには次の制約が必須である。

$$\begin{cases} P_n - P_0 = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon_{feas}} (\langle e_n^1, e_0^1 \rangle - 1) = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

$G^1$ 補間条件の場合と同様に、接ベクトルに関する制約である第2式を $\varepsilon_{feas}$ でスケールリングす

る。この場合は、 $\mathbf{P}_0$ および $e_0^1$ も変数として扱う。

### 3.3.1.4 側面制約

$k$ -arc spline 曲線の曲率変数および弧長変数に側面制約を設定することでセグメント形状を直接制御することが可能となる。第 $j$ 種類の円弧を制御する場合、上下限値を指定することで側面制約が次のように設定される。

$$r_{min}^j \leq r^j \leq r_{max}^j, \quad l_{min}^j \leq l^j \leq l_{max}^j \quad (3.26)$$

$k$ -arc spline 曲線の曲率半径と弧長は正であることを前提としているので、ここで指定する下限値 $r_{min}^j$ および $l_{min}^j$ は正数とする。特定の上下限値が設定されない場合においても、最適化アルゴリズムの発散を防ぐために、十分大きな値 $\gamma \approx 1.0e + 12$ および十分小さな値 $\varepsilon \approx 1.0e - 6$ を上下限値として設定する。しかし、3.3.2項で示す初期化により精度の高い初期解が得られるため、実際の問題でデフォルトの境界に到達することは極めてまれである。

### 3.3.1.5 スケーリング変数

最適化問題の解法アルゴリズム(e.g., 準ニュートン法や逐次二次計画法)や初期化アルゴリズム(3.3.2項)の内部では、複数の線形方程式を解く必要がある。ここで変数のスケールに大きな不規則性がある場合、線形方程式が不安定となりアルゴリズム全体の不安定性を引き起こす可能性がある。特に、小さな曲率の曲線を短いセグメントにより離散化する場合、変数スケールに関して次の関係が生じる。

$$l^0 \approx l^1 \approx \dots \approx l^{k-1} \ll r^0 < r^1 < \dots < r^{k-1} \quad (3.27)$$

このような変数スケールの不規則性を改善するために、次のように定義されるスケーリング変数 $\Delta \mathbf{P}_0, \Delta \theta_0, \Delta r^j, \Delta l^j$ を導入する。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= \mathbf{P}_{0,initial} + \Delta \mathbf{P}_0 \\ e_0^1 &= R(\Delta \theta_0) e_{0,initial}^1 \\ r^j &= \Delta r^j \times r_{initial}^j \quad (j = 0, 1, \dots, k-1) \\ l^j &= \Delta l^j \times l_{initial}^j \quad (j = 0, 1, \dots, k-1) \end{aligned} \quad (3.28)$$

ここで、 $\mathbf{P}_{0,initial}, e_{0,initial}^1, r_{initial}^j, l_{initial}^j$ はそれぞれの変数の初期値である。これらのスケーリング変数の導入により、点列の表示式(3.18)~(3.20)は次のように書き換えられる。

$$\mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{P}_i + \sum_j \delta_{i,j} \Delta r^j r_{initial}^j (e_{i+1}^1 - e_i^1) \times e_i^3 \quad (i = 0, 1 \dots n-1) \quad (3.29)$$

$$\mathbf{P}_i^m = \mathbf{P}_i + \sum_j \delta_{i,j} \Delta r^j r_{initial}^j \left( R \left( e_{i,z}^3 \frac{\sum_j \delta_{i,j} \Delta l^j l_{initial}^j}{2 \sum_j \delta_{i,j} \Delta r^j r_{initial}^j} \right) e_i^1 - e_i^1 \right) \times e_i^3 \quad (i = 0, 1 \dots n-1) \quad (3.30)$$

$$\mathbf{e}_{i+1}^1 = R \left( \mathbf{e}_{i,z}^3 \frac{\sum_j \delta_{i,j} \Delta l^j_{initial}}{\sum_j \delta_{i,j} \Delta r^j_{initial}} \right) \mathbf{e}_i^1 \quad (i = 0, 1 \dots n-1) \quad (3.31)$$

### 3.3.1.6 混合整数計画問題と連続最適化問題

3.3.1.1 項で示した近似エネルギー関数を目的関数とし、3.3.1.2 項～3.3.1.4 項で示した制約を制約条件とする非線形混合整数計画問題が次のように定式化される。

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{find} \quad \Delta \mathbf{P}_0 \in \mathbb{R}^2, \Delta \theta_0 \in \mathbb{R}, \Delta r^0, \dots, \Delta r^{k-1} \in \mathbb{R}, \Delta l^0, \dots, \Delta l^{k-1} \in \mathbb{R} \\ & \delta_{0,0}, \dots, \delta_{n-1,k-1} \in \{0,1\}, \mathbf{e}_0^3, \dots, \mathbf{e}_{n-1}^3 \in \{(0,0,1), (0,0,-1)\}, n \in \mathbb{N} \\ \text{min} \quad & E \\ \text{s. t.} \quad & \Delta r^j_{min} \leq \Delta r^j \leq \Delta r^j_{max} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1) \\ & \Delta l^j_{min} \leq \Delta l^j \leq \Delta l^j_{max} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1) \\ & h_\xi = 0 \quad (\xi = 0, 1, \dots) \text{ if necessary.} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$h_\xi = 0$ は必要に応じて設定される補間制約や閉曲線制約である。最適化問題(3.32)の最適化変数のうち、 $\Delta \mathbf{P}_0$ ,  $\Delta \theta_0$ ,  $\Delta r^j$ ,  $\Delta l^j$ は連続変数であり、 $\delta_{i,j}$ ,  $\mathbf{e}_i^3$ ,  $n$ は離散変数であるので、この問題は連続変数と離散変数の双方を含む非線形の混合整数計画問題である。この混合整数計画問題の最適解を求めるためには、貪欲法やヒューリスティック手法が必須となるが、それらの解法の計算コストは非常に高く効率的に最適解を求めることは困難である。そこで、本論文では、あらかじめ推定された離散変数を定数として扱うことで、最適化問題(3.32)を連続最適化問題に置換する方法を用いる。これは貪欲法と類似の方法であるが、通常の貪欲法とは異なり、目的関数  $E$ とは別の指標を用いて離散変数を決定する。離散変数の推定方法に関しては、3.3.2 項において詳細を述べる。離散変数の定数化により、最適化問題(3.32)は以下に示す連続な非線形最適化問題となる。

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{find} \quad \Delta \mathbf{P}_0 \in \mathbb{R}^2, \Delta \theta_0 \in \mathbb{R}, \Delta r^0, \dots, \Delta r^{k-1} \in \mathbb{R}, \Delta l^0, \dots, \Delta l^{k-1} \in \mathbb{R} \\ \text{min} \quad & E \\ \text{s. t.} \quad & \Delta r^j_{min} \leq \Delta r^j \leq \Delta r^j_{max} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1) \\ & \Delta l^j_{min} \leq \Delta l^j \leq \Delta l^j_{max} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1) \\ & h_\xi = 0 \quad (\xi = 0, 1, \dots) \text{ if necessary.} \end{aligned} \quad (3.33)$$

本研究では、側面制約のみをもつ問題に対して準ニュートン法を、補間制約や閉曲線制約をもつ問題に逐次二次計画法を適用する。準ニュートン法では、各ステップにおいて、BFGS法で定まる2次の近似行列  $B_k$  を用いて解の更新方向  $\mathbf{d}_k$  を決定し、ウルフの基準を用いた直線探索により更新幅  $\alpha_k$  を決定する [61] [62]。逐次二次計画法では、各ステップにおいて、2次の近似行列に違いをもつ2つの部分問題を解くことで解の更新方向  $\mathbf{d}_k$  を求める。一方の近似行列は準ニュートン法と同様にBFGS法で定まる行列  $B_k$  とし、もう一方の近似行列は次のように定まる対角行列  $D_k$  とする

$$D_k(i, i) = L_{xx}(i, i) \quad (3.34)$$

ここで、 $L_{xx}$ は最適化問題のラグランジュ関数の未定乗数以外の変数に関するヘッセ行列である。  $B_k$ から求まる更新方向 $\mathbf{d}_{QN,k}$ は準ニュートンのな方向、  $D_k$ から求まる更新方向 $\mathbf{d}_{SD,k}$ は最急降下的な方向と解釈することができる [63]。  $\mathbf{d}_{QN,k}$ と $\mathbf{d}_{SD,k}$ の配分割合 $\eta$ を直線探索により決定する。本研究では、 $\eta = 0.0, 0.1, \dots, 1.0$ に対して、 $\mathbf{d} = \eta\mathbf{d}_{QN,k} + (1 - \eta)\mathbf{d}_{SD,k}$ 方向のアルミホ基準による直線探索を実行し、最もメリット関数を減少させる方向を更新方向 $\mathbf{d}_k$ として採用する。更新幅 $\alpha_k$ もこの直線探索により同時に求める。

準ニュートン法および逐次二次計画法のいずれの方法においても、効率的かつ安定的に最適解を求めるためには適切な初期値が必要である。連続変数の適切な初期値は、初期化アルゴリズムによる離散変数の推定時に同時に求めることが可能であるので、3.3.2項において詳細を示す。

### 3.3.2 初期化アルゴリズム

前項において、対象曲線を最良近似する $k$ -arc spline 曲線を求める問題が連続最適化問題(3.33)として定式化された。対象とする曲線に対して連続最適化問題(3.33)を設定するためには、離散変数 $\delta_{i,j}$ ,  $e_i^3$ ,  $n$ の推定が必要である。さらに、(3.33)を効率的に解くためには、連続変数 $\mathbf{P}_{0,initial}$ ,  $\theta_{0,initial}$ ,  $r_{initial}^j$ ,  $l_{initial}^j$ の適切な初期値が必要となる。本項では、これらの変数の推定方法について述べる。

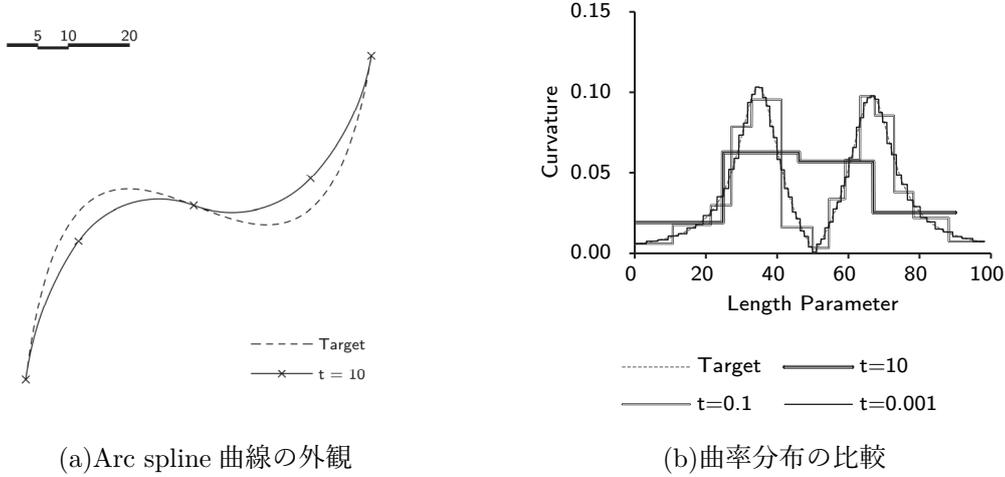
#### 3.3.2.1 Curvature Clustering アルゴリズム

3.2.2項において、平面曲線の離散モデルの中で arc spline 曲線による補間曲線をもつ離散曲線が、曲線の曲率 $\kappa(s)$ の離散化によって得られることを示した。この離散曲線が連続な曲線に収束するためには、離散幅 $\Delta s \rightarrow 0$ の極限で $\{\kappa_i\} \rightarrow \kappa(s)$ を満たす曲率の離散化であればよかった(これが成り立てば(3.11)は(3.12)へ収束する)。さらに、この離散モデルが $k$ -離散モデルであるためには、ある濃度 $k$ の実数集合 $\mathcal{M} = \{\kappa^0, \kappa^1, \dots, \kappa^{k-1}\}$ が存在して、 $\kappa_i \in \mathcal{M}$ であり $k \rightarrow n$ ,  $\Delta s \rightarrow 0$ の極限で $\{\kappa_i\} \rightarrow \kappa(s)$ を満たせばよいのであった。これらの収束条件を満たす曲率 $\kappa(s)$ の離散化方法はさまざまであるが、ここでは良い近似曲線を与える曲率 $\kappa(s)$ の離散化方法を考える。

平面曲線の基本定理(定理 3-1)から、平面曲線は合同変換による自由度を除いて曲率 $\kappa(s)$ によって一意に定まるのであった。この定理に基づけば、2つの曲線 $c_1, c_2$ を考えたとき、両曲線の曲率が $\kappa_1(s) \approx \kappa_2(s)$ であり両曲線が同じ境界条件をもてば、 $c_1 \approx c_2$ と考えることができる。Arc spline 曲線に関する曲率の近似精度と曲線の近似精度の関係は [58]において指摘されている。また、この関係は arc spline 曲線を用いた数値解析でも実験的に確認することができる(図 3-6)。そこで、ここでも曲率を良く近似することが良い近似曲線を導くという仮定に基づき、まず、曲率の誤差が最小となるように曲率 $\kappa(s)$ を離散化することを考える。離散モデルを補間する arc spline 曲線の曲率が $\bar{\kappa}(s) = \kappa_i$ ,  $s \in [s_i, s_{i+1}]$ であるので、 $\bar{\kappa}(s) \approx \kappa(s)$ となるためには、次を満たすように離散値 $\kappa_i$ を定めればよい。

$$\kappa_i = \frac{1}{s_{i+1} - s_i} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa(s) ds \quad (3.35)$$

これは、各区間の曲率の平均値に他ならない。このようにして定める $\{\kappa_i\}$ が $\Delta s \rightarrow 0$ の極限で $\kappa(s)$ に収束することは明らかであろう。(3.35)による $\{\kappa_i\}$ が導く離散モデルは、一般の arc spline



(a) Arc spline 曲線の外観

(b) 曲率分布の比較

図 3-6 Arc spline 近似(Rhinoceros®)における許容誤差と曲率分布の関係

曲線を補間曲線としてもつ離散モデルである。k-arc spline 曲線を補間曲線としてもつk-離散モデルを導く  $\{\tilde{\kappa}_i\}$  を定めるためには、 $k \rightarrow n$  の極限で  $\tilde{\kappa}_i \rightarrow \kappa_i$  を満たす  $M = \{\kappa^0, \kappa^1, \dots, \kappa^{k-1}\}$  と  $\{\tilde{\kappa}_i \in M\}$  を定めればよいのであった。ここでも曲率の近似精度を考慮すれば、次のように  $M$  を定めればよい。

$$\arg \min_{\mathbb{R}} \sum_{i=0}^{n-1} \min_j (\kappa^j - \kappa_i)^2 \tag{3.36}$$

このとき、 $\tilde{\kappa}_i$  は次のように定まる。

$$\tilde{\kappa}_i = \arg \min_{\kappa^j \in \mathbb{R}} (\kappa^j - \kappa_i)^2 \tag{3.37}$$

これは、 $\{\kappa_i\}$  をクラスター内誤差平方和が最小となるように  $k$  個のクラスターに分類するクラスタリングである。(3.36), (3.37) によって定まる  $\{\tilde{\kappa}_i\}$  が、 $k \rightarrow n$  の極限で  $\tilde{\kappa}_i \rightarrow \kappa_i$  となることは明らかである。 $\{\kappa_i\}$  に対して誤差が最小となるように  $\{\tilde{\kappa}_i\}$  を定めるので、 $\{\tilde{\kappa}_i\}$  が導く k-離散モデルを補間する arc spline 曲線の曲率  $\tilde{\kappa}(s)$  は  $\tilde{\kappa}(s) \approx \bar{\kappa}(s)$  を満たす。

以上の議論を踏まえて、対象曲線を良く近似する k-arc spline 曲線(の初期解)を得るために、次に示す Curvature Clustering アルゴリズム(CCA)を提案する。

[Curvature Clustering Algorithm]

1. 対象曲線  $G$  を変曲点で *global segment* に分割  $\rightarrow G_0, G_1, \dots, G_{m-1}$
2.  $G_0, G_1, \dots, G_{m-1}$  をモジュール  $M$  を基準として *local segment* に等分割  $\rightarrow g_0, g_1, \dots, g_{n-1}$
3.  $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}$  の曲率代表値を求める  $\rightarrow \bar{\kappa}'_0, \bar{\kappa}'_1, \dots, \bar{\kappa}'_{n-1}$
4. *k-means++* 法により曲率  $\bar{\kappa}'_0, \bar{\kappa}'_1, \dots, \bar{\kappa}'_{n-1}$  を  $k$  グループに分類  $\rightarrow \kappa'^0, \kappa'^1, \dots, \kappa'^{k-1}$

ステップ 1 では、対象曲線  $G$  を変曲点で *global segment*  $G_0, G_1, \dots, G_{m-1}$  に分割する。これは、CAD ソフトウェアでは平面曲線が空間曲線と等価に扱われることが多く、曲率の正負が自明でないためである。変曲点において曲率の正負が反転するとともに、従法線ベクトルが反転する。ステップ 2 では、指定されたモジュール  $M$  から決まる分割数に応じて  $G_0, G_1, \dots, G_{m-1}$  を等分割

することで *local segment* を得る。セグメント  $G_i$  の分割数  $N_i$  は、 $L_i$  を  $G_i$  の長さとして以下のように定める。

$$N_i = \text{Round} \left( \frac{L_i}{M} \right) \quad (3.38)$$

ここで導入されるモジュール  $M$  は、均質なパネリングを前提として導入されるパラメータであり離散幅  $\Delta s$  に対応する。 $G_0, G_1, \dots, G_{m-1}$  の分割で得られる全セグメント  $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}$  が arc spline 曲線のセグメント  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$  に対応する。よって、このステップにおいて、 $k$ -arc spline 曲線のセグメント総数  $n$  および従法線ベクトル  $\{e_i^3\}$  が定まる。さらに、セグメントの対応関係から、近似エネルギー関数(3.21)中のターゲット点  $\tilde{P}_i$  および  $\tilde{P}_i^m$  を  $g_i$  の始点および中点として定める。一般的な曲線の近似問題では、ターゲット点を最近接点などで定義し、最適化過程で逐次更新する方法が採用されることが多いが、ここではセグメントの対応関係を重要視してターゲット点  $\tilde{P}_i$  および  $\tilde{P}_i^m$  を定数として扱う。ステップ 3 では、 $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}$  の曲率の代表値を求める。代表値を求めるために、まず、各セグメントの曲率の平均値  $\bar{\kappa}_0, \bar{\kappa}_1, \dots, \bar{\kappa}_{n-1}$  を求める。すでに述べたように、ここで得られる区間の平均曲率  $\{\bar{\kappa}_i\}$  が定める arc spline 曲線は、曲率近似の観点で対象曲線を良く近似するが、対象曲線を最良近似する曲線ではない。 $\{\bar{\kappa}_i\}$  を変数として(3.33)と同様の最適化問題を解くことにより、対象曲線を最良近似する arc spline 曲線を求めれば、 $\{\bar{\kappa}_i\}$  を最適に修正することができるが、これは計算コストが高く非効率的である。そこで、効率的に  $\{\bar{\kappa}_i\}$  を修正するために、3.3.2.2 項で述べる Fast Improvement アルゴリズム(FIA)を適用する。FIA の適用により、修正された曲率の代表値  $\bar{\kappa}'_0, \bar{\kappa}'_1, \dots, \bar{\kappa}'_{n-1}$  が得られる。最後にステップ 4 では、各セグメントの曲率代表値  $\bar{\kappa}'_0, \bar{\kappa}'_1, \dots, \bar{\kappa}'_{n-1}$  を  $k$ -means<sup>++</sup>法 [64]により  $k$ 個のクラスターに分類する。 $k$ -means<sup>++</sup>法は対象データをクラスター内誤差平方和が最小となるように  $k$ 個のクラスターに分類するクラスタリング手法であるので、前ステップで求めた曲率代表値  $\bar{\kappa}'_0, \bar{\kappa}'_1, \dots, \bar{\kappa}'_{n-1}$  に  $k$ -means<sup>++</sup>法を適用することで、 $\bar{\kappa}'_0, \bar{\kappa}'_1, \dots, \bar{\kappa}'_{n-1}$  を最良近似する  $k$ 個の代表値  $\kappa^0, \kappa^1, \dots, \kappa^{k-1}$  を求めることができる。 $n$ 個のデータの集合の分割も同時に求まるので、 $n$ 個のセグメントと  $k$ 個の曲率代表値との対応関係も定まる。この対応関係は、 $k$ -arc spline 曲線の離散変数  $\delta_{i,j}$  そのものである。ここでも、前ステップと同様に、FIA を適用することで曲線の近似精度を考慮して  $k$ 個の曲率代表値を修正する。FIA の適用により、修正曲率値  $\kappa^0, \kappa^1, \dots, \kappa^{k-1}$  および弧長  $l^0, l^1, \dots, l^{k-1}$  ( $\approx M$ ) が求まる。以上をまとめると、CCA によって以下の変数が定まる。

$$n, \quad e_i^3, \quad \delta_{i,j}, \quad r_{initial}^j = \frac{1}{\kappa'^j}, \quad l_{initial}^j = l^j \quad (3.39)$$

$$(i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, k-1)$$

### 3.3.2.2 Fast Improvement アルゴリズム

3.3.2.1 項で示した CCA のステップ 3 およびステップ 4 において、本項で述べる Fast Improvement アルゴリズム(FIA)を用いて曲率値  $\{\kappa_i\}$  を修正した。本項では、このアルゴリズムの詳細を示す。CCA-3 や CCA-4 では、対象とする曲率の区間平均やクラスタリングによって得られた曲率  $\{\kappa_i\}$  を、曲線の近似精度を考慮して修正する必要がある。曲率  $\{\kappa_i\}$  を修正する方法と

して、(3.33)と同様の最適化問題を解くことで最適な曲率 $\{\kappa_{i,opt}\}$ を求める方法が考えられるが、これは計算コストの観点で望ましくない。そこで、単純な補間問題を解くことで効率的に曲率 $\{\kappa_i\}$ を修正する方法を用いる。

(3.14)~(3.16)や(3.18)~(3.20)を用いることで、区間平均やクラスタリングによって得られた曲率 $\{\kappa_i\}$ と境界条件 $\mathbf{P}_0, \mathbf{e}_0^1$ から対応する点列を求めることができる。境界条件として対象曲線の境界条件を用いれば、対象曲線を良く近似する点列が得られるが、このとき、その近似精度が終点に近付くほど悪化することは明らかであろう。そこで、終点における補間条件を解くことで点列の曲線に対する近似精度を改良することを考える。ここで解く補間条件は単純な非線形方程式であり、(3.33)のような最適化問題と比較して、効率的に解を求めることができる。対象曲線が開曲線であり、端点での最終的な補間条件が $G^0$ または補間条件が無い場合、次の補間条件を解く。

$$\langle \tilde{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P}_n, \tilde{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P}_n \rangle = 0 \quad (3.40)$$

このとき、 $\mathbf{P}_0$ は定数として扱う。端点での最終的な補間条件が $G^1$ である場合、次の補間条件を解く。

$$\begin{cases} \langle \tilde{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P}_n, \tilde{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P}_n \rangle = 0 \\ \langle \tilde{\mathbf{e}}_n^1, \mathbf{e}_n^1 \rangle - 1 = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

このとき、 $\mathbf{P}_0, \mathbf{e}_0^1$ は定数として扱う。最後に、閉曲線の場合は次の条件を解く。

$$\begin{cases} \langle \mathbf{P}_n - \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_n - \mathbf{P}_0 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{e}_n^1, \mathbf{e}_0^1 \rangle - 1 = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

ここでは、 $\mathbf{P}_0, \mathbf{e}_0^1$ は変数として扱う。ここで、最適化問題における補間制約と異なり、 $G^0$ 補間条件としてノルム二乗の形式を用いること、および、 $G^1$ 補間条件としてスケーリングされない条件を用いることに注意する。単純な非線形方程式として補間条件を解く場合、ノルム二乗の形式でも安定して解を求めることが可能であり、これに応じて、第2式のスケーリングが不要になる。

補間条件式(3.40)~(3.42)は非線形方程式であるが、未知数に対して方程式の数が不足しているため、通常のNewton-Raphson法を直接適用することは不可能である。通常のNewton-Raphson法を適用する場合、適切な追加条件を設定する必要があるが、このような追加条件を設定することは一般的に困難である。そこで、追加制約なしで直接的に解を求めることができる一般化Newton-Raphson法 [65]を用いて解を求めることを考える。一般化Newton-Raphson法では、非線形方程式 $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ に対して、通常のNewton-Raphson法と同様に、繰り返し計算の各ステップで次の線形方程式を解くことで解の更新ベクトル $\Delta \mathbf{x}_i$ を求める。

$$J(\mathbf{x}_i)\Delta \mathbf{x}_i = -\mathbf{r}_i \quad (3.43)$$

ここで、 $J$ は $F(\mathbf{x})$ のヤコビアン、 $\mathbf{r}_i$ は第 $i$ ステップにおける残差ベクトルである。追加制約を設定しない場合、制約式数<変数の数なので $J$ は正方行列ではなく横長行列となる。一般化Newton-Raphson法では、この線形方程式を $J$ の一般逆行列 $J^+$ により直接解くことで、解の更新ベクトル $\Delta \mathbf{x}_i$ を得る。このとき得られる更新ベクトル $\Delta \mathbf{x}_i = -J^+\mathbf{r}_i$ は、(3.43)の最小ノルム解であるので、

追加制約を設けたときに得られる解と比較して解の更新量が小さい。繰り返し計算の結果得られる最終的な収束解 $\mathbf{x}_{sol}$ が $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ の最小ノルム解となる保証はないが、初期解 $\mathbf{x}_0$ からの更新ノルム $\|\mathbf{x}_{sol} - \mathbf{x}_0\|$ は通常 Newton-Raphson 解と比較して小さくなる傾向がある。つまり、一般化 Newton-Raphson 法により(3.40)~(3.42)を解けば、初期解からの更新量の小さな解を求めることができる。(3.40)~(3.42)を解く際に用いる初期解は曲率の最良近似解であるので、曲率の近似精度・曲線の近似精度の双方を考慮した解を得ることができる。

非線形方程式(3.40)~(3.42)の未知量は各ステップにおいて異なる。CCA-3 では、各区間の曲率半径 $\{r_i\}$ 、各区間共通の区間長 $l$ 、境界条件 $\mathbf{P}_0$ 、 $\mathbf{e}_0^1$ が未知量であり、CCA-4 では、 $k$ 種類の代表曲率半径 $\{r^j\}$ と弧長 $\{l^j\}$ 、境界条件 $\mathbf{P}_0$ 、 $\mathbf{e}_0^1$ が未知量である。終点 $\mathbf{P}_n$ は、それぞれ(3.14), (3.15)および(3.18), (3.20)を用いて得られる。一般化 Newton-Raphson 法で(3.40)~(3.42)の解を求める場合、ここで示した未知量を未知変数として直接扱うと、変数スケールの不規則性(3.27)に起因する解のバイアスが生じる。ここでは、変数スケールの不規則性(3.27)が及ぼす影響について、CCA-4 における(3.40)を例として示す。また、簡単のために $\{r^j\}$ ,  $\{l^j\}$ のみを考える。(3.40)を $F(\mathbf{x}) = 0$ としたとき $F$ のヤコビアン $J$ の要素は次のように得られる。

$$\frac{\partial F}{\partial r^\xi} = -2(\tilde{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P}_n) \cdot \sum_{i=0}^n \left\{ \delta_{i,\xi} \{R(\theta_i) - Id\} - \frac{\mathbf{e}_{i,z}^3 \delta_{i,\xi} l_i}{r_i} dR(\theta_i) \right\} \mathbf{e}_i^1 \times \mathbf{e}_i^3 \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial F}{\partial l^n} = -2(\tilde{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P}_n) \cdot \sum_{i=0}^n \{ \mathbf{e}_{i,z}^3 \delta_{i,\eta} dR(\theta_i) \} \mathbf{e}_i^1 \times \mathbf{e}_i^3 \quad (3.45)$$

$$r_i = \sum_j \delta_{i,j} r^j, \quad l_i = \sum_j \delta_{i,j} l^j, \quad \theta_i = \mathbf{e}_{i,z}^3 \frac{l_i}{r_i}$$

(3.27)を考慮すれば、 $l_i/r_i \approx 0$ ,  $\theta_i \approx 0$ と考えられるので(3.44)は次のように近似される。

$$\frac{\partial F}{\partial r^\xi} \approx 0 \quad (3.46)$$

このときヤコビアン $J$ 及びその一般逆行列 $J^+$ は次のようになる。

$$J \approx \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{\partial F}{\partial l^0} & \dots & \frac{\partial F}{\partial l^{k-1}} \end{bmatrix} = [\mathbf{0} \quad \nabla_l F^T] \quad (3.47)$$

$$J^+ \approx \frac{1}{\nabla_l F^T \cdot \nabla_l F} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \nabla_l F \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

一般化 Newton-Raphson 法の各ステップでの更新ベクトルは次のようになる。

$$\Delta \mathbf{x}_i = -J^+ \mathbf{r}_i = -\frac{\mathbf{r}_i}{\nabla_l F^T \cdot \nabla_l F} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \nabla_l F \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

ここでは、 $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^1$ なので曲率半径 $\{r^j\}$ に対する更新量は0となり、各ステップで曲率半径は更新されない。結果的に、曲率半径 $\{r^j\}$ が更新されない解が得られるので、曲率 $\{\kappa^j\}$ は修正されず望ましい結果は得られない。ここで、3.3.1.5項で示したスケール変数(3.28)を導入すること

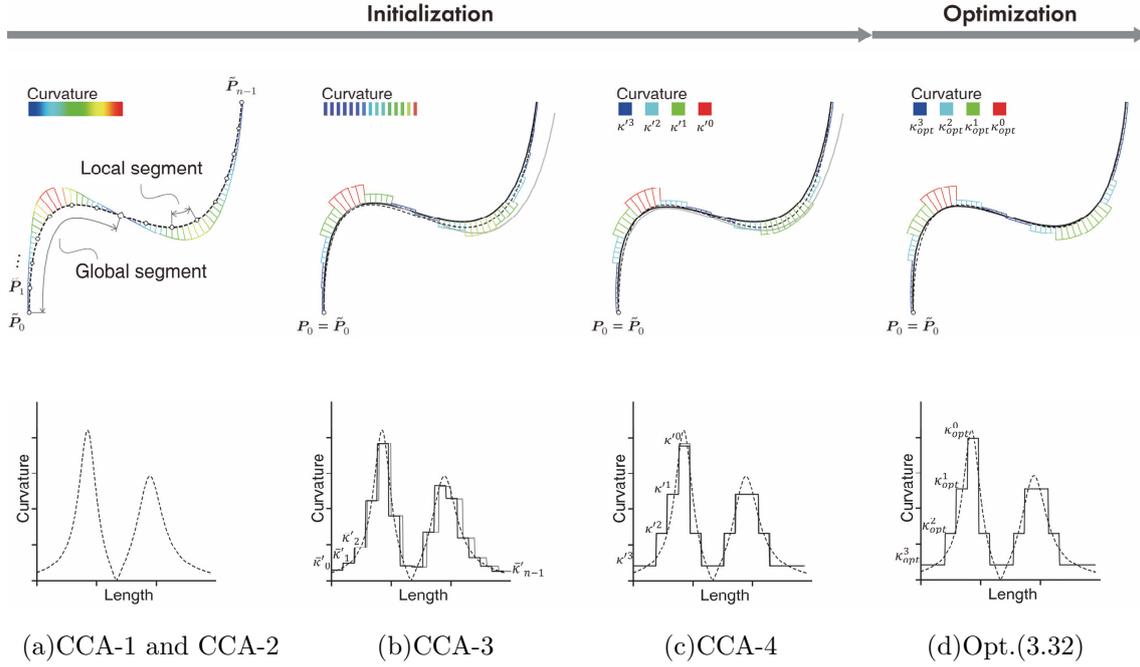


図 3-7 k-arc spline approximation の全体フロー

を考える。スケーリング変数の導入により、 $F$ のヤコビアンは次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta r^\xi} = -2(\tilde{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P}_n) \cdot \sum_{i=0}^n \left\{ \delta_{i,\xi} r_{initial}^\xi \{R(\theta_i) - Id\} - \frac{e_{i,z}^3 \delta_{i,\xi} r_{initial}^\xi l_i}{r_i} dR(\theta_i) \right\} \mathbf{e}_i^1 \times \mathbf{e}_i^3 \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta l^\eta} = -2(\tilde{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P}_n) \cdot \sum_{i=0}^n \{e_{i,z}^3 \delta_{i,\eta} l_{initial}^\eta dR(\theta_i)\} \mathbf{e}_i^1 \times \mathbf{e}_i^3 \quad (3.51)$$

$$r_i = \sum_j \delta_{i,j} \Delta r^j r_{initial}^j, \quad l_i = \sum_j \delta_{i,j} \Delta l^j l_{initial}^j, \quad \theta_i = e_{i,z}^3 \frac{l_i}{r_i}$$

ここでも同様に(3.27)を考慮すれば、(3.50)は次のように近似される。

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta r^\xi} \approx -2(\tilde{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P}_n) \cdot \sum_{i=0}^n \left\{ -\frac{e_{i,z}^3 \delta_{i,\xi} r_{initial}^\xi l_i}{r_i} dR(\theta_i) \right\} \mathbf{e}_i^1 \times \mathbf{e}_i^3 \quad (3.52)$$

(3.51), (3.52)が同一のスケールをもつことは明らかであろう。このとき、ヤコビアン $J$ はバイアスのない行列となるので、その一般逆行列 $J^+$ もバイアスのない行列となり、適切な更新ベクトルが得られる。以上より、3.3.1.5 項で示したスケーリング変数(3.28)の導入により、一般化Newton-Raphson 法を適用した場合にも、バイアスのない適切な解が得られることがわかる。よって、最適化問題と同様に、FIA においてもスケーリング変数を未知変数として非線形方程式(3.40)~(3.42)を解く。CCA-3 および CCA-4 でそれぞれの未知量に合わせて(3.28)と同様のスケーリング変数を導入すればよい。(CCA-4 は(3.28)と同じ)

CCA-4 では、FIA の適用により、曲率の修正に加えて最適化問題(3.33)の許容性の確認を行うことができる。指定される $k$ の値が小さく $k$ -arc spline 曲線の自由度が低い場合、補間制約や閉曲

線制約を満たす解が存在せず(3.33)が許容解をもたない可能性がある。CCA-4 で解く補間問題の収束を確認することで、あらかじめ最適化問題の許容性を確認することができる。もし、FIA における補間問題が収束しなければ、(3.33)は許容解をもたないので、最適化ステップにおいて(3.33)から制約を除外した無制約最適化問題を解く。この問題の修正により数値解析の発散をあらかじめ防ぐことができる。

### 3.3.3 複数次曲線への拡張

3.3.1 項および 3.3.2 項において、単一の曲線に対して、arc spline 曲線を補間曲線としてもつ  $k$ -離散モデルを求めるアルゴリズムを示した。本項では、このアルゴリズムの複数次曲線への拡張について示す。アルゴリズムを複数次曲線に拡張することにより、複数の柱面を含む建築に対して  $k$ -離散柱面モデルを適用することが可能となる。ここで示す拡張は、複数の曲線に対して個別に  $k$ -離散モデルを求める拡張とは異なり、 $k$ 種類の円弧を共有する複数の  $k$ -離散モデルを求める拡張である。 $N$ 個の曲線  $g_0, g_1, \dots, g_{N-1}$  に対して、最適化問題(3.32)は以下のように拡張される。

$$\begin{aligned}
(P) \quad & \text{find } \Delta \mathbf{P}_0, \dots, \Delta \mathbf{P}_{N-1} \in \mathbb{R}^2, \Delta \theta_0, \dots, \Delta \theta_{N-1} \in \mathbb{R} \\
& \Delta r^0, \dots, \Delta r^{k-1} \in \mathbb{R}, \Delta l^0, \dots, \Delta l^{k-1} \in \mathbb{R} \\
& \delta_{0,0,0}, \dots, \delta_{N-1, n_{N-1}-1, k-1} \in \{0, 1\} \\
& e_{0,0}^3, \dots, e_{N-1, n_{N-1}-1}^3 \in \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}, n_0, \dots, n_{N-1} \in \mathbb{N} \\
\min \quad & E = \sum_{c=0}^{N-1} \left( \sum_{i=0}^n d(\tilde{\mathbf{P}}_{c,i}, \mathbf{P}_{c,i})^2 + \sum_{i=0}^{n-1} d(\tilde{\mathbf{P}}_{c,i}^m, \mathbf{P}_{c,i}^m)^2 \right) \quad (3.53) \\
\text{s. t.} \quad & \Delta r_{min}^j \leq \Delta r^j \leq \Delta r_{max}^j \quad (j = 0, 1, \dots, k-1) \\
& \Delta l_{min}^j \leq \Delta l^j \leq \Delta l_{max}^j \quad (j = 0, 1, \dots, k-1) \\
& h_\xi = 0 \quad (\xi = 0, 1, \dots) \text{ if necessary.}
\end{aligned}$$

複数の曲線を対象とするが、 $k$ 種類の円弧は共有するので、曲率半径  $\{r^j\}$  および弧長  $\{l^j\}$  は、単一曲線の場合と同様にそれぞれ  $k$ 変数であることに注意する ( $k \times N$ ではない)。単一曲線の場合と同様に、離散変数の定数化により次の連続最適化問題に変換する。

$$\begin{aligned}
(P) \quad & \text{find } \Delta \mathbf{P}_0, \dots, \Delta \mathbf{P}_{N-1} \in \mathbb{R}^2, \Delta \theta_0, \dots, \Delta \theta_{N-1} \in \mathbb{R} \\
& \Delta r^0, \dots, \Delta r^{k-1} \in \mathbb{R}, \Delta l^0, \dots, \Delta l^{k-1} \in \mathbb{R} \\
\min \quad & E = \sum_{c=0}^{N-1} \left( \sum_{i=0}^n d(\tilde{\mathbf{P}}_{c,i}, \mathbf{P}_{c,i})^2 + \sum_{i=0}^{n-1} d(\tilde{\mathbf{P}}_{c,i}^m, \mathbf{P}_{c,i}^m)^2 \right) \quad (3.54) \\
\text{s. t.} \quad & \Delta r_{min}^j \leq \Delta r^j \leq \Delta r_{max}^j \quad (j = 0, 1, \dots, k-1) \\
& \Delta l_{min}^j \leq \Delta l^j \leq \Delta l_{max}^j \quad (j = 0, 1, \dots, k-1) \\
& h_\xi = 0 \quad (\xi = 0, 1, \dots) \text{ if necessary.}
\end{aligned}$$

以上で、複数次曲線に対して解くべき最適化問題が得られた。この最適化問題の設定には、単一曲線の場合と同様に初期化アルゴリズムが必要である。CCA-1~CCA-3 は、単一曲線に対する演算を単純に複数次曲線に対して実行すればよい。CCA-4 では、それぞれの曲線で得られる曲率  $\{\kappa_{0,i}\}, \{\kappa_{1,i}\}, \dots, \{\kappa_{N-1,i}\}$  を 1つの集合としてクラスタリングする必要がある。このクラスタリ

ングにより、各曲線の各セグメントと $\{k^0, \dots, k^{k-1}\}$ の対応関係が定まる。CCA 内で用いる FIA に関しては、それぞれの曲線の補間条件式を連立して解けばよいが、単一曲線の場合と比較して補間方程式が不能となる場合が多いので注意を要する。

### 3.4 数値解析

本節では、3.3 節で示した  $k$ -arc spline 近似アルゴリズムの数値解析例を示す。本節で示すすべての数値解析は、Intel® Core™ i9-9980HK プロセッサを搭載する PC を用いて実行されている。各アルゴリズムの実装においては、並列演算処理を適宜組み込んでいる。

#### 3.4.1 単一曲線の数値解析例

まず、単一曲線(Open-A, B, Closed-A, B)に対する解析例を示す。開曲線に対しては、始終点における補間制約として  $G^1$  補間制約(3.24)を設定した。表 3-1 にそれぞれの曲線例に対して採用したパラメータ値を、図 3-8~図 3-11 にそれぞれの解析結果を示す。図 3-8~図 3-11 から、すべての解析例で最適化問題は正しく収束しており、得られた  $k$ -arc spline 曲線が対象曲線を十分な精度で近似していることがわかる。特に、Closed-B のような曲率値域の大きな曲線に対しても、適切にパラメータ値(特に円弧の種類  $k$  とモジュール  $M$ )を設定することで、 $k$ -arc spline 曲線は十分な精度で対象を近似することがわかる。実際の設計においては、個々の設計条件に応じて近似精度を確認しながら円弧の種類  $k$  とモジュール  $M$  を試行錯誤で設定する必要があるが、十分小さな  $k$  に対して十分な精度の  $k$ -arc spline 曲線が得られることが解析結果から明らかである。また、図 3-8~図 3-11 中(c)を見ると、すべてのスケール変数が初期値から大きく変化していないことがわかり、初期化アルゴリズムの精度の高さがわかる。さらに、表 3-2 に各解析例の最適化プロセスに関する詳細な結果を示す。すべての解析例において数秒~数十秒程度で解曲線が得られるが、この解析時間の大部分を最適化プロセスが占めている。高速かつ十分な精度の解析を行うためには、最適化問題を解く際に設定する最適性閾値  $\varepsilon_{opt}$  および許容性閾値  $\varepsilon_{feas}$  を適切に設定する必要がある。許容性閾値  $\varepsilon_{feas}$  に関しては、使用する CAD ソフトウェアの環境やプロジェクトごとに許容可能な誤差を考慮して設定する必要があるが、本解析例においては CAD ソフトウェア Rhinoceros® 上の距離に関するデフォルトの零閾値  $1.0e-3$  に対して安全率 0.1 を乗じた  $1.0e-4$  を採用している。最適性閾値  $\varepsilon_{opt}$  は  $1.0e-4$ ~ $1.0e-6$  程度が設定されることが多いが、問題によって適切な値は異なる。最適化アルゴリズム(準ニュートン法または逐次二次計画法)内で最適性判定を行う際には、問題のスケールを考慮してスケールされた閾値  $\varepsilon'_{opt} = \alpha \varepsilon_{opt}$  を用いて判定を行うが [63]、適切な基準値  $\varepsilon_{opt}$  の設定は計算コストの観点で非常に重要である。そこで、複数の曲線に対して最適性閾値と解曲線の関係を数値解析により検証した。ここでは、Open-B に関する検証結果を示す。図 3-12 に曲線の外観に関する結果を、表 3-3 に最適化プロセスの詳細結果を示す。この結果を見ると、0.01 未満の小さな閾値を設定した場合、解曲線の精度はほとんど同じであるにも関わらず、収束に要するステップ数が大幅に増大し計算時間が増加することがわかる。この Open-B を含む複数の曲線に対する検証結果から、計算コストと近似精度のバランスを考慮すると、 $\varepsilon_{opt} = 0.01$ ~ $0.1$  程度が適切な閾値である。

表 3-1 近似アルゴリズムのパラメータ

	Open-A	Open-B	Closed-A	Closed-B
$k$	5	6	6	9
$M$	4.0	2.0	2.0	1.0
$\varepsilon_{opt}$	0.01	0.01	0.01	0.01
$\varepsilon_{feas}$	$1.0 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-4}$

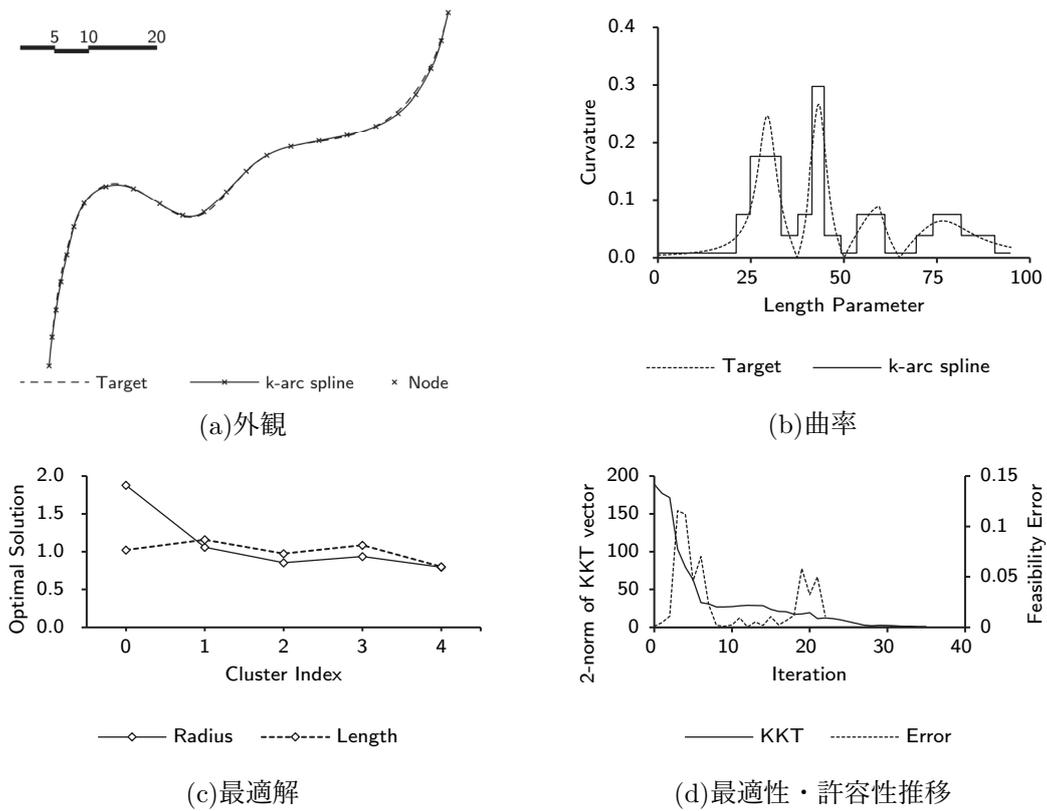


図 3-8 解析結果 Open-A

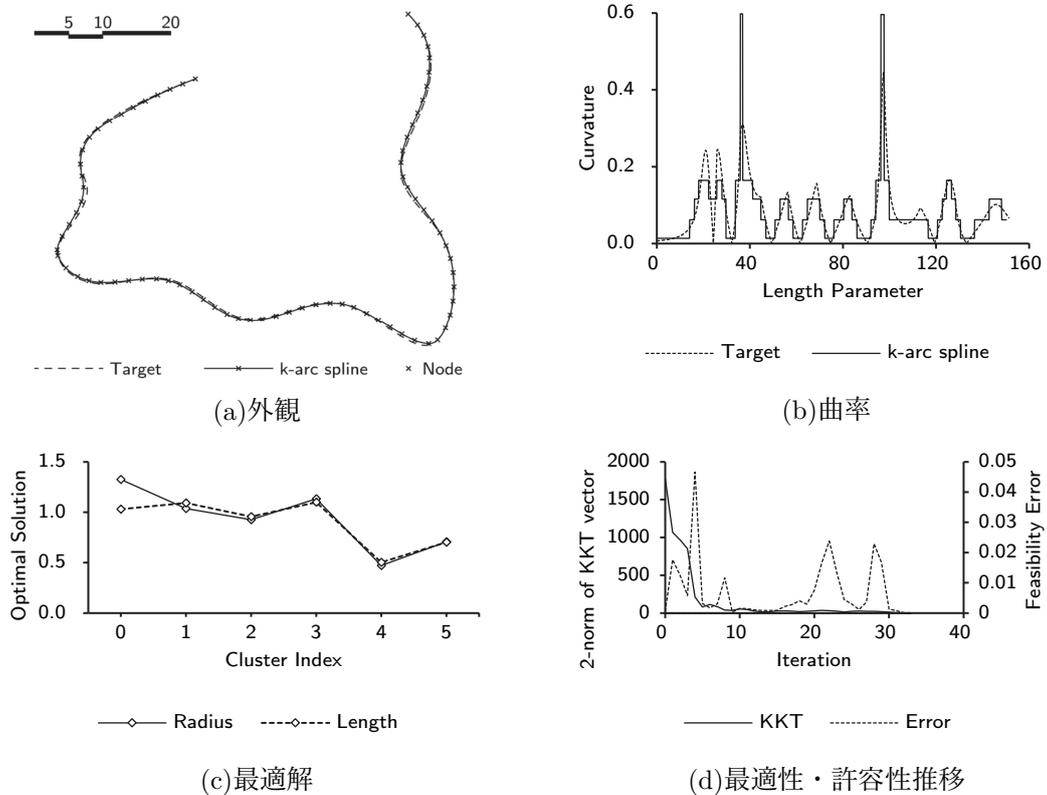


図 3-9 解析結果 Open-B

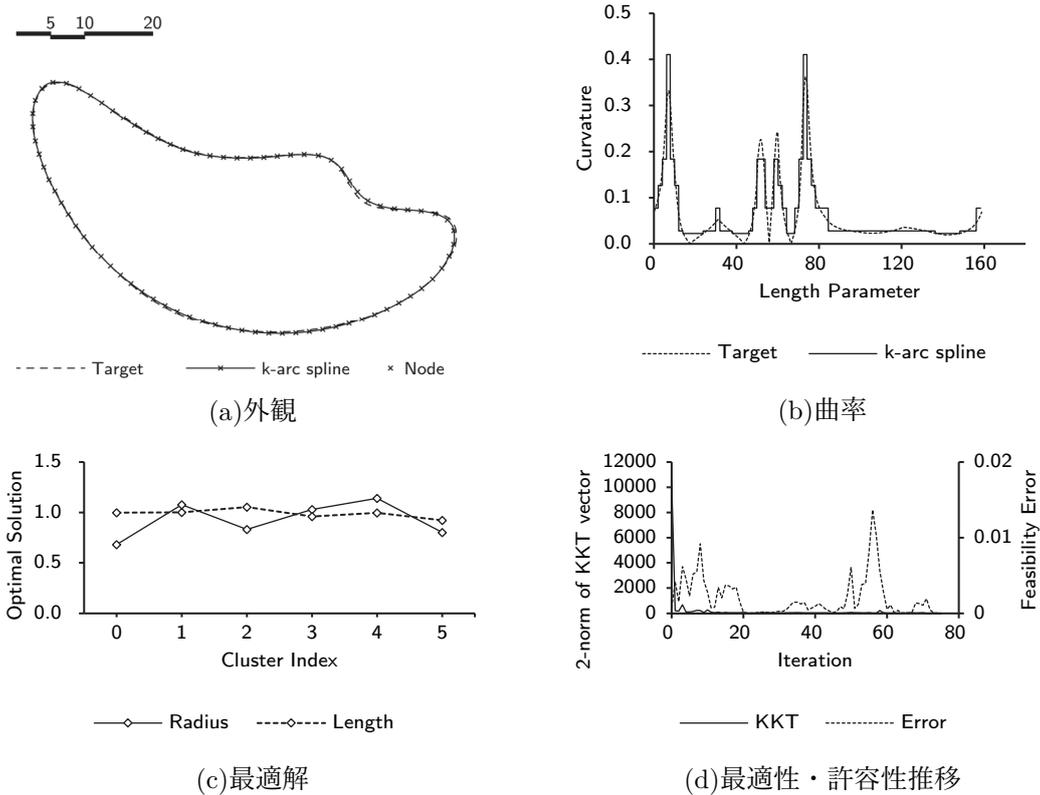


図 3-10 解析結果 Closed-A

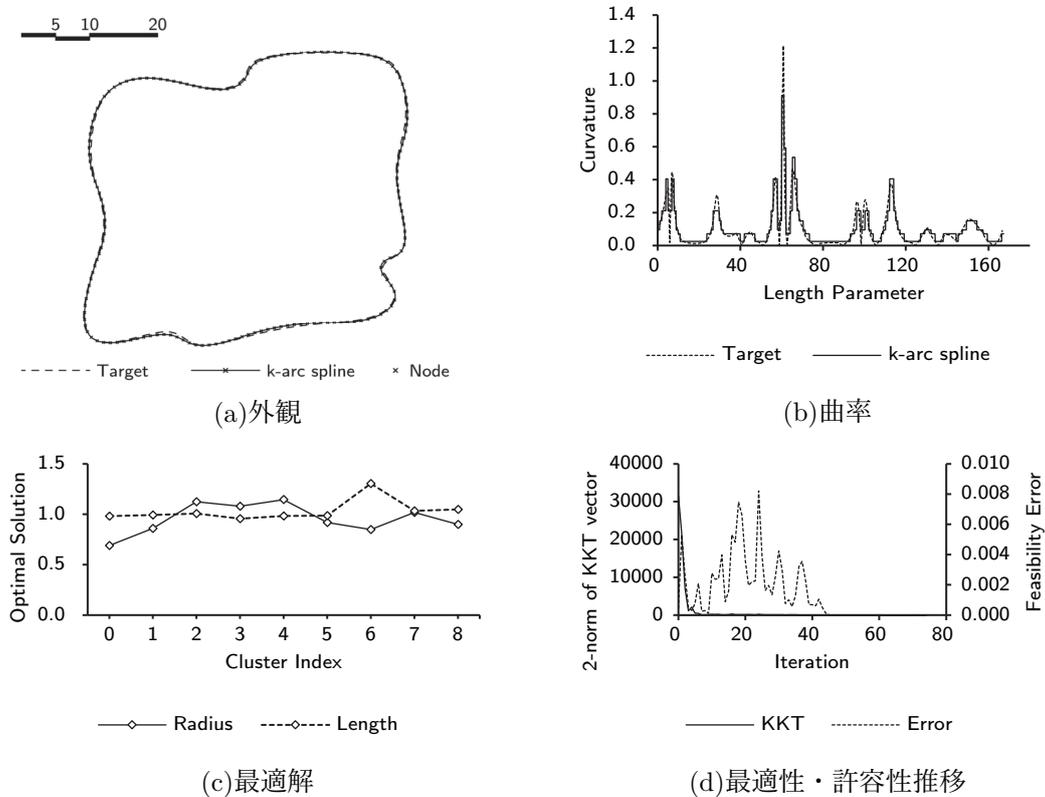


図 3-11 解析結果 Closed-B

表 3-2 数値解析の詳細結果

	Open-A	Open-B	Closed-A	Closed-B
セグメント数 $n$	23	76	79	167
$\ KKT_{opt}\ $	0.415	2.21	0.547	3.03
$\ ERROR_{opt}\ $	0.000046	0.000044	0.000002	0.000046
収束回数	35	33	75	74
計算時間[s]	0.86	3.8	10.7	40.4

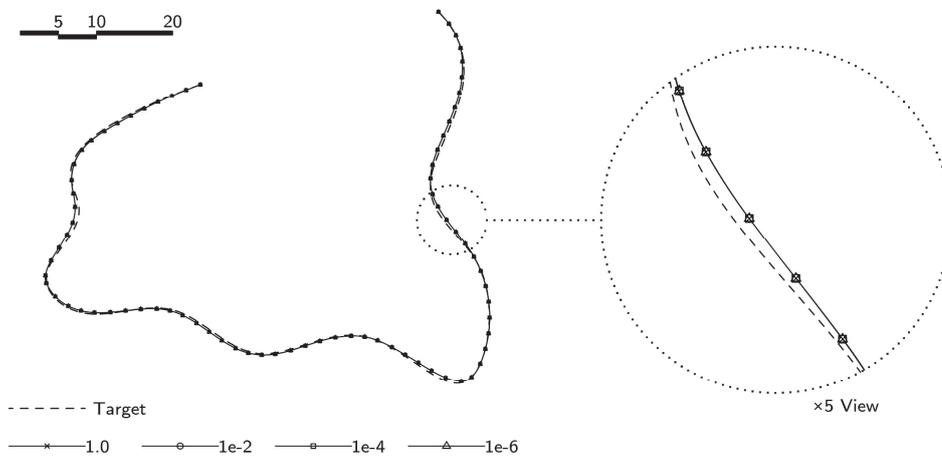


図 3-12 最適性閾値に関する検証結果(曲線外観)

表 3-3 最適性閾値に関する検証結果(計算コスト比較)

	Initial	$\epsilon_{opt} = 1.0$	$\epsilon_{opt} = 10^{-2}$	$\epsilon_{opt} = 10^{-4}$	$\epsilon_{opt} = 10^{-6}$
$\ KKT\ $	1780.1	2.21	2.21	1.40e-1	3.76e-4
$\ ERROR\ $	6.84e-4	4.4e-5	4.4e-5	2.6e-8	7.3e-9
最大離隔距離	2.77	0.547	0.547	0.543	0.542
収束回数	-	33	33	53	68
計算時間[s]	-	3.8	3.8	6.5	8.4

### 3.4.2 複数曲線の数値解析例

本項では、複数曲線に対する解析例を示す。図 3-13 にランダムに生成した 15 個の曲線に対する解析結果を示す。それぞれの曲線は円弧上の 15 等分割点を法線方向にランダムに移動し一様ノット 3 次 B-spline 曲線で補間した閉曲線である。ここではパラメータとして  $k = 30$ ,  $M = 1.0$

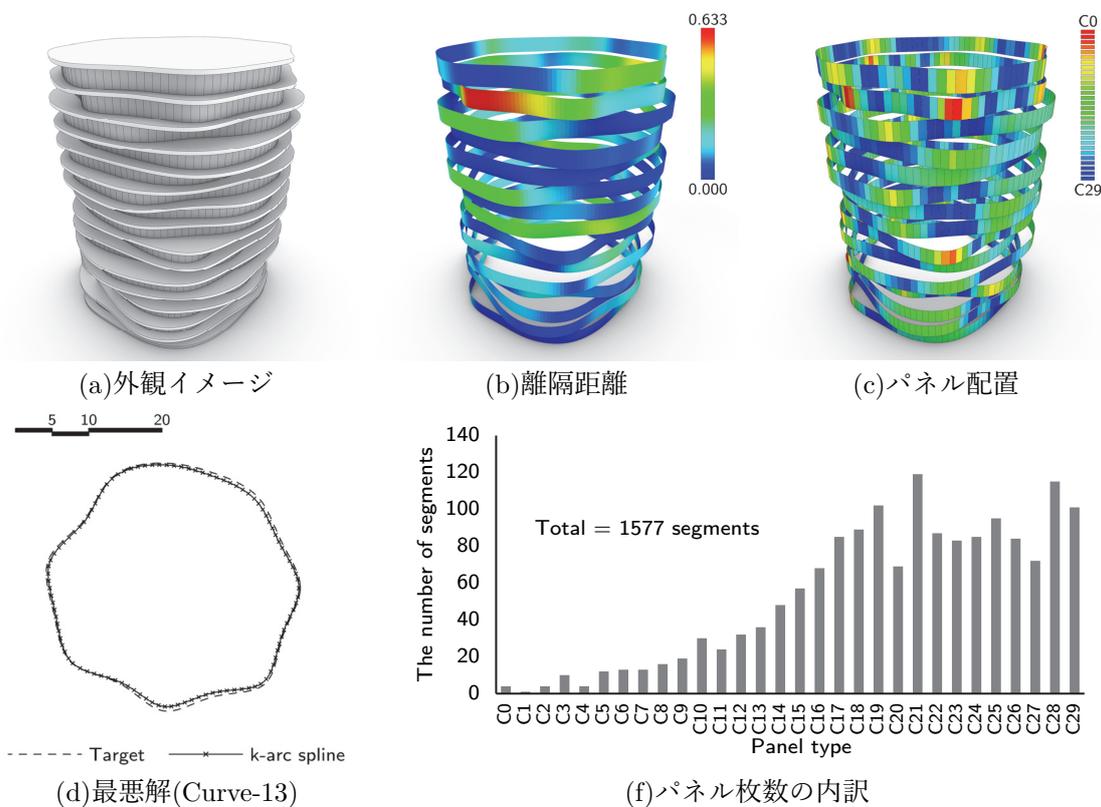


図 3-13 複数曲線に対する解析結果

を設定した。図 3-13(d) の Curve-13 が最も近似精度の低い曲線であるが、最大離隔距離が 0.633(曲線長に対する比率  $\approx 1/500$ ) であり十分な精度を示している。1600 枚程度のパネルが 30 個の型枠のみで成型可能であり、必要となる型枠数を大幅に削減できている。

### 3.5 結言

本章では、一般柱面の離散モデルとして、補間曲面の連続性と要素反復性を考慮した特殊な離散モデルである  $k$ -離散柱面モデルの定義を示し、任意の連続な柱面からこの離散モデルを得るアルゴリズムを示した。3.2 節では、本章で扱う柱面の離散モデルの本質が準線の離散モデルであることを示し、 $k$ -離散柱面モデルを定義するために、平面曲線に対する特殊な離散モデルとして、 $k$ 種類の部分曲線で  $G^1$  補間可能な離散モデルを  $k$ -離散モデルとして定義した。さらに、この離散モデルの中で補間曲線が arc spline 曲線となるモデルが、対象曲線の曲率の離散化とそのクラスタリングにより得られることを示し、このモデルがもつ補間曲線を特に  $k$ -arc spline 曲線として定義した。3.3 節では、任意の平面曲線に対して、3.2 節で導いた  $k$ -arc spline 曲線を補間曲線としてもつ  $k$ -離散モデルを求めるアルゴリズムを示した。柱面の準線に対してこのアルゴリズムを適用することで、 $k$ 種類の補間曲面( $k$ 種類の円弧を準線とする柱面)で  $G^1$  補間可能な  $k$ -離散柱面

---

モデルが得られる。3.4節では、3.3節で示したアルゴリズムの数値解析例を示し、開曲線および閉曲線に対して近似精度の高い $k$ -離散モデルが得られることを示した。また、アルゴリズムを複数曲線に拡張することで、実際のパネリング問題における本アルゴリズムの適用範囲の広さを示した。

## 第4章 Cylindrical ストリップ・メッシュ

### 4.1 概説

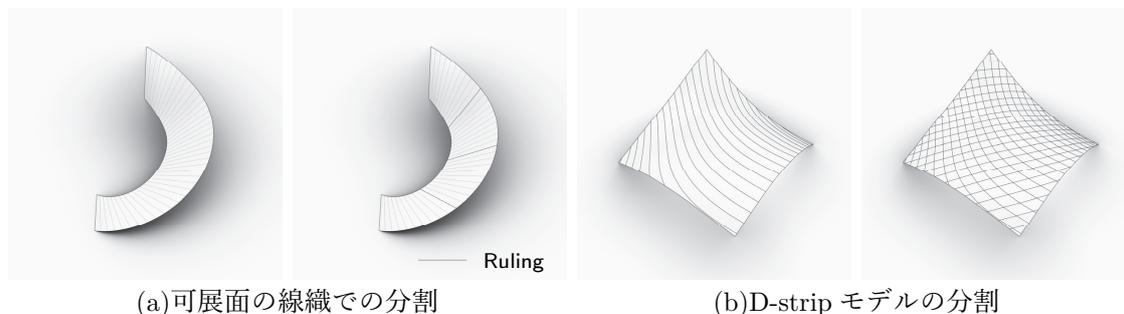
本章では、滑らかな曲面の特定の共役座標系に対する半離散モデルである cylindrical strip モデル(C-strip モデル)およびその離散モデルとして本論文で新たに定義する cylindrical メッシュについて述べる。本章では、特に、任意の曲面から双方のモデルを求める方法の確立を目的とする。

C-strip モデルは、developable strip モデル(D-strip モデル)に属するモデルであり、D-strip モデルと併せて [12]において示されたモデルである。両モデルは、複数の帯状の可展面(ストリップ)を線織でない境界曲線に沿って $G^0$ 連続に接続した区分的滑らかな曲面である。各ストリップを適当な間隔で抽出した線織で分割することで、単曲率モデル(2.4.1 項参照)のパネリング曲面が得られることは明らかであろう(図 4-1)。このとき得られるパネリング曲面は、ストリップ方向に $G^1$ 連続であり、当該方向にクリースがない連続性の高いパネリング曲面である。

D-strip モデルが可展面(接線曲面+錐面+柱面)で構成される区分的滑らかな曲面であるのに対して、C-strip モデルは柱面のみで構成される区分的滑らかな曲面である。可展面パネルが任意の曲面パネルと比較して安価に製造できることを 2.4.1 項で述べたが、柱面パネルは可展面パネルの中で最も成型が容易であり、より安価に製造することが可能である [6] [8]。そのため、パネル製造の観点で C-strip モデルは D-strip モデルより優れたモデルである。

D-strip モデルは、滑らかな曲面 $S$ の共役座標系に対する半離散モデルとして定義されるモデルである [12]。ここで、C-strip モデルと D-strip モデルの幾何学的な関係を考慮すれば、C-strip モデルが、滑らかな曲面 $S$ の“特定の”共役座標系に対する半離散モデルとして定義されることは明らかであろう。本章では、4.2 節において、この C-strip モデルを定める曲面 $S$ の共役座標系を柱面共役座標系として新たに定義しその特徴付けを示す。[12]において幾何学的性質に基づいて D-strip モデルと関連付けられた C-strip モデルを、共役座標系との対応関係に厳密に位置付けることで、C-strip モデルの性質を明らかにする。

半離散モデルの定義から明らかに、曲面 $S$ の柱面共役座標系による径数付け $\alpha(u, v)$ が定まれば、



(a)可展面の線織での分割

(b)D-strip モデルの分割

図 4-1 D-strip モデルの分割



図 4-2 D-strip モデルの位置づけ

半離散化 $\mathbf{x}(u, j\Delta v)$ (または $\mathbf{x}(i\Delta u, v)$ )により埋め込み写像を定めることで C-strip モデルが得られる。任意の径数付け $\mathbf{y}(s, t)$ により径数付けられた曲面に対して、柱面共役座標系による径数付け $\mathbf{x}(u, v)$ を定めるということは、 $(u, v)$ が柱面共役座標系となるような座標変換 $s = s(u, v), t = t(u, v)$ を定めることである。しかし、2.4.2 項でも述べたように、任意の曲面・任意の径数付けに対してこのような座標変換を解析的に求めることは困難であるので、数値解析的なアプローチが必要となる。そこで、本論文では、数値解析による方法として2つの方法 A(4.3 節)・B(4.4 節)を提案する。方法 A は、柱面共役座標系のアイソパラメータ曲線を数値積分により求める方法である。柱面共役座標系は、一方のアイソパラメータ曲線に沿って他方のアイソパラメータ方向が常に平行であるという特別な性質をもつため、曲面上の1点とその点における接ベクトルを1つ定めることで、対応するアイソパラメータ曲線を定めることができる。境界条件(初期点+初期接ベクトル)を与え数値積分を行うことで、アイソパラメータ曲線の離散解 $\hat{\mathbf{p}}_j = \{\mathbf{p}_{j,i}\}$ を求めることができ、この離散解 $\hat{\mathbf{p}}_j$ が半離散埋め込み写像 $\mathbf{x}_j(u) = \mathbf{x}(u, j\Delta v)$ に対応する。方法 B は、C-strip モデルに離散対応する PQ メッシュを求める方法である。半離散モデル(2.101)および離散モデル(2.97)の定義に基づけば、与えられた曲面のある径数付けに基づく半離散モデルを求めることは、同じ径数付けに基づく離散モデルを求めることと本質的に等価であることは明らかであろう。離散モデルの一方の離散幅 $\Delta$ に関して、 $\Delta \rightarrow 0$ となるような細分割を行えばよい。共役座標系の半離散モデルおよび離散モデルは図 4-2 に示す対応関係をなすので、柱面共役座標系の場合も同様に、C-strip モデルを求めることは対応する PQ メッシュを求めることと本質的に等価である。本論文では、この PQ メッシュを特に cylindrical メッシュとして 4.2.3 項で定義する。

方法 A では離散曲線の集合が得られ、方法 B では四辺形メッシュが得られるため、両手法で得られる解はともに離散的な解である。これらの離散解から区分的滑らかな曲面として厳密な C-strip モデルを得るためには、B-spline 形式や Nurbs 形式による再補間が必要となる。そこで、本論文では、B-spline 曲線 $\mathbf{p}_i$ により表された半離散曲面 $\{\mathbf{p}_i\}$ から、曲線間を $(1, n)$ の B-spline 曲面で補間することで D-strip モデルを得る方法 [12]を C-strip モデルに拡張し、方法 A および方法 B で得られる離散解から厳密な C-strip モデルを得る方法を 4.5 節で示す。

改めて、本章の構成は以下の通りである。まず、4.2 節において、既往モデル(D-strip モデルおよび PQ メッシュ)との幾何学的な対応関係から柱面共役座標系を定義し、その定義を用いて、

半離散モデルおよび離散モデルとして C-strip モデルおよび cylindrical メッシュを定義する。次に、4.3 節および 4.4 節において、C-strip モデルを求める 2 つの方法 A・B についてそれぞれ述べる。4.5 節では、方法 A・B で得られる離散解から厳密な C-strip モデルを求める方法について述べる。最後に、4.6 節において結言を述べる。

## 4.2 準備

本節では、C-strip モデルおよび cylindrical メッシュに関する基本的な事項について整理する。まず、4.2.1 項において、両モデルの一般形である D-strip モデルおよび PQ メッシュの定義を整理する。次に、4.2.2 項において、可展面モデルと柱面モデルの関係を考える上で基本となる可展面と柱面の性質について整理する。続いて、4.2.3 項において、柱面モデルに対応する共役座標系として柱面共役座標系を定義し、その定義を基本として C-strip モデルおよび cylindrical メッシュを定義する。4.2.4 項では、柱面共役座標系に対応する共役場の条件を導き、導かれた条件により柱面共役場を定義する。さらに、4.2.5 項において、4.2.4 項で定義する柱面共役場の条件を離散曲面に拡張し、離散曲面上の柱面共役場を定義する。最後に、4.2.6 項において、柱面共役座標系の幾何学的解釈について整理し、当該座標系の存在根拠について考察する。図 4-3 に本章で扱うモデルの対応関係を示す。

### 4.2.1 可展面モデル

まず、PQ メッシュについて整理する。PQ メッシュの単純な幾何学的側面での定義については定義 2-18 で示した。また、滑らかな曲面  $S$  の離散モデルとして PQ メッシュを考えたとき、PQ メッシュが曲面  $S$  の何らかの共役座標系に対する離散モデルであることについても 2.4.3 項で触れた。ここでは、この共役座標系との対応関係から滑らかな曲面  $S$  の離散モデルとして改めて PQ メッシュを次のように定義する。

**定義 4-1** 滑らかな曲面  $S$  の離散モデル  $\{p_{ij}\}$  が、 $S$  の共役座標系による径数付け  $\mathbf{x}(u, v)$  により

$$\forall i, \forall j, p_{ij} = \mathbf{x}(i\Delta u, j\Delta v)$$

と定められるとき、離散モデル  $\{p_{ij}\}$  を PQ メッシュという。ここで、 $\Delta u$ 、 $\Delta v$  は各方向の任意の離散幅である。

簡単のために、曲面  $S$  が 1 つの共役座標系で被覆されることを仮定した。曲面  $S$  を複数の共役座標系で被覆する場合、それぞれの座標系を離散化して得られる単純な構造の四辺形メッシュ



図 4-3 可展面モデルと柱面モデルの関係

を、境界条件を考慮して組み合わせればよい。このとき得られる PQ メッシュは特異点をもつ四辺形メッシュとなる。以後の議論では、簡単のために、曲面  $S$  が 1 つの共役座標系で被覆されることを仮定する。定義 4-1 に基づく PQ メッシュは離散化によって生じる誤差を除いて定義 2-18 に矛盾しない。つまり、定義 4-1 により定義される PQ メッシュは次の命題を満たす。

**命題 4-1** PQ メッシュ  $M_{PQ} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$  に関して、

$$\forall f \in \mathcal{F}, Q_f \text{ is planar}$$

ここで、 $Q_f$  は  $f$  に対応する埋め込み空間上の四辺形である。離散化による誤差を考慮すれば、この命題は次のように表すことができる。離散幅  $\delta$  に対する四辺形  $Q_f$  の平面性を表す関数  $g_f(\delta)$  (e.g. 正規化されたフェース対角線間の距離) を考え、 $Q_f$  が平面であることが  $g_f(\delta) = 0$  によって特徴付けられるとする。このとき、上記の命題はすべてのフェース  $f \in F$  に関して次が成り立つことと同値である。

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |g_f(\delta)| < \varepsilon$$

ここでは簡単のために、離散化による誤差を厳密に表現しない形式で連続系との対応関係を表現する。実際に PQ メッシュの厳密解を求める場合は、最適化問題などを利用して離散化によって生じる誤差を解消する必要がある [29] [30]。

次に D-strip モデルについて整理する。D-strip モデルについても、PQ メッシュと同様に、2.4.4 項において共役座標系との対応関係について触れた。改めてその定義を示すと次のようになる。

**定義 4-2** 滑らかな曲面  $S$  の半離散モデル  $\{\mathbf{p}_i\}$  が、 $S$  の共役座標系による径数付け  $\mathbf{x}(u, v)$  により

$$\forall i, \mathbf{p}_i = \mathbf{x}(i\Delta u, v) \text{ or } \mathbf{p}_i = \mathbf{x}(u, i\Delta v)$$

と定められるとき、半離散モデル  $\{\mathbf{p}_i\}$  を Developable strip モデル (D-strip モデル) という。ここで、 $\Delta u$ 、 $\Delta v$  は各方向の任意の離散幅である。

定義 4-1 および定義 4-2 から、滑らかな曲面上の共役座標系・D-strip モデル・PQ メッシュが図 4-2 に示す関係であることが改めて確かめられる。D-strip モデルと PQ メッシュの関係から、PQ メッシュを 1 方向に細分割すること、つまり、1 方向の離散幅の零極限をとることにより PQ メッシュは D-strip モデルに収束する。この関係と可展面が平面の 1 パラメータ族の包絡面であるという性質から、D-strip モデルを構成するすべてのストリップ  $D_i$  が可展面であることは明らかであろう。つまり、D-strip モデル  $\{\mathbf{p}_i\}$  に関して次の命題が成り立つ。

**命題 4-2** D-strip モデル  $\{\mathbf{p}_i\}$  の隣接関係にある曲線  $\mathbf{p}_i(v)$ 、 $\mathbf{p}_{i+1}(v)$  に関して、 $t \in [0, 1]$  として

$$\mathbf{x}_{i,i+1}(t, v) = (1-t)\mathbf{p}_i(v) - t\mathbf{p}_{i+1}(v)$$

により径数付けられる線織面  $D_{i,i+1}$  は可展面である。このとき、 $\mathbf{r} = \mathbf{p}_{i+1}(v) - \mathbf{p}_i(v)$  は可展面の線織に対応する。

PQ メッシュの場合と同様に、離散化による誤差が生じるため上記の命題は厳密には成立しないことに注意する。

### 4.2.2 可展面と柱面

可展面は直線の 1 パラメータ族である線織面に属する曲面である。線織面が可展面であることは以下のように定義される [14]。

**定義 4-3** 線織面  $S$  が  $S$  上の任意の点においてガウス曲率  $K = 0$  を満たすとき  $S$  を可展面という。

一般的に、ガウス曲率が恒等的に 0 となる曲面は平坦な曲面と呼ばれ、局所的に平面に等長写像可能な曲面である。上記の定義から可展面に関して次の命題が導かれる。

**命題 4-3** 線織面  $S$  が可展面  $\iff$  線織面  $S$  の法ベクトル  $\mathbf{n}$  は線織に沿って定ベクトル

[証明] まず、 $\Rightarrow$  を示す。線織面  $S$  が可展面でありガウス曲率  $K = 0$  であるので、主曲率  $\kappa_1 = 0$ ,  $\kappa_2 \neq 0$  とできる。ここでは  $\kappa_1 = 0$ ,  $\kappa_2 = 0$  は自明なので考えない。主曲率方向の接ベクトルを  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  とすると、 $\mathbf{e}_1$  方向の法ベクトル  $\mathbf{n}$  の微分は、(2.6) にワインガルテンの公式(2.17)を適用して次のように得られる。

$$d\mathbf{n}(\mathbf{e}_1) = [\mathbf{x}_u \quad \mathbf{x}_v] W_p \bar{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

ここで、 $S$  の何らかの径数付けを  $\mathbf{x}$  とし、主曲率方向の性質として  $W_p \bar{\mathbf{e}}_1 = -S_p \bar{\mathbf{e}}_1 = -\kappa_1 \bar{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0}$  を用いた。(4.1) より  $\mathbf{e}_1$  方向に法ベクトルは変化しない。可展面では  $\kappa_1 = 0$  に対応する方向が線織方向であるので線織に沿って法ベクトルが変化しないことが示せた。

次に、 $\Leftarrow$  を示す。線織方向  $\mathbf{r}$  に対する法ベクトル  $\mathbf{n}$  の微分が  $\mathbf{0}$  であるので次の関係が導ける。

$$\begin{aligned} d\mathbf{n}(\mathbf{r}) &= [\mathbf{x}_u \quad \mathbf{x}_v] W_p \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \\ \therefore W_p \bar{\mathbf{r}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$W_p = -S_p$  の関係から、 $\bar{\mathbf{r}}$  は  $S_p$  の零固有値に対する固有ベクトルとなるので、 $\mathbf{r}$  は主曲率方向に一致するとともに当該方向の主曲率は 0 である。つまり、ガウス曲率  $K = 0$  であり  $S$  は可展面である。□

この命題から、可展面が線織に沿ってある平面と接していることがわかり、可展面が平面の 1 パラメータ族の包絡面であるという性質が導かれる。次に、線織面  $S$  を 2 つの空間曲線によって表すことを考えると、 $S$  は 2 つの空間曲線  $\mathbf{p}(u)$ ,  $\mathbf{q}(u)$  間の線形補間により次のように径数付けられる。

$$\mathbf{x}(u, v) = (1 - v)\mathbf{p}(u) + v\mathbf{q}(u) \quad (4.3)$$

$\mathbf{r}(u) = \mathbf{q} - \mathbf{p}$  が線織面  $S$  の線織に対応することは明らかであろう。この径数付けを用いれば、可展面は次のように特徴付けられる。

**命題 4-4** 線織面  $S$  が可展面  $\iff \forall u, \det(\mathbf{p}_u, \mathbf{q}_u, \mathbf{q} - \mathbf{p}) = 0$

[証明] まず、 $\Rightarrow$  を示す。(4.3) の径数付けが与えられたとき、法ベクトルおよび第二基本量が次のように得られる。

$$\mathbf{n} = \frac{\{(1-v)\mathbf{p}_u + v\mathbf{q}_u\} \times (\mathbf{q} - \mathbf{p})}{\|\{(1-v)\mathbf{p}_u + v\mathbf{q}_u\} \times (\mathbf{q} - \mathbf{p})\|} \quad (4.4)$$

$$L = \mathbf{n} \cdot \{(1-v)\mathbf{p}_{uu} + v\mathbf{q}_{uu}\}, \quad M = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{q}_u - \mathbf{p}_u), \quad N = 0$$

定義 2-8 よりガウス曲率  $K = LN - M^2/EG - F^2$  なので、 $K = 0$  のとき、上式より  $M = 0$  となり次が得られる。

$$\begin{aligned} \{[(1-v)\mathbf{p}_u + v\mathbf{q}_u] \times (\mathbf{q} - \mathbf{p})\} \cdot (\mathbf{q}_u - \mathbf{p}_u) &= 0 \\ \therefore [\mathbf{p}_u \times (\mathbf{q} - \mathbf{p})] \cdot \mathbf{q}_u &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

これが恒等的に成立するので、 $\Rightarrow$  が示せた。

次に、 $\Leftarrow$  を示す。 $\forall u, \det(\mathbf{p}_u, \mathbf{q}_u, \mathbf{q} - \mathbf{p}) = 0$  が成立するとき、(4.5) の逆をたどることで、 $\forall u, M = 0$  が示せるので、(4.4) から  $\forall u, \forall v, K = 0$  が示せる。□

また、可展面に関して次の定理が重要である [14]。

**定理 4-1** 可展面は以下の 3 曲面(図 4-4)またはそれらを滑らかにつなぎ合わせた曲面で尽くされる。

1. 柱面：平行な直線の軌跡が定める曲面
2. 錐面：定点を通る直線の軌跡が定める曲面
3. 接線曲面：空間曲線の接線の軌跡が定める曲面

それぞれの曲面を定める直線が可展面の線織となることは明らかであろう。この定理から明らかに、可展面の中で柱面は次のように特徴付けられる。

**命題 4-5** 可展面  $S$  が柱面  $\Leftrightarrow$  可展面  $S$  のすべての線織は平行である

最後に、可展面と共役座標系の関係を整理する。可展面  $S$  が、共役座標系により  $\mathbf{x}(u, v)$  として径数付けられている場合を考える。可展面に関してガウス曲率  $K = 0$  であるので、可展面  $S$  の型作用素  $S$  は零固有値をもち、零固有値に対応する固有ベクトルが線織方向に対応する。この固有ベクトルを  $\bar{\mathbf{r}} = (\xi, \eta)$  とすると、次式が得られる。

$$S\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

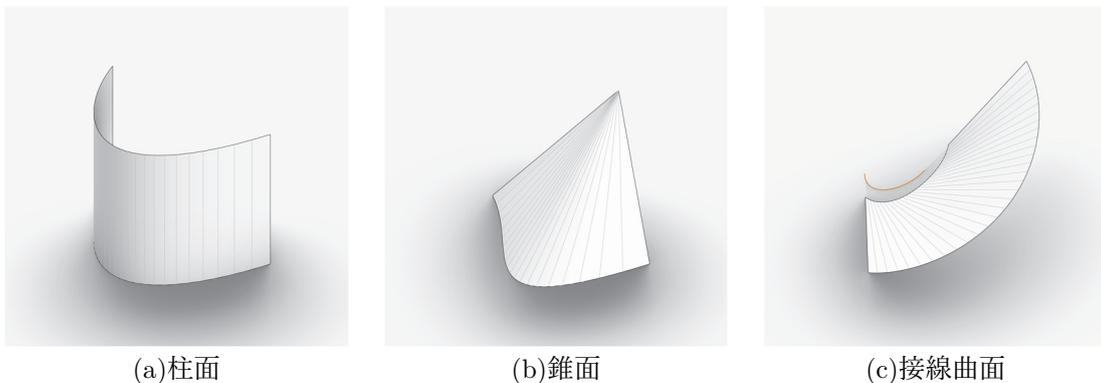


図 4-4 可展面の分類

共役座標系による径数付けであるので、命題 2-5 から  $M = 0$  である。上式に適用すれば、

$$\begin{cases} L\xi = 0 \\ N\eta = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

上式から  $L = 0$  or  $N = 0$  であるが、 $S$  が正則曲面でありかつ平面でなければ  $L = 0$  and  $N = 0$  でない。 $L \neq 0$  を仮定すれば、 $N = 0$  であり固有ベクトルは  $\bar{\mathbf{r}} = (0, 1)$  となり、線織方向は  $v$  方向の接ベクトル  $\mathbf{x}_v$  に一致する。以上より、可展面の共役座標系を考えると、一方のパラメータ方向が線織方向に必ず一致することがわかる。(4.4) による径数付けは共役座標系による径数付けの 1 つである。

### 4.2.3 Cylindrical strip モデルと Cylindrical メッシュ

PQ メッシュおよび D-strip モデルの定義について 4.2.1 項で整理した。ここでは、PQ メッシュに属するモデルである cylindrical メッシュおよび D-strip モデルに属するモデルである C-strip モデルの定義を示す。

D-strip モデルは定義 4-2 において連続な曲面の共役座標系に対する半離散モデルとして定義された。C-strip モデルは D-strip モデルを柱面に限定したモデルであるので、同様に曲面の共役座標系に対する半離散モデルとして定義できる。つまり、C-strip モデルを定義するためには、C-strip モデルを導く共役座標系を定義すればよい。命題 4-2 から、共役座標系の半離散化によって得られる曲線  $\mathbf{p}_i(v)$ ,  $\mathbf{p}_{i+1}(v)$  に対して、 $\mathbf{r} = \mathbf{p}_{i+1}(v) - \mathbf{p}_i(v)$  は両曲線間に張られる可展面  $D_{i,i+1}$  の線織に対応する。また、命題 4-5 から、柱面は線織の平行性により特徴付けられる可展面であるので、以下が成り立てば  $D_{i,i+1}$  は柱面となる。

$$\forall v_1, \forall v_2, \mathbf{r}(v_1) \parallel \mathbf{r}(v_2) \quad (4.8)$$

以上の考察を共役座標系に置き換え、C-strip モデルを導く共役座標系として柱面共役座標系を以下のように定義する。

**定義 4-4** 曲面  $S$  の座標系  $(u, v)$  とその埋め込み写像を  $\mathbf{x}$  とする。このとき座標系  $(u, v)$  が

$$\forall u, \forall v_1, \forall v_2, \mathbf{x}_u(u, v_1) \parallel \mathbf{x}_u(u, v_2)$$

を満たす共役座標系であるとき、座標系  $(u, v)$  を柱面共役座標系という。

$\mathbf{x}(u, v)$  により径数付けられた曲面の接ベクトル場  $\mathbf{x}_u(u, v)$  を考え、このベクトル場を  $u = \tilde{u} = \text{const.}$  に限定したとき、すべての接ベクトルが平行となり、これが任意の  $\tilde{u}$  で成り立つ座標系である。ここで、平行条件を満たす方向を  $u$  方向の接ベクトルとしたが、 $v$  方向としても構わない。以後の議論では、平行条件を満たす方向を  $u$  方向の接ベクトルとして議論する。この座標系は次のように特徴付けられる。

**命題 4-6** 曲面  $S$  の座標系  $(u, v)$  に関して、

$$\text{柱面共役座標系}(u, v) \iff \forall \mathbf{p} \in S, \mathbf{x}_{uv} \in \text{span}(\mathbf{x}_u)$$

[証明] まず、 $\Rightarrow$  を示す。座標系  $(u, v)$  が柱面共役座標系であるので、定義 4-4 から、 $S$  上の任意の  $iso-u$  曲線上で  $u$  方向の接ベクトル  $\mathbf{x}_u$  はすべて平行である。つまり、以下が成り立つ。

$$\exists f: S \rightarrow \mathbb{R}, \exists \mathbf{g}: S \rightarrow \mathbb{E}^3, \mathbf{x}_u = f(u, v)\mathbf{g}(u, v), \|\mathbf{g}(u, v)\| = 1, \mathbf{g}_v = \mathbf{0}, f(u, v) \neq 0 \quad (4.9)$$

このとき以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uv} &= f_v(u, v)\mathbf{g}(u, v) \\ &= \frac{f_v(u, v)}{f(u, v)}\mathbf{x}_u(u, v) \end{aligned} \quad (4.10)$$

これは、 $\mathbf{x}_{uv} \in \text{span}(\mathbf{x}_u)$ に他ならない。

次に、 $\Leftarrow$ を示す。 $\forall \mathbf{p} \in S, \mathbf{x}_{uv} \in \text{span}(\mathbf{x}_u)$ なので、 $S$ 上のあるスカラー関数 $f$ が存在して、 $\mathbf{x}_{uv} = f(u, v)\mathbf{x}_u$ と書ける。ここで、 $\mathbf{x}_u$ を正規化したベクトルの $v$ に関する微分が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} &= -\frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv}}{\|\mathbf{x}_u(u, v)\|^3} \mathbf{x}_u + \frac{1}{\|\mathbf{x}_u(u, v)\|} \mathbf{x}_{uv} \\ &= -\frac{\mathbf{x}_u \cdot f \mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u(u, v)\|^3} \mathbf{x}_u + \frac{1}{\|\mathbf{x}_u(u, v)\|} f \mathbf{x}_u \\ &= 0 \\ \therefore \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} &= \mathbf{g}(u) \end{aligned} \quad (4.11)$$

ここで、 $\mathbf{g}(u)$ は $v$ に依存しないベクトルである。ある $u = \tilde{u} = \text{const.}$ を考えると、右辺は定ベクトルとなるので、 $\mathbf{x}_u(\tilde{u}, v)$ は任意の $v$ ですべて $\mathbf{g}(\tilde{u})$ に平行なベクトルとなる。任意の $\tilde{u}$ でこれが成り立つので、座標系 $(u, v)$ は柱面共役座標系に他ならない。□

命題 2-5 において共役座標系が $M = 0$ で特徴付けられることを示したが、これは $\mathbf{x}_{uv} \in \text{span}(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$ と同値である。つまり、命題 4-6 の条件が共役座標系の条件の限定的な条件であることが確かめられる。定義 4-4 による柱面共役座標系を用いて、C-strip モデルは以下のように定義される。

**定義 4-5** 滑らかな曲面 $S$ の半離散モデル $\{\mathbf{p}_i\}$ が、 $S$ の柱面共役座標系による径数付け $\mathbf{x}(u, v)$ により

$$\forall i, \mathbf{p}_i = \mathbf{x}(i\Delta u, v)$$

と定められるとき、半離散モデル $\{\mathbf{p}_i\}$ を Cylindrical strip モデル(C-strip モデル)という。ここで、 $\Delta u$ は任意の離散幅である。

D-strip モデルと PQ メッシュの関係に倣えば、離散モデルである cylindrical メッシュが次のように定義できる。

**定義 4-6** 滑らかな曲面 $S$ の離散モデル $\{\mathbf{p}_{ij}\}$ が、 $S$ の柱面共役座標系による径数付け $\mathbf{x}(u, v)$ により

$$\forall i, \forall j, \mathbf{p}_{ij} = \mathbf{x}(i\Delta u, j\Delta v)$$

と定められるとき、離散モデル $\{\mathbf{p}_{ij}\}$ を Cylindrical メッシュという。ここで、 $\Delta u, \Delta v$ は各方向の任意の離散幅である。

両モデルに対して、D-strip モデルおよび PQ メッシュの場合と同様に次の命題が導かれる。

**命題 4-7** C-strip モデル  $\{\mathbf{p}_i\}$  の隣接関係にある曲線  $\mathbf{p}_i(v)$ ,  $\mathbf{p}_{i+1}(v)$  に関して、 $t \in [0,1]$  として

$$\mathbf{x}_{i,i+1}(t, v) = (1-t)\mathbf{p}_i(v) - t\mathbf{p}_{i+1}(v)$$

により径数付けられる線織面  $C_{i,i+1}$  は柱面である。このとき、 $\mathbf{r} = \mathbf{p}_{i+1}(v) - \mathbf{p}_i(v)$  は柱面の線織に対応する。

**命題 4-8** Cylindrical メッシュ  $M_{cyl} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$  に関して、

$$\forall f \in \mathcal{F}, \mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{e}_3 \text{ or } \mathbf{e}_2 \parallel \mathbf{e}_4$$

ここで、 $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_3$  および  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_4$  は、フェース  $f$  の境界エッジで対辺の関係にあるエッジを表す。

#### 4.2.4 連続曲面上の柱面共役場

4.2.3 項において柱面モデル (C-strip モデルおよび cylindrical メッシュ) の定義を示した。この定義に基づけば、与えられた曲面  $S$  の半離散・離散モデルとして両モデルを得るためには、 $S$  の共役座標系の中で 1 方向の平行性を満たす柱面共役座標系 (定義 4-4) による径数付けを求めればよいことがわかる。任意の座標系により  $\mathbf{x}(u, v)$  として径数付けられた曲面  $S$  に対して、柱面共役座標系による径数付け  $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u}, \tilde{v})$  を求めるためには、命題 4-6 を満たす座標変換  $\tilde{u} = \tilde{u}(u, v)$ ,  $\tilde{v} = \tilde{v}(u, v)$  を求める必要があるが、任意の曲面・任意の径数付けに対してこの座標変換を解析的に求めることは一般の共役座標系の場合と同様に困難である。そこで、本章では、座標変換そのものを解析的に求めるのではなく、数値解析的アプローチにより柱面モデルを求める。数値解析的アプローチでは、柱面共役座標系に対応する曲面上の共役場が重要となるので、本項では、滑らかな曲面上の共役場について整理する。まず、一般の共役場について整理したのち、柱面共役座標系に対応する特別な共役場の条件を導きその定義を示す。

まず、一般の共役座標系について考える。滑らかな曲面  $S$  と共役座標系による径数付け  $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u}, \tilde{v})$  を考えると、定義 2-11 から曲面上の任意の点で接ベクトル  $\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}}$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}}$  は共役条件を満たす。ここで、接ベクトル  $\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}}$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}}$  を  $S$  上の接ベクトル場と考えれば、2 つの接ベクトル場は  $S$  上の滑らかな交差場を定める。これを一般化して、曲面  $S$  上の 2 つの接ベクトル場  $\mathbf{v}(u, v)$ ,  $\mathbf{w}(u, v)$  が定める交差場で共役条件を満たすものが次のように定義される [31]。

**定義 4-7** 滑らかな曲面  $S$  上の各点に 2 つの接ベクトルを対応させることで定まる滑らかな交差場  $\mathcal{D} = \{\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, -\mathbf{v}, -\mathbf{w}\} | \mathbf{p} \in S\}$  が、

$$\forall u, \forall v, \Pi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$$

を満たすとき、交差場  $\mathcal{D}$  を  $S$  上の共役場という。

ここでは、2 つの接ベクトルの共役条件として命題 2-2 を用いた。共役場に沿う曲線が共役座標系のアイソパラメータ曲線に対応することは、共役座標系の定義から明らかであろう。つまり、曲面上である共役座標系を定めるということは、曲面上である共役場を定めることに他ならない。この定義に倣い、柱面共役座標系に対応する共役場を考える。任意の座標系で  $\mathbf{x}(u, v)$  として径数付けられた曲面  $S$  を考え、曲面上の 2 つの滑らかな接ベクトル場を  $\mathbf{v}(u, v)$ ,  $\mathbf{w}(u, v)$  とする。

このとき2つの接ベクトル場が、 $S$ を何らかの柱面共役座標系に基づき径数付けたときのパラメータ方向の接ベクトル場であり、 $\mathbf{v}$ が平行条件を満たす接ベクトル場であるとする。このとき $\mathbf{v}$ の微分 $d\mathbf{v}: T_{\mathbf{x}(u,v)}S \rightarrow T_{\mathbf{v}(u,v)}V$ を考えると、 $\mathbf{v}$ の $\mathbf{w}$ に沿った平行条件から、あるスカラー関数 $f(u, v)$ が存在して次が成り立つ。

$$d\mathbf{v}(\mathbf{w}) = f(u, v)\mathbf{v} \quad (4.12)$$

もし、 $\mathbf{v}$ が単位接ベクトル場であれば $\|\mathbf{v}\| \equiv 1$ なので、(4.12)はさらに整理され以下になる。

$$d\mathbf{v}(\mathbf{w}) = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

ここで、 $\mathbf{v}$ の平行条件から導かれた条件(4.13)と共役条件に関して、次の命題が成り立つ。

**命題 4-9**  $d\mathbf{v}(\mathbf{w}) = \mathbf{0} \implies \Pi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$

[証明]  $\mathbf{w} = \xi\mathbf{x}_u + \eta\mathbf{x}_v$ としたとき、(4.13)は次のように書ける。

$$\xi\mathbf{v}_u + \eta\mathbf{v}_v = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

法ベクトル $\mathbf{n}$ との内積を考えると、次が得られる。

$$\begin{aligned} \xi\langle \mathbf{n}, \mathbf{v}_u \rangle + \eta\langle \mathbf{n}, \mathbf{v}_v \rangle &= \xi\langle \mathbf{n}_u, \mathbf{v} \rangle + \eta\langle \mathbf{n}_v, \mathbf{v} \rangle \quad (\because \mathbf{n} \perp \mathbf{v}) \\ &= \langle d\mathbf{n}(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle \\ \therefore \langle d\mathbf{n}(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

(4.15)は2つの接ベクトルの共役条件に他ならない。□

命題 4-9 は、座標系に関する命題 4-6 と同様に、接ベクトルの平行条件から導かれた条件(4.13)が、一般の共役条件の限定的な条件となっていることを意味している。以上より、滑らかな曲面上の柱面共役場を次のように定義する。

**定義 4-8** 滑らかな曲面 $S$ 上の各点に2つの接ベクトルを対応させることで定まる滑らかな交差場 $\mathcal{D} = \{\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, -\mathbf{v}, -\mathbf{w}\} | \mathbf{p} \in S\}$ が、

$$\forall u, \forall v, d\mathbf{v}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$$

を満たすとき、交差場 $\mathcal{D}$ を $S$ 上の柱面共役場という。

接ベクトル場 $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ は単位接ベクトル場とする。以上で、柱面共役場が定義された。この定義に基づく交差場が曲面上で定まれば、その交差場に沿う曲線が柱面共役座標系のアイソパラメータ曲線となる。

最後に、共役場の特異点について整理する。共役場は非直交な交差場であるが、その特異点が交差場の2等分方向に対応する直交な交差場 $\mathcal{B}$ の特異点として得られることが知られている[31]。非直交な交差場 $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, -\mathbf{v}, -\mathbf{w}\}$ に対して、交差場 $\mathcal{B}$ は次のように定まる。

$$\mathcal{B} := \left\{ \frac{\mathbf{v} + \mathbf{w}}{\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|}, \frac{\mathbf{v} - \mathbf{w}}{\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|}, -\frac{\mathbf{v} + \mathbf{w}}{\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|}, -\frac{\mathbf{v} - \mathbf{w}}{\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|} \right\} \quad (4.16)$$

この交差場が4-RoSy場であることは明らかであろう。このようにして定まる交差場 $\mathcal{B}$ に対して、(2.57)によって特異点指数を求めることで共役場の特異点が判別される。

### 4.2.5 離散曲面上の柱面共役場

4.2.4 項では、滑らかな曲面上の共役場および柱面共役場について述べた。本項では、2.3.4 項に倣って、滑らかな曲面上の共役場および柱面共役場を三角形メッシュ上の方向場に拡張する。まず、メッシュ上の共役場について [31] に倣って整理したのち、メッシュ上の柱面共役場を定義する。

対象とする滑らかな曲面  $S$  を任意に離散化して得られる三角形メッシュ  $M = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$  を考え、2.3.4 項で整理したメッシュ上方向場のモデルを用いてメッシュ上の共役場を表すことを考える。共役場の非直交性を考慮して、メッシュ上の共役場を表すために、各フェース  $f_i \in \mathcal{F}$  に  $T_{f_i}$  上の2つの単位ベクトル  $\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i$  を定める。このとき、(2.86) は次のように拡張される。

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i \\ \sin\theta_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i + \alpha_i) \\ \sin(\theta_i + \alpha_i) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

ここで、 $\alpha_i$  は  $T_{f_i}$  上で  $\mathbf{v}_i$  と  $\mathbf{w}_i$  のなす角である。このようにして定まる非直交な交差方向  $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i, -\mathbf{v}_i, -\mathbf{w}_i\}$  が共役であることを定義するためには、メッシュ上の共役条件を定める必要がある。滑らかな曲面上の共役条件は、定義 2-10 によって定義され、命題 2-2 および命題 2-3 によって特徴付けられるのであった。定義 2-10 および命題 2-2 の条件は、径数付けに依存した条件であり径数付けを自然にもたないメッシュに適用することは困難である。一方で、命題 2-3 の条件は径数付けに依存しない条件であり、メッシュへの適用が容易である。命題 2-3 による共役条件を(4.17)で表されるメッシュ上の接ベクトルに適用するためには、メッシュ上の点で主曲率および主曲率方向が定まっていればよい。 $f_i = (a, b, c) \in \mathcal{F}$  に対して三角形  $T_{f_i}$  上の点  $\mathbf{p}$  を考え、 $\mathbf{p}$  の重心座標を  $(\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c)$  とし、 $\mathbf{p}$  での離散曲率テンソルを次のように定める。

$$C_i(\mathbf{p}) := \lambda_a C(a) + \lambda_b C(b) + \lambda_c C(c) \quad (4.18)$$

右辺の  $C(\bullet)$  はメッシュ頂点での離散曲率テンソル(定義 2-17)である。(4.18)が定める曲率テンソルの固有値分解によって、 $\mathbf{p} \in T_{f_i}$  での主曲率および主曲率方向が定まる。この主曲率および主曲率方向を命題 2-3 の共役条件に直接適用すれば、 $\mathbf{p} \in T_{f_i}$  での共役条件が定まる。このようにして定まるフェース上の接ベクトルの共役条件を用いて、メッシュ上の非直交な交差場  $\mathcal{D} = \{\{\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i, -\mathbf{v}_i, -\mathbf{w}_i\} | f_i \in \mathcal{F}\}$  が共役場であることを次のように定義する。

**定義 4-9** メッシュ  $M$  上の非直交な交差場  $\mathcal{D} = \{\{\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i, -\mathbf{v}_i, -\mathbf{w}_i\} | f_i \in \mathcal{F}\}$  が

$$\forall f_i \in \mathcal{F}, \kappa_{i,1} \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{e}_{i,1} \rangle \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{e}_{i,1} \rangle + \kappa_{i,2} \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{e}_{i,2} \rangle \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{e}_{i,2} \rangle = 0$$

を満たすとき、交差場  $\mathcal{D}$  を  $M$  上の共役場という。

ここで、 $\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i$  をフェース重心に定められた方向であるとすれば、 $\kappa_{i,1}, \kappa_{i,2}$  および  $\mathbf{e}_{i,1}, \mathbf{e}_{i,2}$  は、 $\mathbf{p}$  をフェース重心(i.e.  $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_c = 1/3$ )として(4.18)から得られる主曲率および主曲率方向となる。

次に、メッシュ  $M$  上の柱面共役場を定義する。滑らかな曲面  $S$  上の柱面共役場は、平行条件を満たすベクトル  $\mathbf{v}$  の微分に関する条件を用いて定義されたが(定義 4-8)、メッシュそのものもつ幾何学的な不連続性から、この条件を直接離散化することは困難である。そこで、まず、滑らかな曲面上の条件  $d\mathbf{v}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$  に関して次の命題が成り立つことを示す。

**命題 4-10**  $dv(\mathbf{w}) = \mathbf{0} \iff \Pi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0, \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \mathbf{0}$

ここで、 $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$ は $\mathbf{v}$ の $\mathbf{w}$ 方向の共変微分を表す。

[証明] まず、 $\Rightarrow$ を示す。任意の座標系 $(u, v)$ とその埋め込み写像 $\mathbf{x}$ を仮定し $\mathbf{w} = \xi\mathbf{x}_u + \eta\mathbf{x}_v$ とすると、 $\mathbf{v}$ の $\mathbf{w}$ 方向の微分が次のように得られる。

$$d\mathbf{v}(\mathbf{w}) = \xi\mathbf{v}_u + \eta\mathbf{v}_v \quad (4.19)$$

このベクトルの接空間成分が $\mathbf{v}$ の $\mathbf{w}$ 方向の共変微分 $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$ であるので次が得られる。

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v} &= d\mathbf{v}(\mathbf{w}) - \langle \mathbf{n}, \xi\mathbf{v}_u + \eta\mathbf{v}_v \rangle \mathbf{n} \\ \therefore d\mathbf{v}(\mathbf{w}) &= \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v} + (\xi\langle \mathbf{n}, \mathbf{v}_u \rangle + \eta\langle \mathbf{n}, \mathbf{v}_v \rangle) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.20)$$

つまり、 $dv(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ のとき次が成り立つ。

$$\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\xi\langle \mathbf{n}, \mathbf{v}_u \rangle + \eta\langle \mathbf{n}, \mathbf{v}_v \rangle) = 0 \quad (4.21)$$

第2式が成り立つとき命題 4-9 と同様に $\Pi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ が成り立つので $\Rightarrow$ が示された。

次に、 $\Leftarrow$ を示す。(4.20)と同様に、 $\mathbf{v}$ の $\mathbf{w}$ 方向の微分を法ベクトル成分と接空間成分に分解すると次が得られる。

$$\begin{aligned} d\mathbf{v}(\mathbf{w}) &= \langle d\mathbf{v}(\mathbf{w}), \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} + \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.22)$$

ここで、 $\Pi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \iff \langle d\mathbf{v}(\mathbf{w}), \mathbf{n} \rangle = 0$ を用いた。□

よって、柱面共役場の条件を離散化するために、 $dv(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ を離散化する代わりに、 $\Pi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0, \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = 0$ を離散化すればよい。共役条件 $\Pi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ は、メッシュ上の曲率テンソルを用いることですでに離散化されているので(定義 4-9)、ここでは $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = 0$ の離散化を考える。本章で用いるメッシュ上の方向場は、各フェースにベクトルを定める *face-based* モデルであるので、*face-based* モデルに対する離散共変微分演算子 [66]を用いればよい。まず、隣接するフェース $f_i, f_j \in \mathcal{F}$ を考え、両フェースで定まるベクトル $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in \mathbb{E}^3$ の重み付き平均により共有エッジ $e_{ij} \in \mathcal{E}$ にベクトルを定める。

$$\mathbf{v}_{ij} = \frac{|T_{f_i}|\mathbf{v}_i + |T_{f_j}|\mathbf{v}_j}{|T_{f_i}| + |T_{f_j}|} \quad (4.23)$$

(4.23)は、メッシュ上の境界を除くすべてのエッジにベクトルを定める。ここで、 $f \in \mathcal{F}$ を考え、その3頂点を $a, b, c$ とすると、エッジ中点で定義されたスカラー関数 $g: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、フェース内での線形補間関数 $g_f$ が *non-conforming* な基底関数 $\psi_{ab}, \psi_{bc}, \psi_{ca}$ を用いて次のように得られる [26]。

$$g_f(\mathbf{p}) = g_{ab}\psi_{ab}(\mathbf{p}) + g_{bc}\psi_{bc}(\mathbf{p}) + g_{ca}\psi_{ca}(\mathbf{p}) \quad (4.24)$$

ここで、 $\mathbf{p} \in T_f$ である。(4.24)が定める補間関数の勾配ベクトルはその線形性からフェース上で定ベクトルとなり、次のように得られる。

$$\nabla g_f = g_{ab} \nabla \psi_{ab} + g_{bc} \nabla \psi_{bc} + g_{ca} \nabla \psi_{ca} \quad (4.25)$$

ここで、基底関数  $\psi_{ab}$ ,  $\psi_{bc}$ ,  $\psi_{ca}$  の勾配ベクトルは次のように得られる。

$$\nabla \psi_{ab} = -\frac{\mathbf{n}_f \times \mathbf{e}_{ab}}{|T_f|}, \quad \nabla \psi_{bc} = -\frac{\mathbf{n}_f \times \mathbf{e}_{bc}}{|T_f|}, \quad \nabla \psi_{ca} = -\frac{\mathbf{n}_f \times \mathbf{e}_{ca}}{|T_f|} \quad (4.26)$$

ここで、 $\mathbf{e}_{ab}$ ,  $\mathbf{e}_{bc}$ ,  $\mathbf{e}_{ca}$  はエッジベクトルである。つまり、(4.23)によって定まるメッシュ上のベクトル場  $\hat{\mathbf{v}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}^3$  の各成分  $\hat{x}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\hat{y}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\hat{z}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  の勾配ベクトル場  $\nabla \hat{x}$ ,  $\nabla \hat{y}$ ,  $\nabla \hat{z}$  は、それぞれ *face-based* な方向場となる。この勾配ベクトル場と微分方向となるベクトル場  $\mathbf{w}$  の内積を取ることで、ベクトル場  $\mathbf{v} = (x, y, z)$  の各成分の  $\mathbf{w}$  方向の方向微分が次のように得られる。

$$\tilde{D}_{\mathbf{w}} x = \langle \nabla \hat{x}, \mathbf{w} \rangle, \quad \tilde{D}_{\mathbf{w}} y = \langle \nabla \hat{y}, \mathbf{w} \rangle, \quad \tilde{D}_{\mathbf{w}} z = \langle \nabla \hat{z}, \mathbf{w} \rangle \quad (4.27)$$

ここで、 $\tilde{D}_{\mathbf{w}}$  を離散系における方向微分演算子として連続系における方向微分演算子  $D_{\mathbf{w}}$  と区別した。各成分の方向微分をベクトル成分として扱うことで、 $\mathbf{v}_i$  の  $\mathbf{w}_i$  方向の共変微分が次のように得られる。

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{w}} \mathbf{v} = P \left( (\tilde{D}_{\mathbf{w}} x, \tilde{D}_{\mathbf{w}} y, \tilde{D}_{\mathbf{w}} z) \right) \quad (4.28)$$

ここで、 $P(\bullet)$  は  $M$  への射影を表す。ここでも同様に、 $\tilde{\nabla}_{\mathbf{w}}$  を離散系における共変微分演算子として連続系における共変微分演算子  $\nabla_{\mathbf{w}}$  と区別した。このように定まる共変微分演算子を用いて、メッシュ上の非直交な交差場  $\mathcal{D} = \{\{\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i, -\mathbf{v}_i, -\mathbf{w}_i\} | f_i \in \mathcal{F}\}$  が柱面共役場であることを次のように定義する。

**定義 4-10** メッシュ  $M$  上の非直交な交差場  $\mathcal{D} = \{\{\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i, -\mathbf{v}_i, -\mathbf{w}_i\} | f_i \in \mathcal{F}\}$  が

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{w}} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

を満たす共役場であるとき、交差場  $\mathcal{D}$  を  $M$  上の柱面共役場という。

最後に、メッシュ上の共役場の特異点を [31] に倣って整理する。(2.87) を拡張すると、隣接するフェースを  $f_i, f_j \in \mathcal{F}$  として共有エッジを  $e_{ij}$  と表せば、方向場の角度の変化量が次のように書ける。

$$\begin{aligned} \Delta \theta_1(e_{ij}^*) &= (\theta_j + q_{ij} \alpha_j) + r_{ij} - \theta_i + p_{1,ij} \pi \\ \Delta \theta_2(e_{ij}^*) &= (\theta_j + (1 - q_{ij}) \alpha_j) + r_{ij} - (\theta_i + \alpha_i) + p_{2,ij} \pi \end{aligned} \quad (4.29)$$

ここで、 $r_{ij}$  は  $f_i, f_j$  の基準軸をヒンジマップで展開したとき基準軸間の角度である。共役場は非直交な交差場であり 2 方向の独立な方向が存在するので、2 つの変化量を考える必要があり、これに応じて、2 つの *period jump parameter* が  $p_{1,ij}, p_{2,ij}$  として導入された。また、 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  の対応関係のスイッチも考慮する必要があるので、スイッチを表す変数  $q_{ij} \in \{0, 1\}$  が導入される。(2.90) に倣って、頂点  $v$  の特異点指数が次のように定義される。

$$I(v) := \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{e_{ij} \in \mathcal{N}(v)} \frac{\Delta\theta_1(e_{ij}^*) + \Delta\theta_2(e_{ij}^*)}{2} + A_d(v) \right) \quad (4.30)$$

ここで、(4.30)に(4.29)を適用して変形すれば次が得られる。

$$I(v) = \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{e_{ij} \in \mathcal{N}(v)} \left( \left( \theta_j + \frac{\alpha_j}{2} \right) + r_{ij} - \left( \theta_i + \frac{\alpha_i}{2} \right) + \frac{p_{1,ij} + p_{2,ij}}{2} \pi \right) + A_d(v) \right) \quad (4.31)$$

これは、 $v_i, w_i$ の2等分方向に対応する方向場の特異点に等しく、滑らかな曲面上の共役場の特異点の性質と等しい。

### 4.2.6 Shadow contour 曲線と接触柱面

本項では、滑らかな曲面 $S$ 上の共役場に沿う曲線の幾何学的な解釈を [29] [12]に倣って整理し、その幾何学的性質を応用した C-strip モデルの別の定義について示す。

まず、滑らかな曲面 $S$ 上の shadow contour 曲線について示す。曲面 $S$ 上の曲線 $c$ がある点 $z$ を光源とする shadow contour 曲線であることは次のように定義される。

**定義 4-11** 滑らかな曲面 $S$ 上の曲線 $c$ が

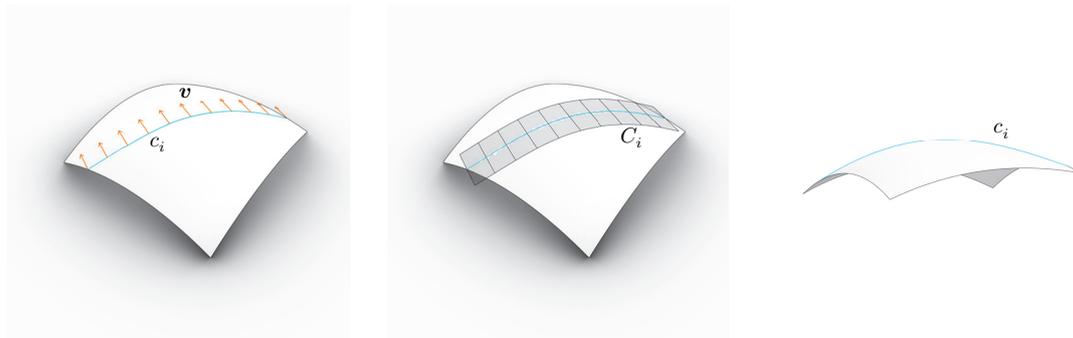
$$\forall p \in c, p - z \in T_p S$$

を満たすとき、点 $z$ を光源とする shadow contour 曲線という。ここで、 $v = p - z$ を照射ベクトルと呼ぶ。

この定義から明らかであるが、shadow contour 曲線は点 $z$ から曲面 $S$ を見たときの $S$ の境界線を除く輪郭線に他ならない(図 4-5)。shadow contour 曲線に関して次が成り立つ。

**命題 4-11** 滑らかな曲面 $S$ 上の曲線 $c$ に関して

$$\text{曲線 } c \text{ が点 } z \text{ を光源とする shadow contour 曲線} \iff \forall p \in c, p - z \text{ is conjugate to } \dot{c} \text{ on } S$$



(a)照射ベクトルと曲線

(b)接触柱面

(c)輪郭線としての解釈

図 4-5 Shadow contour 曲線と曲面の輪郭線

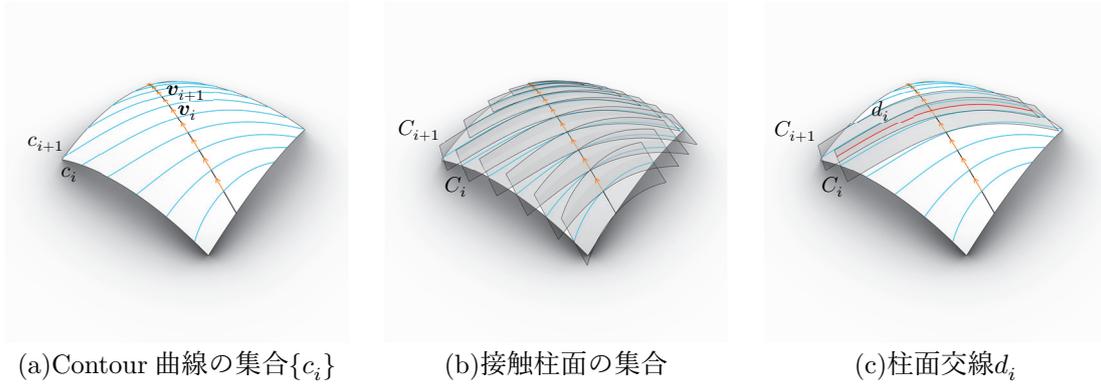


図 4-6 接触柱面による C-strip モデル

ここで、点  $z$  を光源とする shadow contour 曲線  $c$  に対して、線分の 1 パラメータ族  $\Gamma = \{L(p, z) | p \in c\}$  を定めると、定義 4-11 から、 $\Gamma$  は  $z$  を頂点とし  $c$  に沿って  $S$  に接する錐面となる。ここで、点  $z$  を無限遠点とすれば照射ベクトル  $\mathbf{v}$  は  $\mathbf{p}$  に依らず定値なベクトルとなり、 $\Gamma$  は  $S$  に接する柱面となる。この無限遠点  $z$  に対する shadow contour 曲線  $c$  を考えると、命題 4-11 から、 $c$  の接ベクトル  $\mathbf{i}$  は定値な照射ベクトル  $\mathbf{v}$  と常に共役であるので、 $c$  が何らかの柱面共役場に沿う曲線であることがわかる。つまり、柱面共役場の平行条件を満たさない方向に沿う曲線に沿って、 $S$  に接する柱面が存在することがわかる。このとき接触柱面の線織方向 (i.e., 照射ベクトル方向) が柱面共役場の平行条件を満たす方向のベクトルに対応する。

柱面共役場に沿う曲線に関する上述の性質を用いると、曲面  $S$  の半離散モデルとしての C-strip モデルを定義 4-5 とは別の形式で定めることができる。 $S$  の何らかの柱面共役座標系の半離散化からアイソパラメータ曲線の集合  $\{c_i\}$  が与えられたとき、各曲線に対して次の柱面を定める。

$$C_i(s, t) := c_i(t) + s\mathbf{v} \quad (4.32)$$

ここで、 $c_i(t)$  は曲線  $c_i$  の径数付け、 $\mathbf{v}$  は曲線  $c_i$  を定める定ベクトルである。(4.32) が定める柱面は曲線  $c_i$  に沿って  $S$  に接する。このとき、C-strip モデル  $\{d_i\}$  を次のように定める。

$$\{d_i\} := \{C_i \cap C_{i+1}\} \quad (4.33)$$

ここで得られる C-strip モデルの各曲線  $d_i$  は  $S$  上の曲線ではないので、定義 4-5 で定める C-strip モデルとは一致しないが、(4.33) が定める C-strip モデルもまた  $S$  に収束することは明らかであり、このモデルも  $S$  の半離散モデルとしての条件を満たす。また、明らかに、 $d_i, d_{i+1}$  間は柱面  $C_{i+1}$  によって補間され、C-strip モデルが満たすべき幾何学的条件 (命題 4-7) を厳密に満たしており、このモデルは離散化による誤差をもたないモデルである。

4.2.3 項において、一般の可展面と柱面の幾何学的関係に基づいて柱面共役座標系を定義した (定義 4-4)。本項で示した輪郭線による解釈は、任意の曲面上で定義 4-4 による柱面共役座標系が少なくとも局所的に存在することの根拠といえる。 $\mathbb{E}^3$  に埋め込まれた任意の曲面上の任意の点に対して、その点が輪郭線上の点となるような正射影が局所的に存在することは明らかであろう。

### 4.3 C-strip モデル生成方法 A – アイソパラメータ曲線による方法

4.1 節において、与えられた曲面の半離散モデルとして C-strip モデルを求めるために、数値解析によるアプローチが必要であることを述べた。本節では、数値解析を用いた1つの方法として、求めたい柱面共役座標系に対応する柱面共役場を数値積分することで得られる離散的なアイソパラメータ曲線により C-strip モデルを求める方法について述べる。まず、4.3.1 項において、Runge-Kutta 法による数値積分を用いて曲面上の方向場に沿う曲線を求める方法について整理する。続いて、4.3.2 項において、曲面上に柱面共役場を定めると同時に、対応するアイソパラメータ曲線の離散解を数値積分により求める方法について述べる。最後に、4.3.4 項において、本節で述べるアイソパラメータ曲線を用いる方法の問題点を指摘する。

#### 4.3.1 Runge-Kutta 法による方向場の数値積分

本項では、Runge-Kutta 法を用いて曲面上の方向場を数値積分することにより、方向場に沿う曲線を離散的に求める方法について整理する。 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  上で定義された滑らかな曲面  $S$  上の接ベクトル場  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(u, v)$  を考える。 $\mathbf{p} \in S$  で接ベクトル  $\mathbf{v}(u, v) \in T_{\mathbf{p}}S \subset \mathbb{E}^3$  はパラメータ空間上のベクトル  $\bar{\mathbf{v}}(u, v) \in \mathbb{R}^2$  と 1 対 1 対応し、両ベクトルには次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{v} = J\bar{\mathbf{v}} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{v}} = (J^T J)^{-1} J^T \mathbf{v} \quad (4.34)$$

与えられた接ベクトル場  $\mathbf{v}$  に対して、(4.34) による変換を施せば  $\mathbb{R}^2$  上のベクトル場  $\bar{\mathbf{v}}$  が定まる。このベクトル場  $\bar{\mathbf{v}}$  を数値積分することで得られる  $\mathbb{R}^2$  上の点列を、埋め込み写像  $\mathbf{x}(u, v)$  により再び  $\mathbb{E}^3$  に埋め込めば  $S$  上の点列が得られ、この点列は  $S$  上の接ベクトル場  $\mathbf{v}$  に沿った点列となる。 $\mathbb{R}^2$  上のベクトル場  $\bar{\mathbf{v}}$  の数値積分には Runge-Kutta 法 [67] を用いる。第  $i$  ステップでの点を  $\mathbf{u}_i = (u_i, v_i)$  とすると、第  $i+1$  ステップでの点が 4 次精度公式により次のように得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i+1} &= \mathbf{u}_i + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_0 + 2\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \\ \mathbf{k}_0 &= \Delta \cdot \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{u}_i), \quad \mathbf{k}_1 = \Delta \cdot \bar{\mathbf{v}}\left(\mathbf{u}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_0\right) \\ \mathbf{k}_2 &= \Delta \cdot \bar{\mathbf{v}}\left(\mathbf{u}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\right), \quad \mathbf{k}_3 = \Delta \cdot \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{u}_i + \mathbf{k}_2) \end{aligned} \quad (4.35)$$

ここで、 $\Delta$  は離散幅であり十分小さな値を設定すればよい。初期点  $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)$  を指定し、(4.35) に従って定義域  $\Omega$  内で点を更新することで点列  $\{\mathbf{u}_i\}$  が得られる。この点列  $\{\mathbf{u}_i\}$  が、 $\mathbf{u}_0$  を始点としベクトル場  $\bar{\mathbf{v}}$  に沿った曲線の離散解であり、点列  $\{\mathbf{u}_i\}$  を写像  $\mathbf{x}(u, v)$  により  $S$  上に埋め込んで得られる点列  $\{\mathbf{p}_i\} = \{\mathbf{x}(\mathbf{u}_i)\}$  が  $S$  上の接ベクトル場  $\mathbf{v}$  に沿った曲線の離散解となる。ベクトル場  $\bar{\mathbf{v}}$  が特異点をもつ場合、特異点ではベクトルが定まらないので初期点  $\mathbf{u}_0$  として特異点を指定しないよう注意する。

次に、上述の方法を  $S$  上の共役場  $\{\mathbf{v}(u, v), \mathbf{w}(u, v)\}$  に適用することを考える。共役場は非直交な交差場であり、 $\mathbf{p} \in S$  で 4 方向の単位接ベクトル  $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, -\mathbf{v}, -\mathbf{w}\}$  が定められるのであった。この

共役場が特異点をもたない場合、それぞれの方向を表す接ベクトル場  $\mathbf{v}(u, v)$ ,  $\mathbf{w}(u, v)$  は  $S$  上で連続であり、上述の接ベクトル場に対する数値積分法をそれぞれに適用することで各方向に沿う曲線が求まる。一方で、共役場が特異点をもつ場合、交差場そのものは  $S$  上で連続であるがそれぞれの方向を表す接ベクトル場  $\mathbf{v}(u, v)$ ,  $\mathbf{w}(u, v)$  は不連続点をもつので、数値積分時に不連続点において(4.35)による点列更新を終了する必要がある。不連続点での点列更新の終了条件を考慮した数値積分法をそれぞれの方向に適用することで各方向に沿う曲線が求まる。半離散モデルを求める場合、1方向に関して数値積分を実行すればよい。

以上に示した方法を  $S$  上で定まる共役場  $\{\mathbf{v}(u, v), \mathbf{w}(u, v)\}$  の任意の1方向に適用することで、共役場に沿う曲線の離散解  $\hat{\mathbf{p}} = \{\mathbf{p}_i\}$  が求まる。 $S$  上の複数の点を初期点として離散曲線を求めることで共役場に沿う離散曲線の集合  $\{\hat{\mathbf{p}}_j\}$  が求まり半離散モデル(の離散解)となる。

### 4.3.2 柱面共役場の生成と数値積分

4.3.1 項で、共役場の数値積分により、対応する共役座標系のアイソパラメータ曲線を求める方法を示した。この方法を適用するためには、目的とする共役座標系に対応する曲面  $S$  上の共役場が必要であるが、曲面上の共役場は一意に定まらないため、何らかの条件を与えることで目的とする共役座標系に対応する共役場を定める必要がある。一般の共役場の場合、 $S$  上の任意の点で1方向の自由度をもつため、 $S$  上のすべての点  $\mathbf{p}$  で接ベクトル  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$  を定める必要がある。これは、 $S$  上の滑らかな接ベクトル場  $\mathbf{v}(u, v)$  を定めることに等しく、接ベクトル場  $\mathbf{v}(u, v)$  を任意に定めることで  $S$  上の滑らかな共役場を定めることができる。これに対して、柱面共役場の場合、1方向に関する平行条件から、ある点  $\mathbf{p} \in S$  で接ベクトル  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$  を定めると  $\mathbf{p}$  を通るある曲線  $c \subset S$  (i.e.  $\mathbf{p}$  を通り  $\mathbf{v}$  を定照射ベクトルとする shadow contour 曲線) が定まり、 $c$  上のすべての点で1方向が  $\mathbf{v}$  に一致する共役場が定まるので、 $S$  上の一部の点  $\mathbf{p}$  で接ベクトル  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$  を定めればよい。ここで、 $S$  の部分集合  $r$  に対して接ベクトル場  $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \in T_{\mathbf{p}}S | \mathbf{p} \in r\}$  を定めることを考える。このとき、 $r$  の各点を通る曲面上の曲線の集合  $c = \{c_{\mathbf{p}} | \mathbf{p} \in r\}$  が柱面共役場の条件から定まる。このとき、部分集合  $r$  と接ベクトル場  $\mathbf{v}$  は次を満たす必要がある。

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{p}_1, \forall \mathbf{p}_2 \in r, c_{\mathbf{p}_1} \cap c_{\mathbf{p}_2} \neq \emptyset \\ \Rightarrow \left\{ \mathbf{v}_{\mathbf{p}_1}, \frac{\dot{c}_{\mathbf{p}_1}}{\|\dot{c}_{\mathbf{p}_1}\|}, -\mathbf{v}_{\mathbf{p}_1}, -\frac{\dot{c}_{\mathbf{p}_1}}{\|\dot{c}_{\mathbf{p}_1}\|} \right\} = \left\{ \mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}, \frac{\dot{c}_{\mathbf{p}_2}}{\|\dot{c}_{\mathbf{p}_2}\|}, -\mathbf{v}_{\mathbf{p}_2}, -\frac{\dot{c}_{\mathbf{p}_2}}{\|\dot{c}_{\mathbf{p}_2}\|} \right\} \Bigg|_{\mathbf{p} = c_{\mathbf{p}_1} \cap c_{\mathbf{p}_2}} \\ \bigcup_{\mathbf{p} \in r} c_{\mathbf{p}} = S \end{array} \right. \quad (4.36)$$

第1式は、 $c$  が定める共役場が  $S$  上で矛盾なく定まるための条件であり、第2式は  $S$  上のすべての点で共役場が定まるための条件である。任意の曲面  $S$  に対して条件(4.36)を満たす  $r$  と  $\mathbf{v}$  を適切に定めることは困難であるので、ここでは条件(4.36)の緩和を考える。まず、第1式に関して考察する。第1式は、柱面共役座標系の同一方向のアイソパラメータ曲線に対応する2曲線で交点をもつ2曲線が、交点で等しい共役場を定めるための条件であるが、曲面  $S$  が1つの柱面共役座標系で被覆される場合、 $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2$  かつ  $c_{\mathbf{p}_1} \neq c_{\mathbf{p}_2}$  であれば、アイソパラメータ曲線は交差せず  $c_{\mathbf{p}_1} \cap c_{\mathbf{p}_2} = \emptyset$  が常に成り立つので、第1式は常に成り立つ。つまり、第1式は、曲面  $S$  が複数の柱面共役座標系で被覆される場合(i.e. 特異点が存在する場合)に限り、実質的な意味をもつ条件である。

そこで、ここでは、曲面 $S$ が1つの柱面共役座標系で被覆されることを仮定して、第1式を次の条件に緩和する。

$$\forall \mathbf{p}_1 \in r, \forall \mathbf{p}_2 \in r, c_{\mathbf{p}_1} \neq c_{\mathbf{p}_2} \implies c_{\mathbf{p}_1} \cap c_{\mathbf{p}_2} = \emptyset \quad (4.37)$$

第2式に関しては、 $\cup_{\mathbf{p} \in r} c_{\mathbf{p}}$ が $S$ の十分な領域を被覆すればよいと仮定して、次のように緩和する。

$$\bigcup_{\mathbf{p} \in r} c_{\mathbf{p}} \approx S \quad (4.38)$$

この条件は厳密な条件ではないため、問題に応じて適宜被覆条件を設定する必要がある。以上をまとめて、 $S$ 上で柱面共役場を定めるために与える部分集合 $r$ と接ベクトル場 $\mathbf{v}$ に関して次の条件を用いる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{p}_1 \in r, \forall \mathbf{p}_2 \in r, c_{\mathbf{p}_1} \neq c_{\mathbf{p}_2} \implies c_{\mathbf{p}_1} \cap c_{\mathbf{p}_2} = \emptyset \\ \bigcup_{\mathbf{p} \in r} c_{\mathbf{p}} \approx S \end{array} \right. \quad (4.39)$$

(4.39)では、部分集合 $r$ と接ベクトル場 $\mathbf{v}$ から定まる曲線の交点の有無と曲線の一致のみを考慮すればよいので、(4.36)と比較すると扱いやすい条件である。ここでは、(4.39)を満たす部分集合 $r$ と接ベクトル場 $\mathbf{v}$ を与える1つの方法として、部分集合 $r$ を曲面上の1つの滑らかな曲線として与える方法を示す。

部分集合 $r$ を曲面上の滑らかな曲線 $r$ として、この曲線 $r$ 上で定義される滑らかな接ベクトル場 $\mathbf{v}$ を考えれば、曲面 $S$ と接ベクトル場 $\mathbf{v}$ の連続性から、 $r$ 上の任意の点 $\mathbf{p}$ で(4.39)の第1式が満足されるような近傍が存在することは明らかであろう(i.e.  $\mathbf{p} \in r$ のある近傍 $N(\mathbf{p})$ が存在して、 $\forall \mathbf{q} \in r \cap N(\mathbf{p}), c_{\mathbf{p}} \cap c_{\mathbf{q}} = \emptyset$ )。この性質を考慮して、接ベクトル場 $\mathbf{v}$ を $r$ の単位接ベクトルとする。このとき、この曲線 $r$ は柱面共役座標系の線織方向に対応するアイソパラメータ曲線となる。曲線 $r$ を与えることで $S$ の部分領域 $S_r$ に柱面共役場が定まる。このとき、 $r$ 上の点 $\mathbf{p}$ とその近傍にない点 $\mathbf{q} \in r$ に対しては、 $c_{\mathbf{p}} \cap c_{\mathbf{q}} \neq \emptyset$ となり(4.39)第1式を満足しない可能性があるため、これが満足されない場合、試行錯誤による曲線 $r$ の修正を行う。また、 $S_r \approx S$ が満たされない場合も、(4.39)の第1式の制約下で $S_r$ を拡大するような $r$ の修正を試行錯誤により行う。

適切な曲線 $r$ が与えられれば、 $r$ の任意の離散化により点列 $\{\mathbf{r}_j\}$ と接ベクトル $\{\dot{\mathbf{r}}_j\}$ を定め、各 $\mathbf{r}_j$ 、 $\dot{\mathbf{r}}_j$ を境界条件として4.3.1項の数値積分法を適用することで、柱面共役場のアイソパラメータ曲線の離散解 $\hat{\mathbf{p}}_j$ が求まる。すべての点で離散解を求めれば、離散曲線の集合 $\{\hat{\mathbf{p}}_j\}$ が求まり半離散モデル(の離散解)となる。この方法は、曲線 $r$ がC-stripモデルの線織の流れに対応するため直感的で明確であるという利点をもつ一方で、(4.39)を満たす部分集合 $r$ と接ベクトル場 $\mathbf{v}$ を与えるために試行錯誤による曲線 $r$ の修正を要するため効率的ではない。また、複雑な曲面 $S$ はその全域を被覆するために複数の柱面共役座標系を必要とするため、十分な領域を被覆可能な曲線 $r$ を与えることは困難である。

### 4.3.3 数値解析

本項では、方法 A を 2 つの解析モデル a・b に対して適用した数値解析例を示す。すべての数値解析は、Intel® Core™ i9-9980HK プロセッサを搭載する PC を用いて実行されている。

#### 4.3.3.1 解析モデル a

本項で解析対象とする滑らかな曲面  $S_a$  を図 4-7 に示す。制御点数  $5 \times 7$  の 3 次 Nurbs 曲面を用いて、曲面の全域でガウス曲率が正となるように曲面をモデル化した。この曲面に対して、X-Y 平面上で原点を通る直線を Z 方向に沿って曲面に投影することで得られる曲面上の曲線を曲線  $r$  として与え C-strip モデルを求めた。直線が X 軸となす角度を 15 度間隔で変更して得られる 12 パターンの曲線  $r_{000} \sim r_{165}$  について検討した。全パターンの解析結果を図 4-8 に示す。曲線  $r$  は離散幅が等しくなるよう等分割し、各パターンの分割数はすべてのパターンで離散幅がおおよそ等しくなるよう設定した。ここでは、条件(4.39)に基づく曲線  $r$  の修正は行わず得られた結果を直接示す。

図 4-8 に示した解析結果を見ると、すべてのパターンで条件(4.39)を満たす C-strip モデルが得られていることがわかる。明らかに、すべてのパターンで曲面  $S_a$  は 1 つの柱面共役座標系で被覆されており、得られた C-strip モデルは曲面  $S_a$  の十分な領域を被覆している。

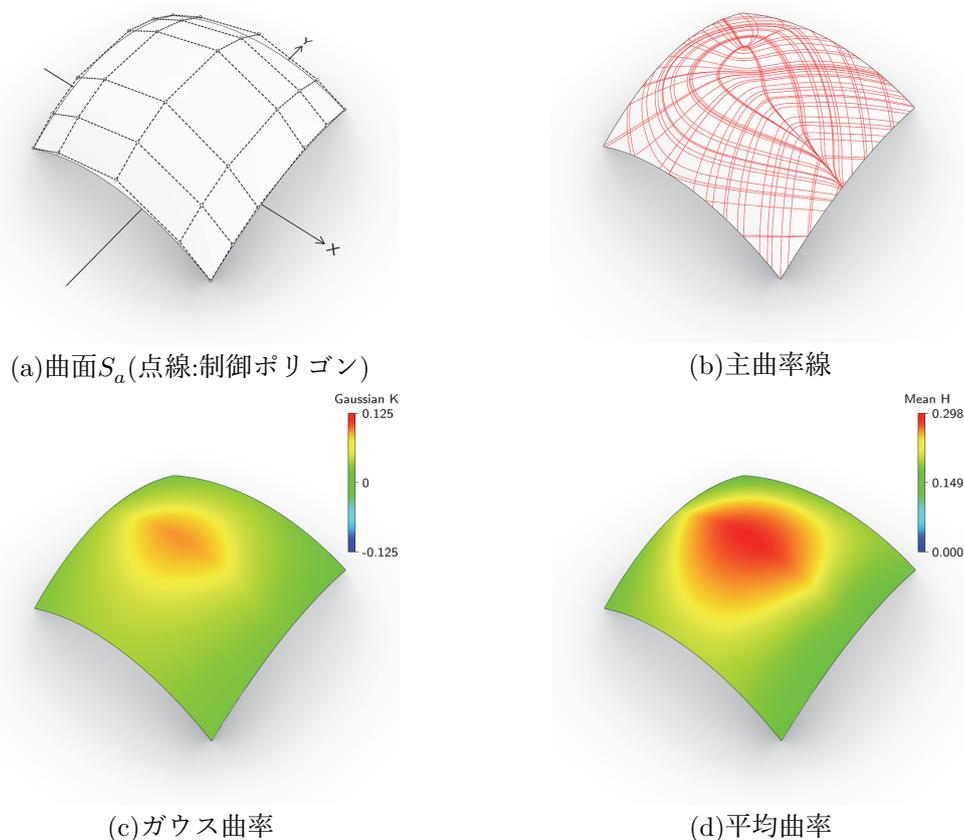


図 4-7 解析モデル a

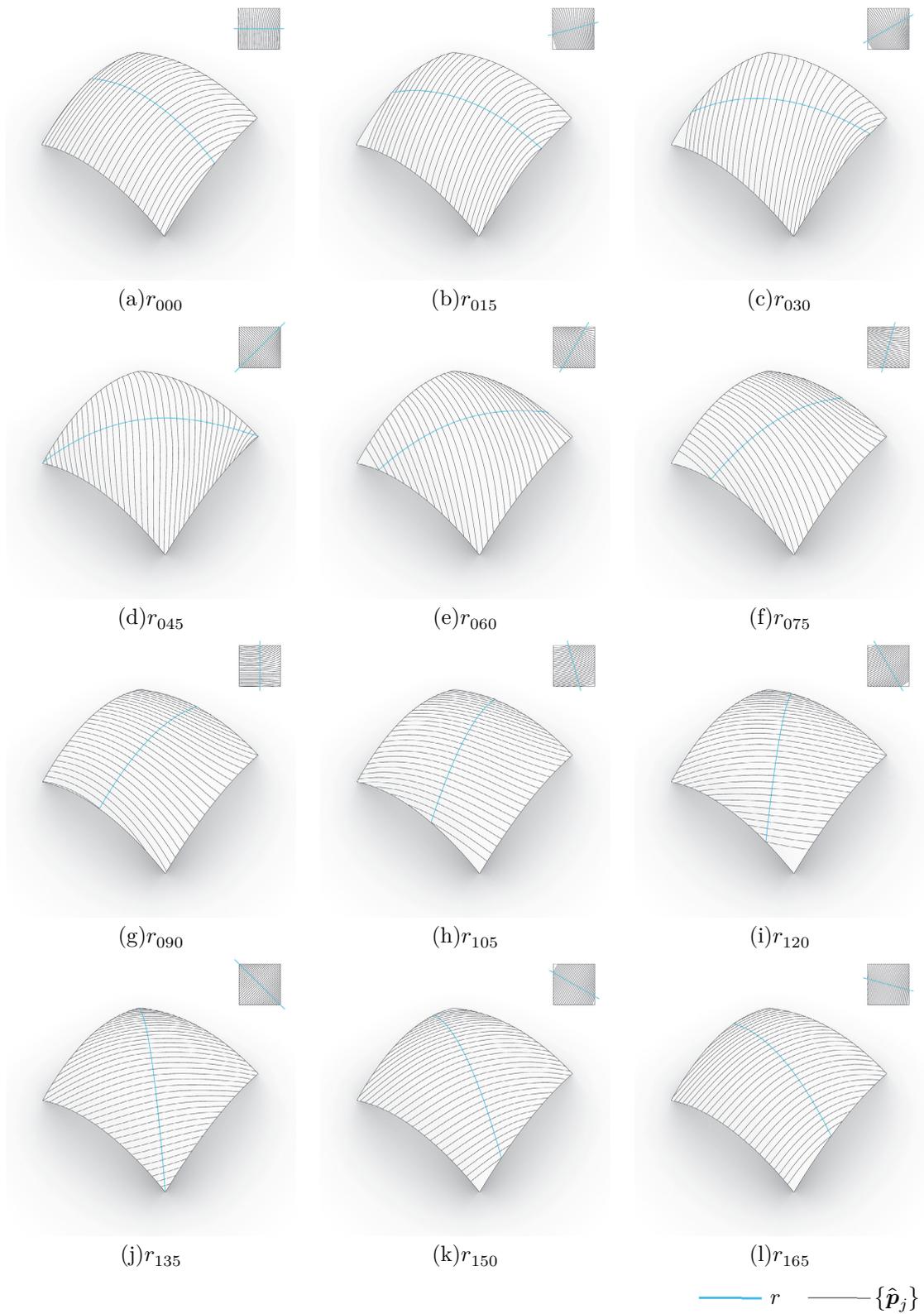
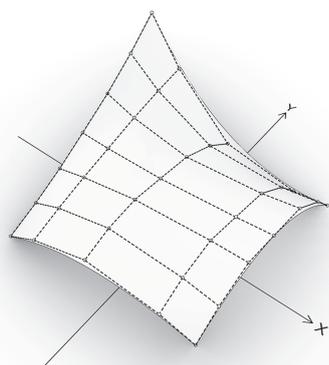
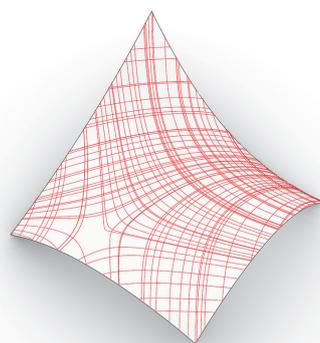


図 4-8 解析モデル a C-strip モデル

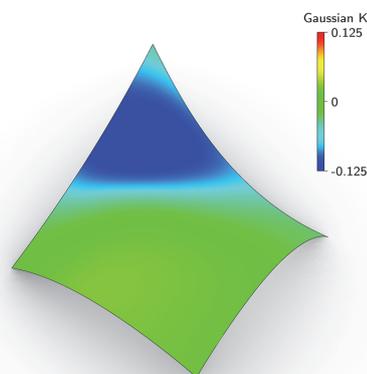
## 4.3.3.2 解析モデル b

本項で解析対象とする滑らかな曲面 $S_b$ を図4-9に示す。解析モデル a と同様に、制御点数 $5 \times 7$ の3次 Nurbs 曲面を用いて曲面をモデル化したが、ここでは、ガウス曲率が正となる領域と負となる領域の双方を含むように曲面をモデル化した。この曲面に対して、解析モデル a と同様に、12 パターンの曲線 $r_{000} \sim r_{165}$ を与えて C-strip モデルを求めた。全パターンの解析結果を図4-10に示す。ここでも条件(4.39)に基づく曲線 $r$ の修正は行わず得られた結果を直接示す。

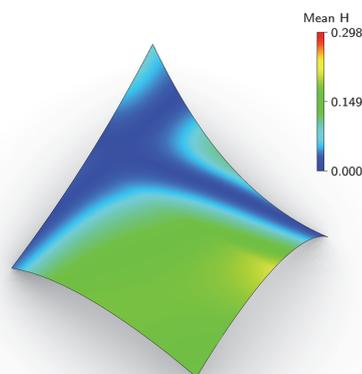
図4-10に示した解析結果を見ると、多くのパターンで曲面 $S_b$ の十分な領域を被覆する C-strip モデルが得られておらず、条件(4.39)の第2式を満たしていないことがわかる。これらのパターンでは、特異点を含む柱面共役座標系が曲面を被覆している。すべてのパターンで、ガウス曲率が負の領域で特異点が生じているが、これらはガウス曲率が負の領域において存在する自己共役方向(命題2-4)に起因する特異点である。図4-11に $r_{135}$ の共役場を示した。共役場の2方向が一致している点が存在することが確認できる。これらの点では、埋め込み写像 $\mathbf{x}$ が $\mathbf{x}_u \parallel \mathbf{x}_v$ となり、写像 $\mathbf{x}$ が非正則な埋め込みとなるため座標系が定まらない。また、図4-11において赤点線で示した $S$ の部分集合 $\{p \in S | \mathbf{x}_u \parallel \mathbf{x}_v\}$ に含まれるすべての点は孤立点ではないため、(2.55)で示した特

(a) 曲面 $S_b$ (点線:制御ポリゴン)

(b) 主曲率線



(d) ガウス曲率



(e) 平均曲率

図4-9 解析モデル b



図 4-10 解析モデル b C-strip モデル

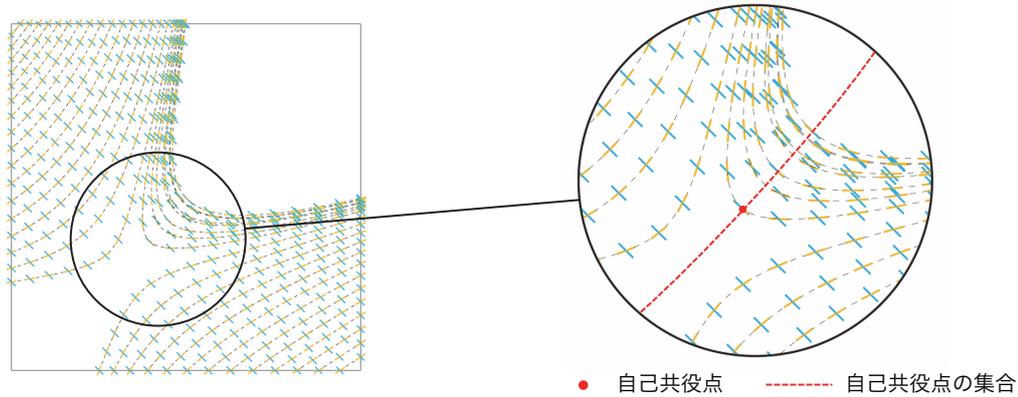


図 4-11 柱面共役場( $r_{135}$ )

異点指数の仮定に反する。したがって、柱面共役座標系の自己共役性から生じる特異点に関して、通常の共役場の特異点とは異なる扱いが必要となる。また、特異点を生じている(i)(j)(k)(l)を見ると、曲線 $r$ の変曲点が特異点と一致していることがわかる。これは、曲線 $r$ の変曲点において次が成り立つためである。

$$r'' = \kappa_n + \kappa_g = \mathbf{0} \iff \kappa_n = 0, \quad \kappa_g = 0 \quad (4.40)$$

ここで、 $r''$ は弧長パラメータに関する2階微分ベクトル、 $\kappa_n$ 、 $\kappa_n$ は法曲率および法曲率ベクトル、 $\kappa_g$ 、 $\kappa_g$ は測地的曲率および測地的曲率ベクトルである。法曲率 $\kappa_n = 0$ となる方向は漸近方向であり自己共役方向となる(命題 2-4)ため共役場の特異点となる。この考察から、特異点を含まない柱面共役座標系を定めるためには、少なくとも変曲点をもたない曲線 $r$ を与える必要があることがわかる。

#### 4.3.4 方法 A の問題点

本節では、曲面上の曲線 $r$ を与えることで柱面共役場を定め、数値積分により対応する柱面共役座標系のアイソパラメータ曲線を求めることで C-strip モデルを求める方法を示した。本方法には以下に示す問題点がある。

- (a) 曲面の十分な領域を被覆する柱面共役場を定めることが困難
- (b) アイソパラメータ曲線の構造化が困難
- (c) 均質に配置された共役座標系のアイソパラメータ曲線を効率的に求めることが困難
- (d) C-strip モデルを構成する曲線が共役座標系から定まる径数付けをもたない

(a)は、4.3.2 項で指摘した問題点である。柱面共役場を定める曲面上の曲線 $r$ に関して、(4.39)を考慮した試行錯誤による修正が必要となるとともに、特異点を含むような柱面共役場の場合、曲線 $r$ により十分な領域を被覆するような柱面共役場を定めることが困難である。(b)は、数値積分で求まるアイソパラメータ曲線の隣接関係に関する問題である。数値積分により求まる複数のアイソパラメータ曲線から C-strip モデルを求める場合、アイソパラメータ曲線の集合に共役座標系上での隣接関係を定めて曲線の集合を構造化する必要がある。特に、柱面共役座標系が複数の特異点をもつ場合、構造化は非常に複雑な演算となる。次に、(c)は数値積分で求まるアイ

ソパラメータ曲線の配置に関する問題である。本手法では、曲線 $r$ の離散化により得られる点を初期点としてアイソパラメータ曲線を求めるが、数値積分以前に曲線の形状を知ることが不可能であるので、均質に配置されたアイソパラメータ曲線の集合を直接求めることは困難である。解析モデルbの結果を見ると、曲線 $r$ を等分割することで初期点を定めたにも関わらず、得られた C-strip モデルが不均質なモデルとなっていることがわかる。均質な C-strip モデルを求めるためには、多くの初期点から求まるアイソパラメータ曲線から全体の配置を考慮して必要な曲線を抽出する必要があるが非効率的である。最後に、(d)は曲線の径数付けに関する問題である。共役座標系による径数付け $\mathbf{x}(u, v)$ の半離散化で得られるアイソパラメータ曲線の理論解 $\mathbf{p}_i(v) = \mathbf{x}(i\Delta u, v)$ は共役座標系の離散対象でない方向のパラメータ $v$ によって径数付けられており、得られる半離散モデル $\{\mathbf{p}_i\}$ は線織を自明に備えている。一方で数値積分により求まるアイソパラメータ曲線はこのような径数付けをもたないので、それらが定める半離散モデルは線織を自明に備えない。線織が必要な場合、4.5節で述べる B-spline 形式による径数付けなどを用いて改めて径数付けを求める必要がある。

以上のように、数値積分を用いてアイソパラメータ曲線を直接求めることで C-strip モデルを求める方法は多くの欠点をもつため適用範囲が狭い。特に、(a)に示した柱面共役場の定め方に関する問題や(b)に示した構造化に関する問題は致命的な欠点である。

#### 4.4 C-strip モデル生成方法 B – Cylindrical メッシュによる方法

4.3節では、C-strip モデルを求めるための数値解析を用いた1つの方法として、柱面共役場の数値積分により柱面共役座標系のアイソパラメータ曲線を直接求めることで C-strip モデルを求める方法について述べた。本節では、数値解析を用いた別の方法として、C-strip モデルを求める代わりに、C-strip モデルと半離散 - 離散対応する cylindrical メッシュを求める方法について述べる。本節では、対象とする曲面 $S$ を任意に離散化して得られる三角形メッシュ $M = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ を対象として扱う。方法 B のフローは、1.柱面共役場の生成 2.共役場に沿った径数付け 3.再埋め込みによる四辺形メッシュの生成、である。

まず、4.4.1 項において、三角形メッシュ上の柱面共役場の生成方法について述べる。次に、4.4.2 項において、メッシュ上の柱面共役場に沿ってメッシュを径数付ける方法について述べ、4.4.3 項において、4.4.2 項で求まる四辺形メッシュから厳密な cylindrical メッシュを求める方法について述べる。最後に、4.4.4 項において、4.4.1 項で示す方法の数値解析例を示す。

##### 4.4.1 離散曲面上での柱面共役場の生成手法

本項では、三角形メッシュ $M$ 上に柱面共役場を生成する方法について述べる。まず、4.4.1.1 項において柱面共役場を求めるための最適化問題について述べ、続いて 4.4.1.2 項において 4.4.1.1 項で示す最適化問題の初期化手法について述べる。

###### 4.4.1.1 最適化問題

本項では、4.2.5 項で整理したメッシュ上の共役場のモデルを前提として、[24]で定式化され

た  $N$ - $RoSy$  場に対する最適化問題を拡張することで柱面共役場を求める最適化問題を定式化する。まず、 $M = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$  上の非直交な交差場  $\mathcal{D} = \{\{\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i, -\mathbf{v}_i, -\mathbf{w}_i\} | f_i \in \mathcal{F}\}$  を考え、交差場  $\mathcal{D}$  の連続性について考える。隣接フェース間での交差場の変化量は(4.29)で表されるが、これを用いて隣接するフェース  $f_i, f_j \in \mathcal{F}$  間での交差場の連続性を次のように評価する [31]。

$$S_{1,ij} = (\Delta\theta_1(e_{ij}^*))^2 = ((\theta_j + q\alpha_j) + r_{ij} - \theta_i + \pi p_{1,ij})^2 \quad (4.41)$$

$$S_{2,ij} = (\Delta\theta_2(e_{ij}^*))^2 = ((\theta_j + (1-q)\alpha_j) + r_{ij} - (\theta_i + \alpha_i) + \pi p_{2,ij})^2$$

ここで、 $q \in \{0,1\}$  は  $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{w}$  の対応関係のスイッチを表す変数であり、 $p_{1,ij}, p_{2,ij}$  は  $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{w}$  をそれぞれ  $2$ - $RoSy$  場と考えた場合の *period jump parameter* である(2.3.4 項参照)。(4.41)は [24]で示された  $N$ - $RoSy$  場に対する連続性の評価式の非直交な交差場への自然な拡張であり、[24]に倣えばメッシュ全体で交差場の連続性が次のように評価される。

$$S = \sum_{e_{ij} \in \mathcal{E}} S_{1,ij} + S_{2,ij} \quad (4.42)$$

ここで、 $e_{ij}$  は  $f_i, f_j$  が共有するエッジを表す。次に、交差場  $\mathcal{D}$  が柱面共役場となるための制約を整理する。離散曲面上の柱面共役場は、定義 4-10 によって定義された。この条件に基づけば、まず交差場  $\mathcal{D}$  が共役場であればよいので、定義 4-9 を用いて各フェース  $f_i$  に対して制約条件が次のように定まる。

$$C_{f_i} = \kappa_{i,1} \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{e}_{i,1} \rangle \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{e}_{i,1} \rangle + \kappa_{i,2} \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{e}_{i,2} \rangle \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{e}_{i,2} \rangle = 0 \quad (4.43)$$

ここで、各フェースでの基準軸として各フェースの最大主曲率方向  $\mathbf{e}_{i,1}$  を採用すれば、(4.43)は次のように変形される。

$$C_{f_i} = \kappa_{i,1} \cos(\theta_i) \cos(\theta_i + \alpha_i) + \kappa_{i,2} \sin(\theta_i) \sin(\theta_i + \alpha_i) = 0 \quad (4.44)$$

次に、柱面共役場を特徴付ける共変微分に関する条件  $\widetilde{\nabla}_{\mathbf{w}} \mathbf{v} = \mathbf{0}$  を整理する。離散共変微分演算子 [66] に関しては 4.2.5 項ですでに整理したが、この演算子を最適化問題に組み込むためにはスイッチ変数および *period jump* 変数を考慮した形式を導く必要がある。ここでは、これらの変数を考慮した形式を与える。3つの隣接フェースをもつフェース  $f_i$  を考え、隣接するフェースを  $f_a, f_b, f_c$  とする。このとき、(4.23)によって共有エッジ上でベクトルが次のように定まる。

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{ia} &= \frac{|T_i| \mathbf{v}_i + |T_a| \mathbf{v}_a}{|T_i| + |T_a|}, & \mathbf{v}_{ib} &= \frac{|T_i| \mathbf{v}_i + |T_b| \mathbf{v}_b}{|T_i| + |T_b|}, & \mathbf{v}_{ic} &= \frac{|T_i| \mathbf{v}_i + |T_c| \mathbf{v}_c}{|T_i| + |T_c|} \\ \mathbf{v}_i &= \cos(\theta_i) \mathbf{e}_{i,1} + \sin(\theta_i) \mathbf{e}_{i,2} \\ \mathbf{v}_a &= \cos(\theta_a + qa_a + r_{ia} + p_{1,ia}\pi) \mathbf{e}_{a,1} + \sin(\theta_a + qa_a + r_{ia} + p_{1,ia}\pi) \mathbf{e}_{a,2} \\ \mathbf{v}_b &= \cos(\theta_b + qa_b + r_{ib} + p_{1,ib}\pi) \mathbf{e}_{b,1} + \sin(\theta_b + qa_b + r_{ib} + p_{1,ib}\pi) \mathbf{e}_{b,2} \\ \mathbf{v}_c &= \cos(\theta_c + qa_c + r_{ic} + p_{1,ic}\pi) \mathbf{e}_{c,1} + \sin(\theta_c + qa_c + r_{ic} + p_{1,ic}\pi) \mathbf{e}_{c,2} \end{aligned} \quad (4.45)$$

ここで、 $\mathbf{v}$  の  $\mathbf{w}$  方向の共変微分を考えるために、 $\mathbf{v}_i$  と対応するベクトル  $\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c$  を考えること

に注意する。(4.45)で定まる3つのベクトル $\mathbf{v}_{ia}$ ,  $\mathbf{v}_{ib}$ ,  $\mathbf{v}_{ic}$ の各成分に対して、(4.25)~(4.27)を用いて $\mathbf{w}_i$ 方向の方向微分を求める。 $x$ 成分について示すと次のようになる。

$$\widetilde{D}_{\mathbf{w}_i} x_i = \mathbf{v}_{ia,x} \langle \nabla \psi_{ia}, \mathbf{w}_i \rangle + \mathbf{v}_{ib,x} \langle \nabla \psi_{ib}, \mathbf{w}_i \rangle + \mathbf{v}_{ic,x} \langle \nabla \psi_{ic}, \mathbf{w}_i \rangle \quad (4.46)$$

ここで、*Non-conforming* な基底関数 $\psi_{ia}$ ,  $\psi_{ib}$ ,  $\psi_{ic}$ は、それぞれ $f_i f_a$ ,  $f_i f_b$ ,  $f_i f_c$ が共有するエッジ上で値1をもつ基底関数であり、(4.25)の表記と異なるので注意する。すべての成分をまとめれば、以下が得られる。

$$\begin{bmatrix} \widetilde{D}_{\mathbf{w}_i} x_i \\ \widetilde{D}_{\mathbf{w}_i} y_i \\ \widetilde{D}_{\mathbf{w}_i} z_i \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_{ia} \quad \mathbf{v}_{ib} \quad \mathbf{v}_{ic}] \begin{bmatrix} \langle \nabla \psi_{ia}, \mathbf{w}_i \rangle \\ \langle \nabla \psi_{ib}, \mathbf{w}_i \rangle \\ \langle \nabla \psi_{ic}, \mathbf{w}_i \rangle \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

上記で求まるベクトルをフェース $f_i$ に対応する三角形 $T_{f_i}$ に射影することで $\mathbf{v}_i$ の $\mathbf{w}_i$ 方向の共変微分 $\widetilde{\nabla}_{\mathbf{w}_i} \mathbf{v}_i$ が得られる。このベクトルが零ベクトルであればよいので、制約条件が次のように定まる。

$$D_{f_i} = \langle \widetilde{\nabla}_{\mathbf{w}_i} \mathbf{v}_i, \widetilde{\nabla}_{\mathbf{w}_i} \mathbf{v}_i \rangle = 0 \quad (4.48)$$

制約条件(4.48)は、隣接フェースが3つ存在するフェースに対してのみ定まることに注意する。以上で定めた目的関数および制約条件から最適化問題を次のように定める。

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{find } \theta_0, \dots, \theta_{F-1} \in \mathbb{R}, a_0, \dots, a_{F-1} \in \mathbb{R} \\ & q_0, \dots, q_{E-1} \in \{0,1\}, p_{1,0}, \dots, p_{1,E-1} \in \mathbb{Z}, p_{2,0}, \dots, p_{2,E-1} \in \mathbb{Z} \\ \min \quad & S = \sum_{e_{ij} \in \mathcal{E}} S_{1,ij} + S_{2,ij} \\ \text{s. t.} \quad & C_{f_i} = 0 \quad (f_i \in \mathcal{F}) \\ & D_{f_i} = 0 \quad (f_i \in \mathcal{F}, f_i \text{ has no boundary vertex}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

共変微分条件(4.48)は隣接3フェースを有するすべてのフェースで定まるが、ここではメッシュ境界における曲率テンソルの推定精度を考慮して、メッシュ境界に頂点をもつフェースを共変微分条件から除外した。この最適化問題は、整数変数を含む混合整数計画問題であり効率的に解を求めることが困難である。一般の共役場を求める方法 [31]では、効率的に解を求めるために、整数変数を含まない形式で共役場の連続性を評価する目的関数を定式化し、共役場を求める最適化問題を連続最適化問題として定式化している。しかし、ここでは共変微分に関する制約条件が整数変数を含むため、[31]のような方法を用いることが不可能である。そこで、本研究では、[24]で示された *Adaptive Greedy* 法を非線形最適化問題に拡張し、(4.49)の整数変数を連続変数とみなした以下の最適化問題を複数回解くことで最適解を求める方法を用いる。

$$\begin{aligned}
(P) \quad & \text{find } \theta_0, \dots, \theta_{F-1} \in \mathbb{R}, a_0, \dots, a_{F-1} \in \mathbb{R} \\
& q_0, \dots, q_{E-1} \in \mathbb{R}, p_{1,0}, \dots, p_{1,E-1} \in \mathbb{R}, p_{2,0}, \dots, p_{2,E-1} \in \mathbb{R} \\
\min \quad & S = \sum_{e_{ij} \in \mathcal{E}} S_{1,ij} + S_{2,ij} \\
\text{s. t.} \quad & C_{f_i} = 0 \quad (f_i \in \mathcal{F}) \\
& D_{f_i} = 0 \quad (f_i \in \mathcal{F}, f_i \text{ has no boundary vertex}) \\
& 0 \leq q_i \leq 1 \quad (e_i \in \mathcal{E})
\end{aligned} \tag{4.50}$$

ここで、バイナリ変数 $q_0, \dots, q_{E-1}$ を連続変数とみなしたため側面制約を導入した。*Adaptive Greedy*法では、最適化問題を1回解くごとに1つの整数変数の丸めを実行するが、ここでは、計算コストを考慮して、ステップごとに定まる丸め誤差の許容値内にある変数をすべて四捨五入する。ステップごとに増加する丸め誤差の許容値(e.g., 0.1, 0.2, ...)が0.5に到達すればすべての整数変数が整数値となる。各ステップで解く非線形最適化問題は、最適化問題のサイズを考慮して拡張ラグランジュ法 [68]を用いて解き、拡張ラグランジュ法の部分問題はL-BFGS法 [68]を用いて解く。各ステップで拡張ラグランジュ法を適用する場合の初期解は、前ステップの最適解を用い、*Greedy*法全体の初期ステップでは4.4.1.2項で示す初期化手法で得られる初期解を用いる。

#### 4.4.1.2 初期化

本項では、4.4.1.1項で示した最適化問題の初期化手法について述べる。本手法は、柱面共役場を導く方向場を最適化問題に先立って近似的に求める手法である。

4.3.2項において滑らかな曲面 $S$ 上の柱面共役場の自由度に関する考察を示した。 $S$ 上の柱面共役場は、(4.36)を満たす部分集合 $r$ と $r$ 上の接ベクトル場 $\boldsymbol{v} = \{\boldsymbol{v}_p \in T_p S \mid p \in r\}$ によって一意に定められるのであった。4.3.2項では、数値積分を用いてC-stripモデルを求めるために、(4.36)に対する緩和条件として(4.39)を用いた。ここでは、この緩和条件をメッシュに対する条件へと拡張することを考える。メッシュへの拡張を考えるために、まず、 $S$ 上で考えた柱面共役座標系のアイソパラメータ曲線 $c_p$ に対応する $M$ 上の曲線 $c_i$ について示す。 $f_i \in \mathcal{F}$ においてある方向 $\boldsymbol{v}_i$ が与えられたとする。曲線 $c_p$ は1方向を $\boldsymbol{v}_p$ とする共役条件から定まる接ベクトル場 $\boldsymbol{w}$ を数値積分することで求めたので、 $M$ 上で同様の演算を考え、(4.18)が定めるメッシュ上の曲率テンソルから得られる主曲率および主曲率ベクトルと、埋め込み空間での共役条件(命題 2-3)を用いて曲線 $c_i$ を求める。第 $k$ ステップにおける点を $\boldsymbol{p}_k$ 、共役方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{w}_k$ として次のように点列を更新する。

$$\boldsymbol{p}^{k+1} = \boldsymbol{p}^k + \Delta \cdot \boldsymbol{w}^k \tag{4.51}$$

ここで、 $\Delta$ は更新幅である。共役方向 $\boldsymbol{w}^k$ は点 $\boldsymbol{p}^k$ における曲率テンソルから得られる主曲率 $\kappa_1$ 、 $\kappa_2$ および主曲率ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ 、 $\boldsymbol{e}_2$ が定める次の共役条件から求める。

$$\kappa_1 \langle \tilde{\boldsymbol{v}}_i, \boldsymbol{e}_1 \rangle \langle \boldsymbol{w}^k, \boldsymbol{e}_1 \rangle + \kappa_2 \langle \tilde{\boldsymbol{v}}_i, \boldsymbol{e}_2 \rangle \langle \boldsymbol{w}^k, \boldsymbol{e}_2 \rangle = 0 \tag{4.52}$$

ここで、 $\tilde{\boldsymbol{v}}_i$ は初期フェースで与えられるベクトル $\boldsymbol{v}_i$ を方向の変化が最小となるように $\boldsymbol{p}^k$ がのる

フェースに射影したベクトルである。(4.52)で求まる $\mathbf{w}^k$ を正規化して(4.51)で用いることで点を更新する。(4.51)による点列更新は埋め込み空間で直接行われるので、点列更新時にフェース境界への到達を確認し、フェース境界に到達した場合、 $\mathbf{p}^{k+1}$ をエッジ上の点として更新する。 $f_i$ 上の点 $\mathbf{p}_i$ を初期点 $\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}_i$ として与え、点列更新を $M$ の境界に到達するまで繰り返せば $M$ 上の曲線 $c_i$ を求めることができる。点 $\mathbf{p}_i$ を $f_i$ に対応する三角形の重心とし、 $\mathbf{v}_i$ を与えて定まる曲線 $c_i$ がそのフェースの集合を $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$ とする。

ここで、滑らかな曲面の場合に倣って、 $r \subset \mathcal{F}$ と $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_i | f_i \in r\}$ を与えることを考える。このとき、 $r$ と $\mathbf{v}$ から $M$ 上の曲線の集合 $\{c_i\}$ と対応するフェースの集合の族 $\{\mathcal{F}_i\}$ が定まる。(4.39)を次のように拡張する。

$$\begin{cases} \forall f_i, \forall f_j \in r, c_i \neq c_j \implies c_i \cap c_j = \emptyset \\ \bigcup_{f_i \in r} \mathcal{F}_i = \mathcal{F} \end{cases} \quad (4.53)$$

滑らかな曲面の場合と異なり、異なるフェース重心を始点とする曲線が一致することは一般にないので、第1式は曲線の集合 $\{c_i\}$ に含まれるすべての曲線が互いに交差しないことを意味する。第2式は、フェースの被覆であり、曲面そのものの被覆と比較して扱いやすい条件であることは明らかであろう。本研究では、このような柱面共役場を定めるために次に示すアルゴリズムを用いる。

[Initialization Algorithm]

入力 : メッシュ $M$

変数 : フェースを格納するキュー $Q$ , 曲線の集合 $\mathcal{C}$ , 共役方向の集合の族 $\mathcal{D}$

1. 初期化

キュー $Q$ の初期化  $\rightarrow Q = \emptyset$

曲線の集合 $\mathcal{C}$ の初期化  $\rightarrow \mathcal{C} = \emptyset$

共役方向の集合の族 $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_{F-1}\}$ の初期化  $\rightarrow \forall i, \mathcal{D}_i = \emptyset$

2. 初期曲線の生成

任意に1つのフェースを選択  $\rightarrow f_i$

$f_i$ の重心 $G(f_i)$ から方向 $\mathbf{v}_i \in T_{G(f_i)}M$ を与えて曲線 $c_i$ を生成(詳細は後述)  $\rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C} \cup \{c_i\}$

曲線 $c_i$ のすべての離散点 $\mathbf{p}$ で定まる共役方向を対応するフェースに格納する

$$\rightarrow \forall \mathbf{p} \in c_i, \mathbf{p} \in T_{f_j}, \mathcal{D}_j = \mathcal{D}_j \cup \{\mathbf{v}(\mathbf{p}), \mathbf{w}(\mathbf{p}), -\mathbf{v}(\mathbf{p}), -\mathbf{w}(\mathbf{p})\}$$

$f_i$ のすべての近傍フェースを $Q$ にプッシュ

3. Do loop until ( $Q = \emptyset$ )

$Q$ からフェースをポップ  $\rightarrow f_i$

If  $\mathcal{D}_i = \emptyset$

$f_i$ の重心 $G(f_i)$ から方向 $\mathbf{v}_i \in T_{G(f_i)}M$ を与えて曲線 $c_i$ を生成(詳細は後述)

$$\rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C} \cup \{c_i\}$$

曲線 $c_i$ のすべての離散点 $\mathbf{p}$ で定まる共役方向を対応するフェースに格納する

$$\rightarrow \forall \mathbf{p} \in c_i, \mathbf{p} \in T_{f_j}, \mathcal{D}_j = \mathcal{D}_j \cup \{\mathbf{v}(\mathbf{p}), \mathbf{w}(\mathbf{p}), -\mathbf{v}(\mathbf{p}), -\mathbf{w}(\mathbf{p})\}$$

End

$f_i$ の近傍フェースで $Q$ に含まれたことのないフェースを $Q$ にブッシュ

#### 4. 共役場の生成

すべてのフェース $f_i$ で共役方向 $D_0, D_1, \dots \in \mathcal{D}_i$ をフェース重心からの距離を用いて重み付き平均することでフェース $f_i$ の共役方向とする

$$\rightarrow \forall f_i \in \mathcal{F}, \mathbf{v}_i = \frac{\sum_{D_j \in \mathcal{D}_i} \text{dist}(G(f_i), \mathbf{p}_j) \cdot \mathbf{v}_j}{\sum_{D_j \in \mathcal{D}_i} \text{dist}(G(f_i), \mathbf{p}_j)}, \mathbf{w}_i = \frac{\sum_{D_j \in \mathcal{D}_i} \text{dist}(G(f_i), \mathbf{p}_j) \cdot \mathbf{w}_j}{\sum_{D_j \in \mathcal{D}_i} \text{dist}(G(f_i), \mathbf{p}_j)}$$

#### 5. 共役場の補間

共役場の定まらないフェースが存在する場合、[24]を用いて各方向を 2-RoSy 場として補間する

上記のアルゴリズム中で省略された曲線 $c_i$ の生成部分について詳細を述べる。フェース $f_i$ から曲線 $c_i$ を生成するためには、 $f_i$ に対応する三角形面上の単位ベクトル $\mathbf{v}_i$ を与える必要がある。まず、ステップ2における初期曲線の生成について示す。初期曲線生成時には、メッシュ上のすべてのフェースで共役場が定まっていないので、任意に方向 $\mathbf{v}_i$ を与えることができる。本研究では、方向が指定されない場合、曲線 $c_i$ に沿って共役場の交角の最小値が最大となるような $\mathbf{v}_i$ を採用する。これは、PQ メッシュを求めた際に偏平な四辺形フェースが生じることを防ぐためである。厳密な最適解を求めることは困難であるので、有限個の $\mathbf{v}_i$ に対して $c_i$ を求め、その中で最適な $\mathbf{v}_i$ を初期フェース $f_i$ に与える方向 $\mathbf{v}_i$ として用いる。次に、ステップ3における曲線生成について示す。ステップ3において対象フェースの少なくとも1つの近傍フェースに共役場が定まっている場合、近傍の共役場との連続性を考慮して、近傍フェースに定まる方向 $\mathbf{v}_j$ のフェース面積による重み付き平均により方向 $\mathbf{v}_i$ を定める。この方向 $\mathbf{v}_i$ を用いて曲線 $c_i$ を生成し、 $\forall c_j \in \mathcal{C}, c_i \cap c_j = \emptyset$ を確認する。これが満たされた場合、方向 $\mathbf{v}_i$ を有効とし、満たされない場合、許容値の範囲内で方向 $\mathbf{v}_i$ を修正する。許容値の範囲内で条件を満たす曲線 $c_i$ が生成されない場合、フェース $f_i$ に方向を定めず次のステップへと移行する。

以上のアルゴリズムを用いることで、 $M$ 上に柱面共役場の近似解を定めることができるが、アルゴリズムの性質上、ノイズを含む共役場が生じる。また、ステップ4ですべてのフェースに共役場が定まらなかった場合、ステップ5において一般の 2-RoSy 場として場の補間を行うので、共役性を満たさない方向場が定まることになる。本項で得られた柱面共役場を初期解として4.4.1.1 項で示した最適化問題を解くことにより、滑らかな柱面共役場の厳密解を求めることができる。

### 4.4.2 共役場に沿った径数付け

本項では、4.4.1 項で示した方法により定まる $M$ 上の柱面共役場に沿った $M$ の径数付けを求める方法について示す。本章では、[31]による方法をわずかに修正した方法を用いる。[31]による方法の基本となるのが、2.3.3.5 項で整理した方法 [24]である。

$M$ 上の柱面共役場 $\mathcal{D} = \{\{\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i, -\mathbf{v}_i, -\mathbf{w}_i\} | f_i \in \mathcal{F}\}$ が得られているとする。 $M$ 上のアイソパラメータ曲線が $\mathcal{D}$ に沿うために、[31]では各フェース $f_i \in \mathcal{F}$ で次が成り立つことを目的とする。

$$\left\langle \frac{\nabla u_i}{\|\nabla u_i\|}, \mathbf{v}_i \right\rangle^2 + \left\langle \frac{\nabla v_i}{\|\nabla v_i\|}, \mathbf{w}_i \right\rangle^2 = 0 \quad (4.54)$$

上式と(2.82)はともにアイソパラメータ方向の配向に関する条件であるが、アイソパラメータ方向に直交する方向を表す $\nabla u_i$ ,  $\nabla v_i$ の正規化の有無に違いがある。(2.82)が満たされる時、すべてのフェースで次が成り立つ。

$$\nabla u_i = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}_i, \quad \nabla v_i = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i \quad (4.55)$$

$\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i$ が単位ベクトルであることを考慮すると、上式がすべてのフェースで成り立つとき、すべてのフェースで $\|\nabla u_i\| = \|\nabla v_i\| = 1/h$ が成り立つが、これは等長的な径数付けを意味する。つまり、(2.82)はアイソパラメータ方向の配向と等長性を同時に満たすような径数付けを求める。一方で、(4.54)はアイソパラメータ方向の配向のみを満たす径数付けを求めるので、(4.54)を用いることで配向に関してより優良な解が得られる。本研究では、(4.54)と同様にアイソパラメータ方向の配向のみを考えるが、より安定的に解を求めるために(4.54)を次の式で置き換える。

$$\left\| \frac{\nabla u_i}{\|\nabla u_i\|} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}_i \right\|^2 + \left\| \frac{\nabla v_i}{\|\nabla v_i\|} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i \right\|^2 = 0 \quad (4.56)$$

(4.54)では、 $\nabla u_i$ ,  $\nabla v_i$ の反転に関して左辺が不変であるが、(4.56)で置き換えることでこれを防ぐ。すべてのフェースで(4.56)を考慮して次の関数を最小化する。

$$E = \sum_{f_i \in \mathcal{F}} |T_i| \left( \left\| \frac{\nabla u_i}{\|\nabla u_i\|} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}_i \right\|^2 + \left\| \frac{\nabla v_i}{\|\nabla v_i\|} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i \right\|^2 \right) \quad (4.57)$$

ここで、 $|T_i|$ は $f_i$ に対応する三角形の面積である。上式を最小化する径数付け $\bar{M} \subset \mathbb{R}^2$ を求めればよいが、2.3.3.5項と同様に共役場の特異点に関する制約を設ける必要がある。また、特異点に対応する $\bar{M}$ の頂点は整数点である必要があるので、解くべき最適化問題は混合整数計画問題となる。(2.82)を用いた形式では、目的関数が2次関数であることから *Adaptive Greedy* 法 [24]の適用が可能であったが、(4.54)の形式では目的関数が通常非線形関数となるので、*Adaptive Greedy* 法の適用は不可能である。[31]では、*Adaptive Greedy* 法と同様のアプローチにより、整数変数を実数変数とみなした連続最適化問題を繰り返し解くことで整数変数を逐次決定していくことで(4.57)を目的関数とする混合整数計画問題の最適解を求める。各ステップで解く非線形の制約付き最適化問題は問題のスケールを考慮して L-BFGS 法 [68]により最適解を求める。本研究でも [31]と同じ方法を用いる。この方法の適用には初期解 $\bar{M}_0$ が必要であるが、本研究では、[24]の方法により初期解 $\bar{M}_0$ を求める。

上述の最適化問題から柱面共役場に沿う径数付け $\bar{M}$ が求めれば、 $\bar{M}$ 上の整数点を頂点とする四辺形メッシュ $\bar{M}_{cyl}$ を求めることができ、この $\bar{M}_{cyl}$ の各頂点の $\bar{M}$ 上における重心座標を用いれば、各頂点の $M$ 上への埋め込み点を求めることができる。そのようにして定まる埋め込み点を頂点座標とする $M_{cyl}$ が求めるべき cylindrical メッシュである。

### 4.4.3 Cylindrical メッシュの厳密解を求める最適化問題

本項では、4.4.2 項で示した方法により求まる cylindrical メッシュから、離散化によって生じる誤差を解消した厳密解を求める方法について示す。通常の PQ メッシュの厳密解を求める方法 [29] を応用する。

4.4.2 項で示した方法により求まる cylindrical メッシュは、離散化により生じる誤差や数値解析にともなう誤差を含むため、線織に対応するエッジの平行条件やフェースの平面性を厳密には満足しない四辺形メッシュである。[29] では、PQ メッシュの近傍解に対してメッシュ頂点を変数とする次の目的関数を最小化することで PQ メッシュの厳密解を求める。

$$E = \lambda_1 f_{prox} + \lambda_2 f_{fair} + \lambda_3 f_{pq} + \lambda_4 f_{det} \quad (4.58)$$

ここで、 $\lambda_1 \sim \lambda_4$  は各評価指標に対する重み係数、 $f_{prox}$  は PQ メッシュの対象曲面に対する近似性指標、 $f_{fair}$  はメッシュエッジのフェアリングエネルギー、 $f_{pq}$  はフェースの平面性指標、 $f_{det}$  は 1 方向に分割幅の小さいストリップモデルを求める場合の扁平フェースに対する平面性指標である。[29] は通常の PQ メッシュを求める方法であるのでフェースの平面性指標が用いられている。本研究では、2 つの平面性指標  $f_{pq}, f_{det}$  をまとめて柱面性指標  $f_{cyl}$  で置き換える。

ここでは、本研究で導入する柱面性指標についてのみ示す。柱面は線織の平行性により特徴付けられるので、各フェース  $f_i$  に関して次が成り立てばよい。

$$\mathbf{p}_{i,2} - \mathbf{p}_{i,1} \parallel \mathbf{p}_{i,3} - \mathbf{p}_{i,4} \quad \text{or} \quad \mathbf{p}_{i,4} - \mathbf{p}_{i,1} \parallel \mathbf{p}_{i,3} - \mathbf{p}_{i,2} \quad (4.59)$$

ここで、 $\mathbf{p}_{i,1} \sim \mathbf{p}_{i,4}$  は  $f_i$  の頂点を反時計回りに見た 4 頂点である。平行条件が課された方向に対応する条件式を用いればよい。(4.59) は次のように表せる。

$$\langle \mathbf{e}_{i,1}, \mathbf{e}_{i,2} \rangle^2 = \langle \mathbf{e}_{i,1}, \mathbf{e}_{i,1} \rangle \langle \mathbf{e}_{i,2}, \mathbf{e}_{i,2} \rangle \quad (4.60)$$

ここで、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  は平行条件が課された 2 辺に対応するベクトルである。すべてのフェースの総和を取ることにより柱面性指標は以下のように定義できる。

$$f_{cyl} = \sum_i \langle \mathbf{e}_{i,1}, \mathbf{e}_{i,2} \rangle^2 - \langle \mathbf{e}_{i,1}, \mathbf{e}_{i,1} \rangle \langle \mathbf{e}_{i,2}, \mathbf{e}_{i,2} \rangle \quad (4.61)$$

(4.58) 中の  $f_{pq}, f_{det}$  をまとめて上記の  $f_{cyl}$  で置き換えることで、cylindrical メッシュを求める問題へと拡張される。(4.58) を目的関数とする最適化問題は制約のない非線形の連続最適化問題であるので、準ニュートン法などの一般的な解法で最適解を効率的に求めることができる。

#### 4.4.4 数値解析

本項では、方法 B を 4.3.3 項で扱った解析モデルと同じ解析モデルに対して適用した数値解析例を示す。ここでは、特に、4.4.1 項で示した柱面共役場の生成について解析結果を示す。すべての数値解析は、Intel® Core™ i9-9980HK プロセッサを搭載する PC を用いて実行されており、各アルゴリズムの実装においては並列演算処理を適宜組み込んでいる。

##### 4.4.4.1 解析モデル a

本項では、4.3.3.1 項で用いた曲面  $S_a$  (図 4-7) を離散化して得られる三角形メッシュ  $M_a$  ( $V = 292, E = 824, F = 533$ ) を解析対象とする (図 4-12)。ここでは、4.3.3.1 項の結果と比較するために、X-Y 平面上で原点を通る直線を Z 方向に沿ってメッシュに投影することで得られるメッシュ上の曲線を与え、投影曲線の接ベクトルを投影曲線がのるフェースの制約方向とした。制約フェースの方向場の角度  $\theta_i$  に関して、[31] と同様に、側面制約 (変化許容量  $\pm 7.5^\circ$ ) を最適化問題に追加した。初期化アルゴリズムでは、制約フェースを初期キューに優先的に追加することで制約を満たす初期解を生成した。最適化問題の零閾値は、最適性閾値  $\varepsilon_{opt} = 0.001$ 、共役条件に対する許容性閾値  $\varepsilon_{feas,c} = 0.001$ 、零共変微分条件に対する許容性閾値  $\varepsilon_{feas,cov} = 0.01$  とし、貪欲法の丸め許容誤差は、ステップごとに 0.1 ずつ増加させ、計 6 回のステップで最適化問題を解く設定とした。

まず、混合整数計画問題として定式化された最適化問題 (4.49) に対する貪欲法の精度を確認するために、零共変微分条件を除外した最適化問題を解くことで一般の共役場を求め、非線形最適化問題を解く既往手法 [31] によって得られる共役場と比較した。この比較結果を図 4-13 に示す。すべてのパターンでおおよそ等しい共役場が得られており、最適化問題 (4.49) を貪欲法で解くことでも正しく共役場が得られることが確かめられた。

次に、柱面共役条件を加えた最適化問題から得られた結果を図 4-14 から図 4-18 に示す。まず、図 4-14 では、初期化アルゴリズム内で生成される初期曲線を示した。4.3.3.1 項で示した方法 A の結果と比較すると、離散曲面上において精度良く柱面共役座標系のアイソパラメータ曲線が推定されていることがわかる。次に、図 4-15 に最適解として得られた柱面共役場を示した。初

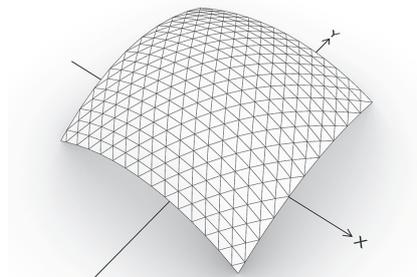


図 4-12 解析モデル a (メッシュ  $M_a$ )

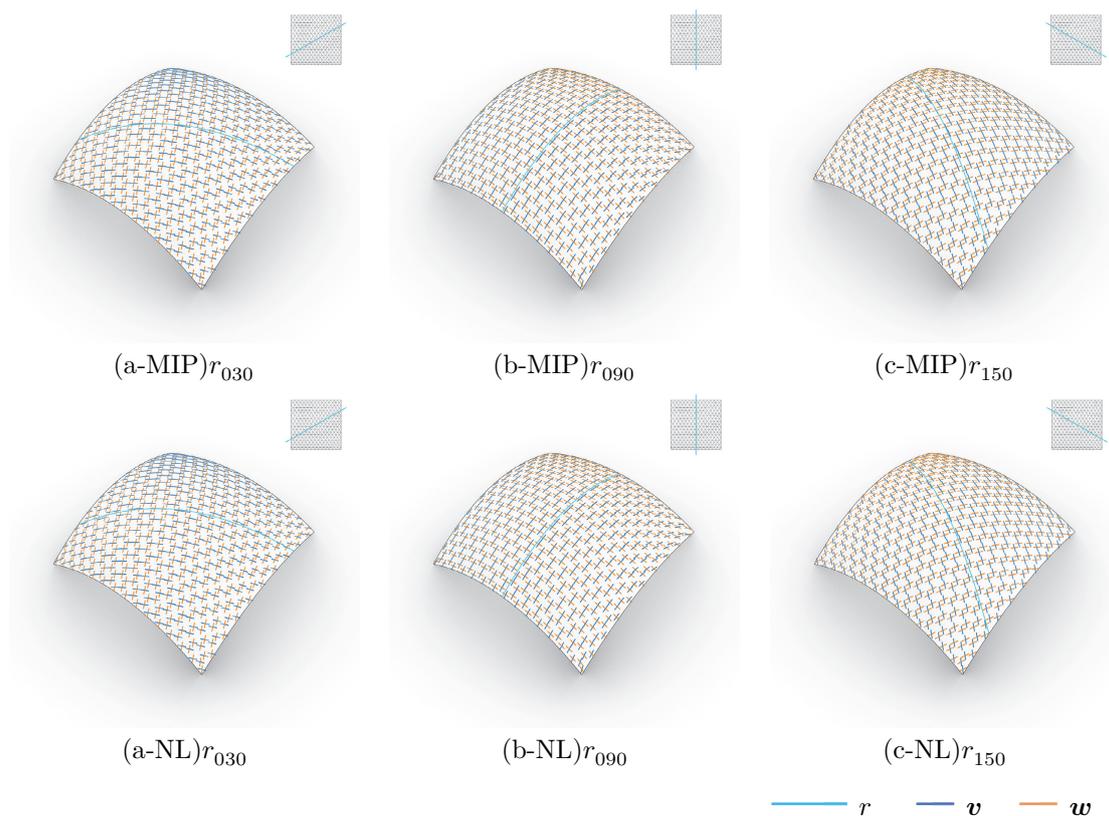


図 4-13 混合整数計画問題(MIP)と非線形最適化問題(NL)の比較( $r_{030}, r_{090}, r_{150}$ のみ抜粋)

期曲線が含むノイズが解消され、滑らかな交差場が得られていることがわかる。続いて、図 4-16 および図 4-17 に初期解と最適解における共変微分を示した。最適解において共変微分のノルムは十分小さな値となっており、柱面共役条件を正しく満たす解が得られていることがわかる。本解析モデルの場合、初期解においてもある程度小さな共変微分が得られており、初期化アルゴリズムの有効性が確認できる。最後に、一般の共役場と柱面共役場の共変微分の比較を図 4-18 に示した。本解析モデルの場合、一般の共役場を求めた場合でも十分小さな共変微分となる共役場が得られている。したがって、この一般の共役場から PQ メッシュを求めた場合にも、cylindrical メッシュに近い PQ メッシュが得られ、得られた PQ メッシュに 4.4.3 項の方法を適用することで cylindrical メッシュを求めることも十分可能であろう。

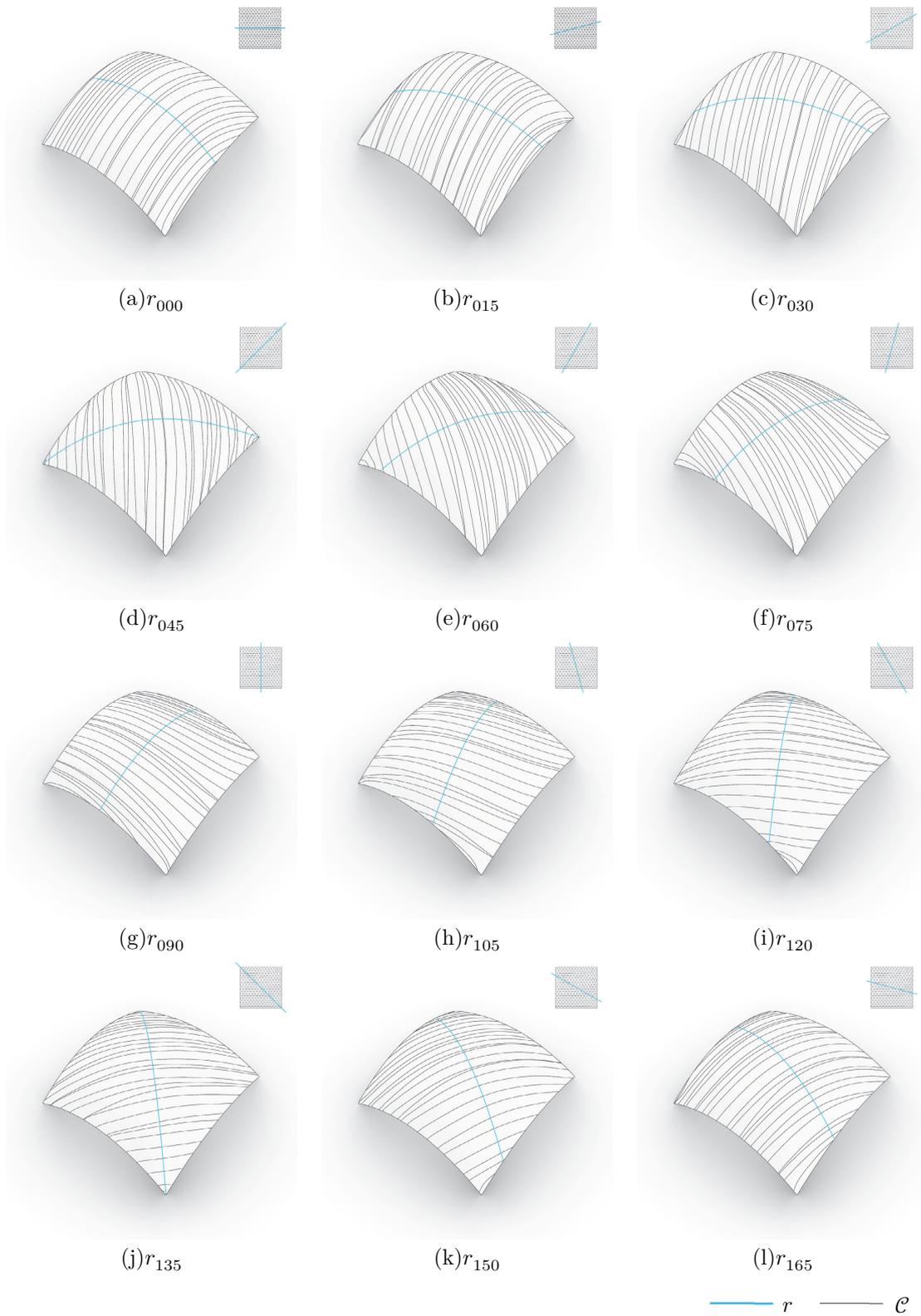


図 4-14 解析モデル a 初期化アルゴリズムで生成される曲線集合  $\mathcal{C}$

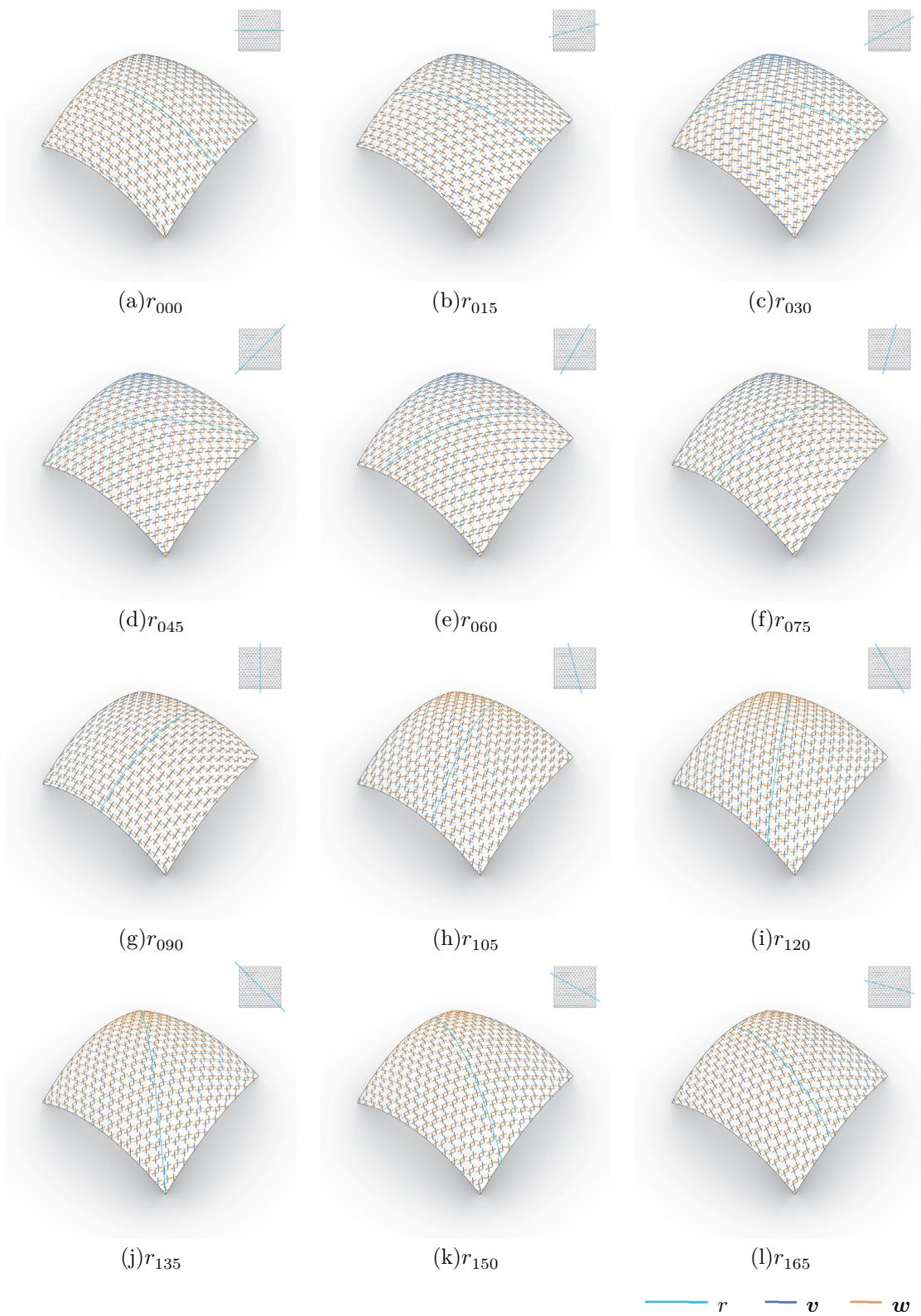


図 4-15 解析モデル a 柱面共役場の最適解

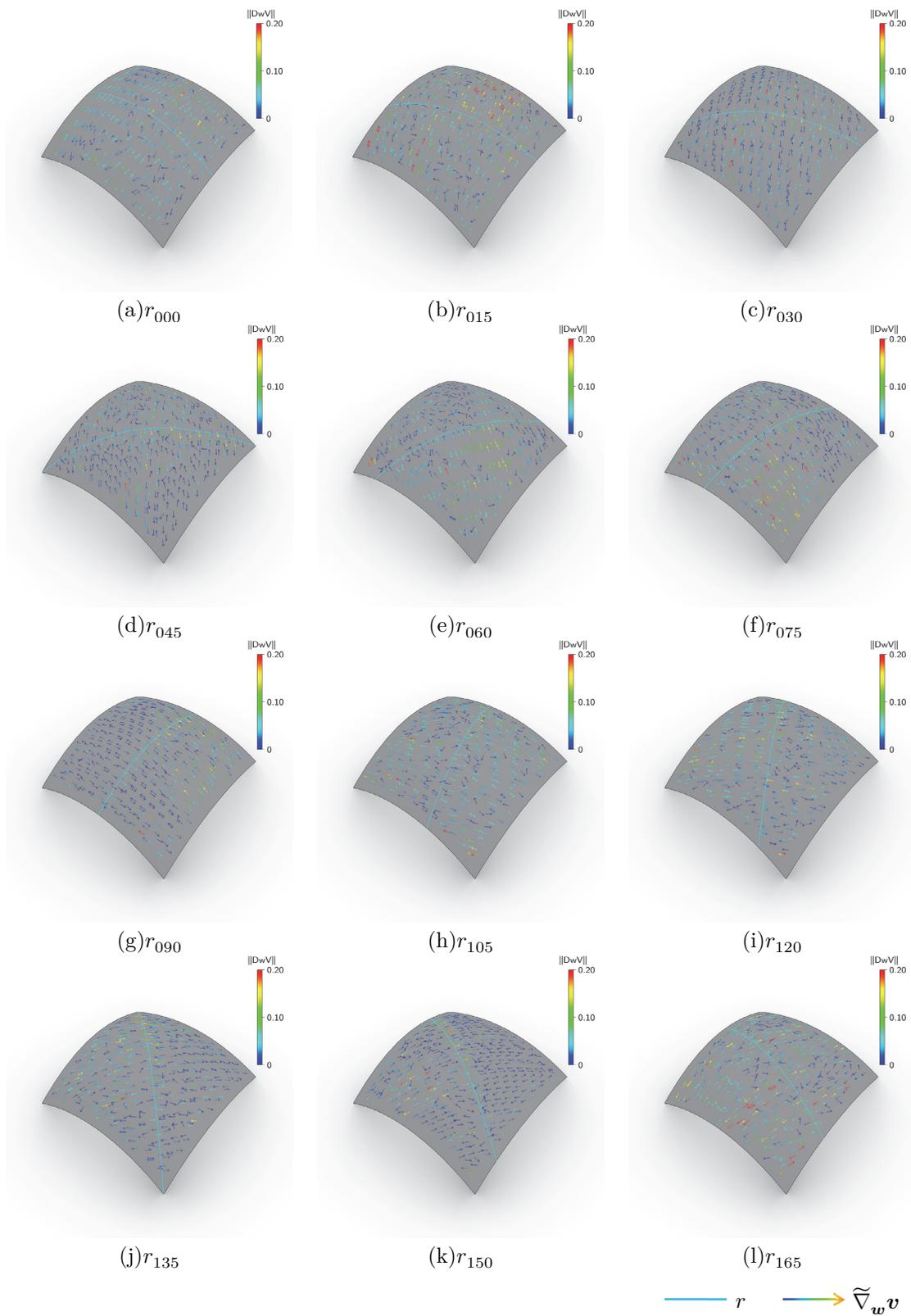


図 4-16 解析モデル a 初期解における共変微分

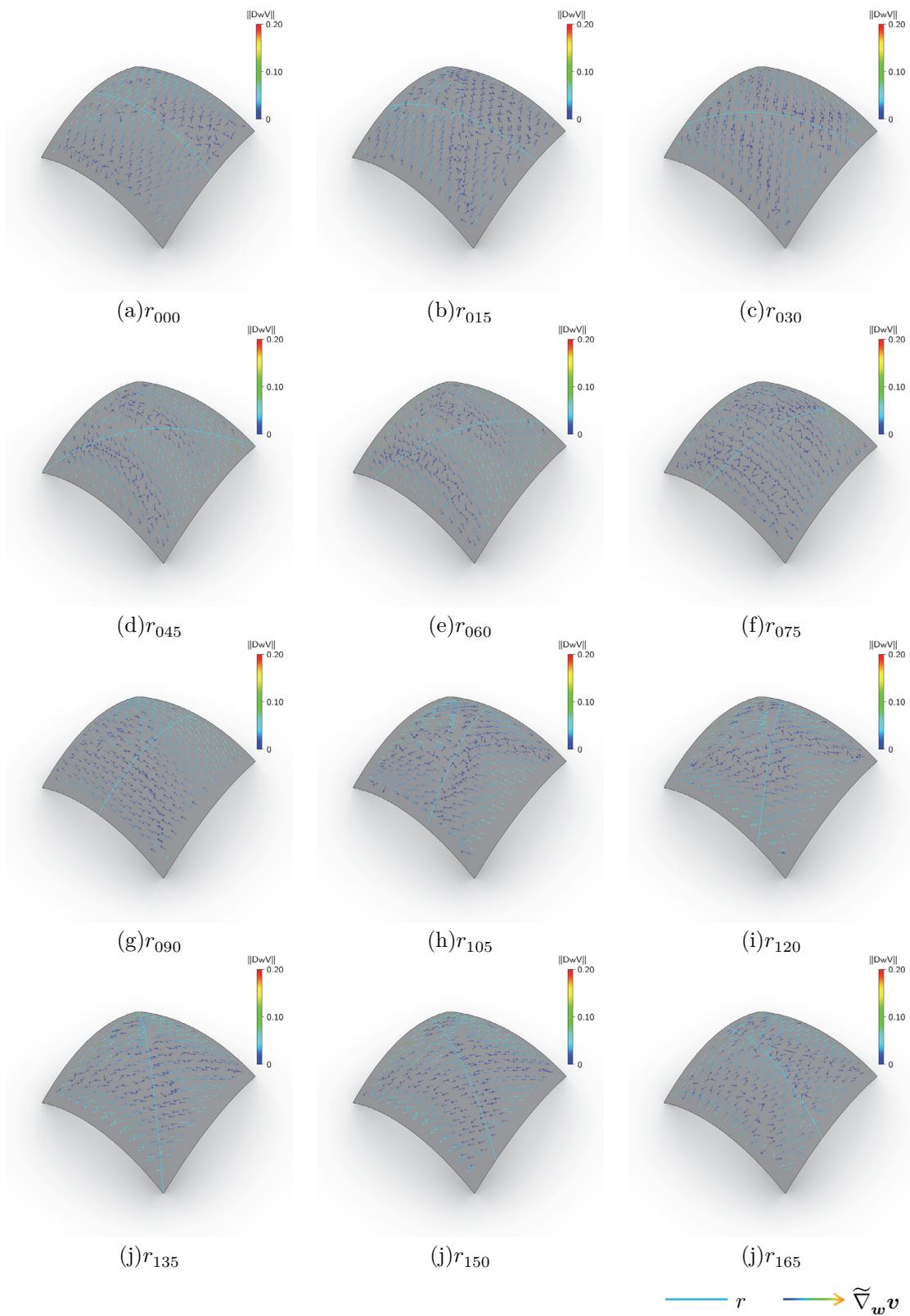


図 4-17 解析モデル a 最適解における共変微分

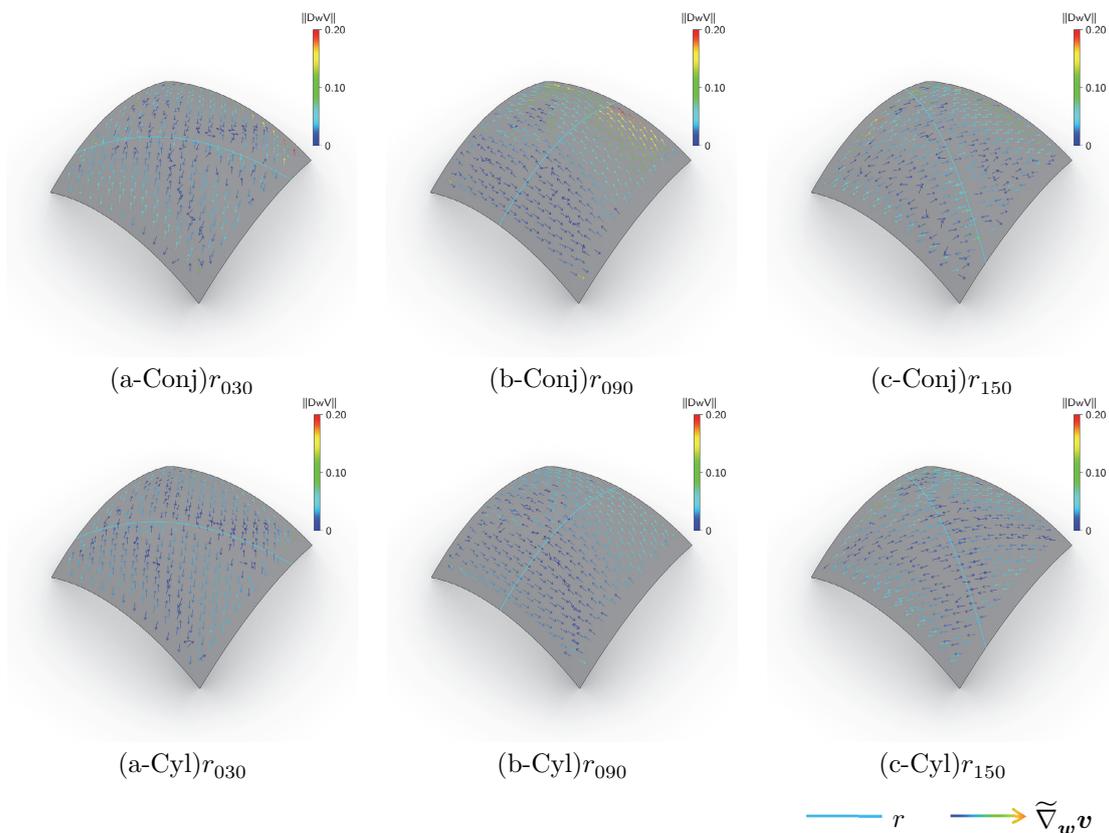


図 4-18 解析モデル a 一般共役場と柱面共役場の共変微分比較( $r_{030}, r_{090}, r_{150}$ のみ抜粋)

#### 4.4.4.2 解析モデル b

本項では、4.3.3.2 項で用いた曲面 $S_b$ (図 4-9)を離散化して得られる三角形メッシュ $M_b(V = 292, E = 824, F = 533)$ を解析対象とする(図 4-19)。前項と同様に、X-Y 平面上で原点を通る直線により制約フェースを定めた。最適化問題の閾値および貪欲法のパラメータも前項と同じ値を用いた。

前項と同様に最適化問題(4.49)に対する貪欲法の精度を確認した(図 4-20)。本解析モデルの場合、(b) $r_{090}$ の一部の領域で異なる共役場が得られているが、最適解における目的関数値は同程度の値となっており、いずれの方法でも同程度に滑らかな共役場が得られることが確かめられた。また、(b)  $r_{090}$ 以外の解析例ではおおよそ等しい共役場が得られていることが確認できる。

次に、零共変微分条件を加えた最適化問題から得られた結果を図 4-21 から図 4-25 に示す。図 4-21 に示した初期化アルゴリズム内で生成される初期曲線と 4.3.3.2 項で示した方法 A の結果を比較すると、離散曲面上において精度よく柱面共役座標系のアイソパラメータ曲線が推定されているとともに、方法 A では柱面共役座標系を定めることができなかった領域においても初期曲線が得られており、より広範な領域で柱面共役場が推定されていることがわかる。次に、図

4-22 に示した柱面共役場の最適解を見ると、初期解がもつノイズが解消され滑らかな場が得られていることがわかる。続いて、図 4-23 および図 4-24 に示した初期解と最適解における共変微分を見ると、初期解における共変微分のノルムが最適解において十分小さくなっていることがわかる。最後に、図 4-25 に示した一般の共役場と柱面共役場の共変微分の比較を見ると、本解析モデルの場合、一般の共役場は大きな共変微分をもつことがわかる。このため、本解析モデルの場合は、一般の共役場から PQ メッシュを求めたとき、cylindrical メッシュと大きく異なる PQ メッシュが求まることになるので 4.4.3 項の方法の適用は困難であろう。

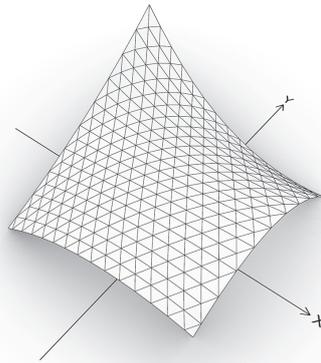


図 4-19 解析モデル b(メッシュ  $M_b$ )

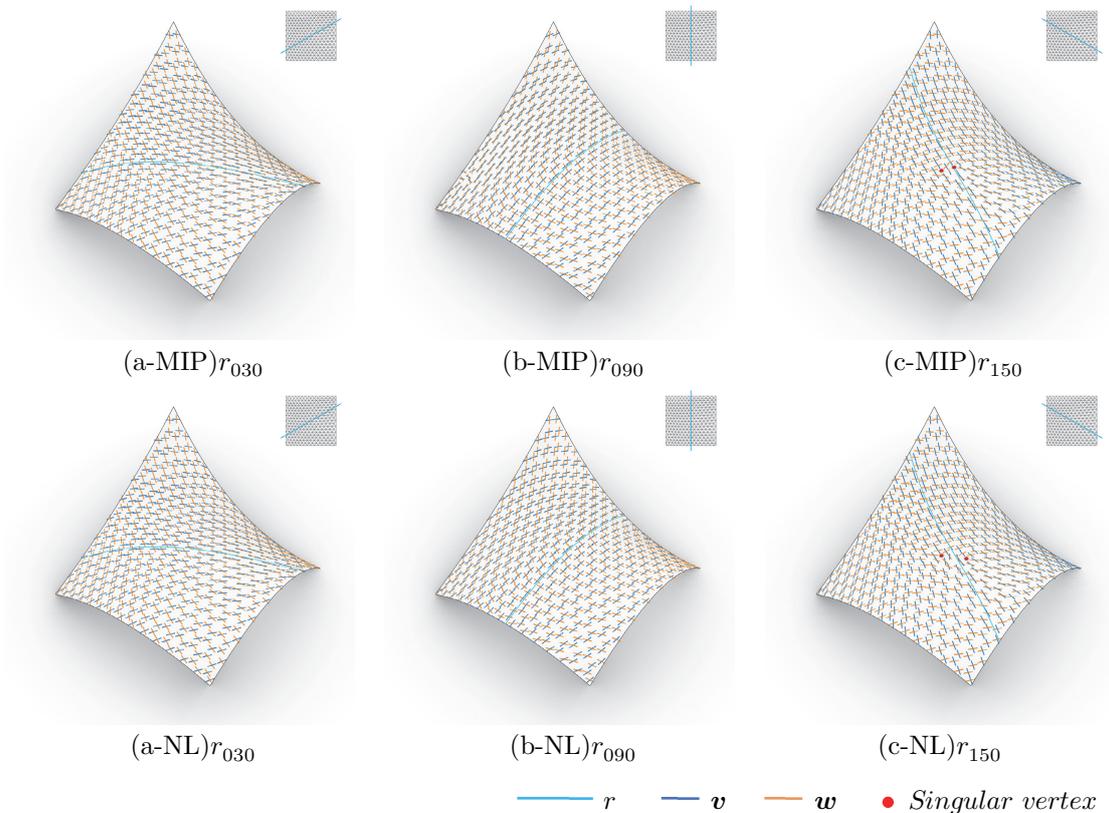


図 4-20 混合整数計画問題(MIP)と非線形最適化問題(NL)の比較( $r_{030}, r_{090}, r_{150}$ のみ抜粋)

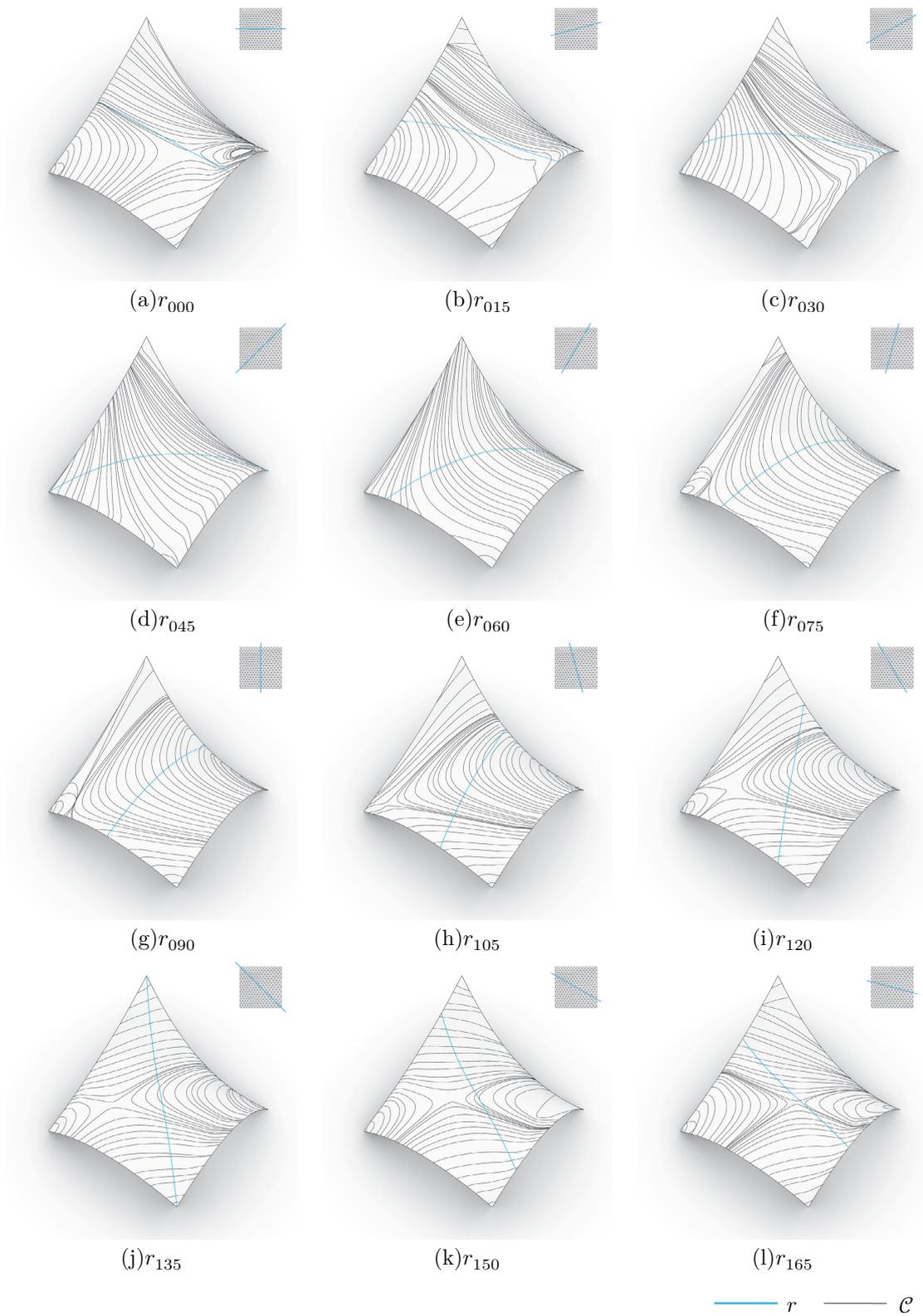


図 4-21 解析モデル b 初期化アルゴリズムで生成される曲線集合  $c$

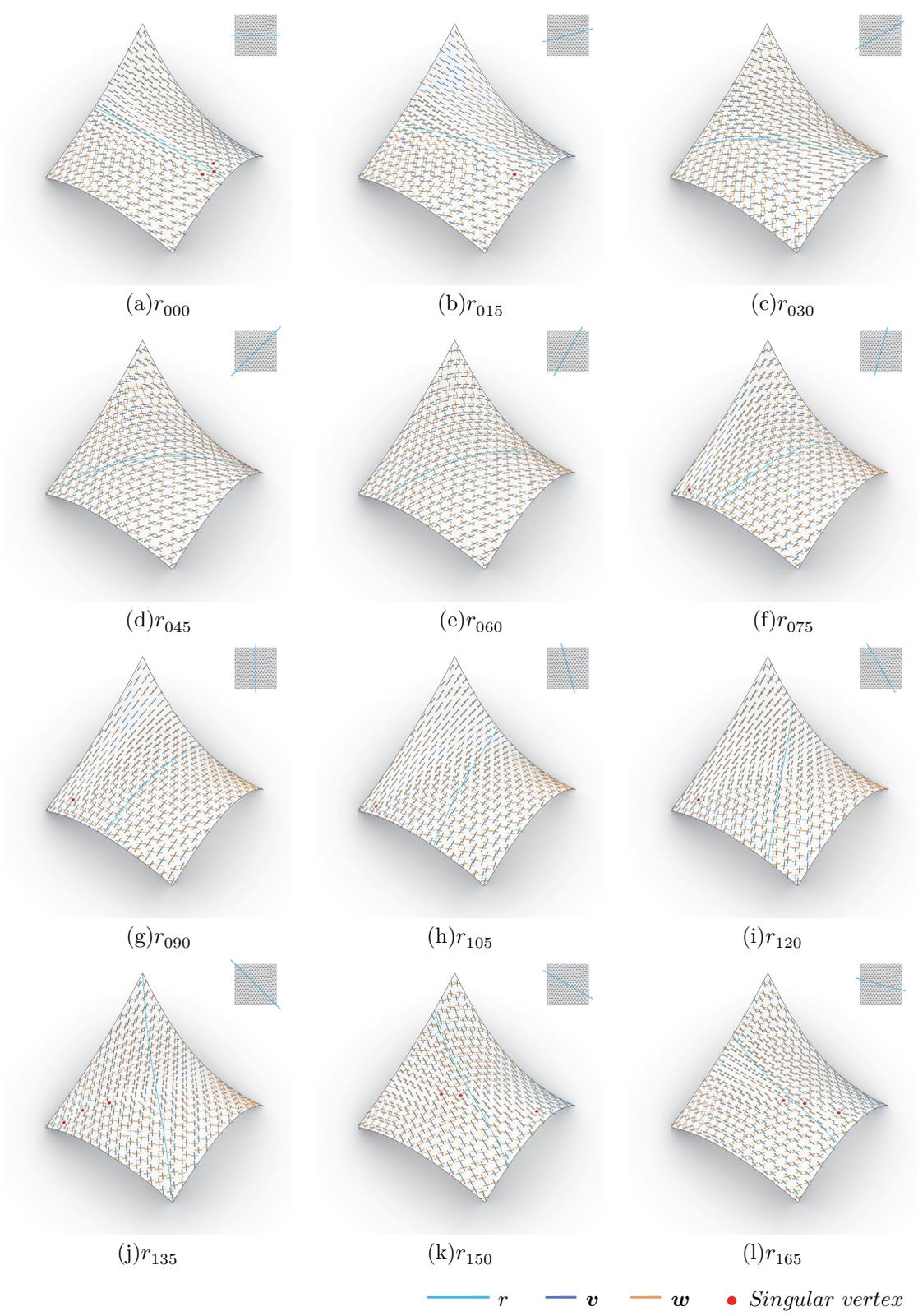


図 4-22 解析モデル b 柱面共役場の最適解

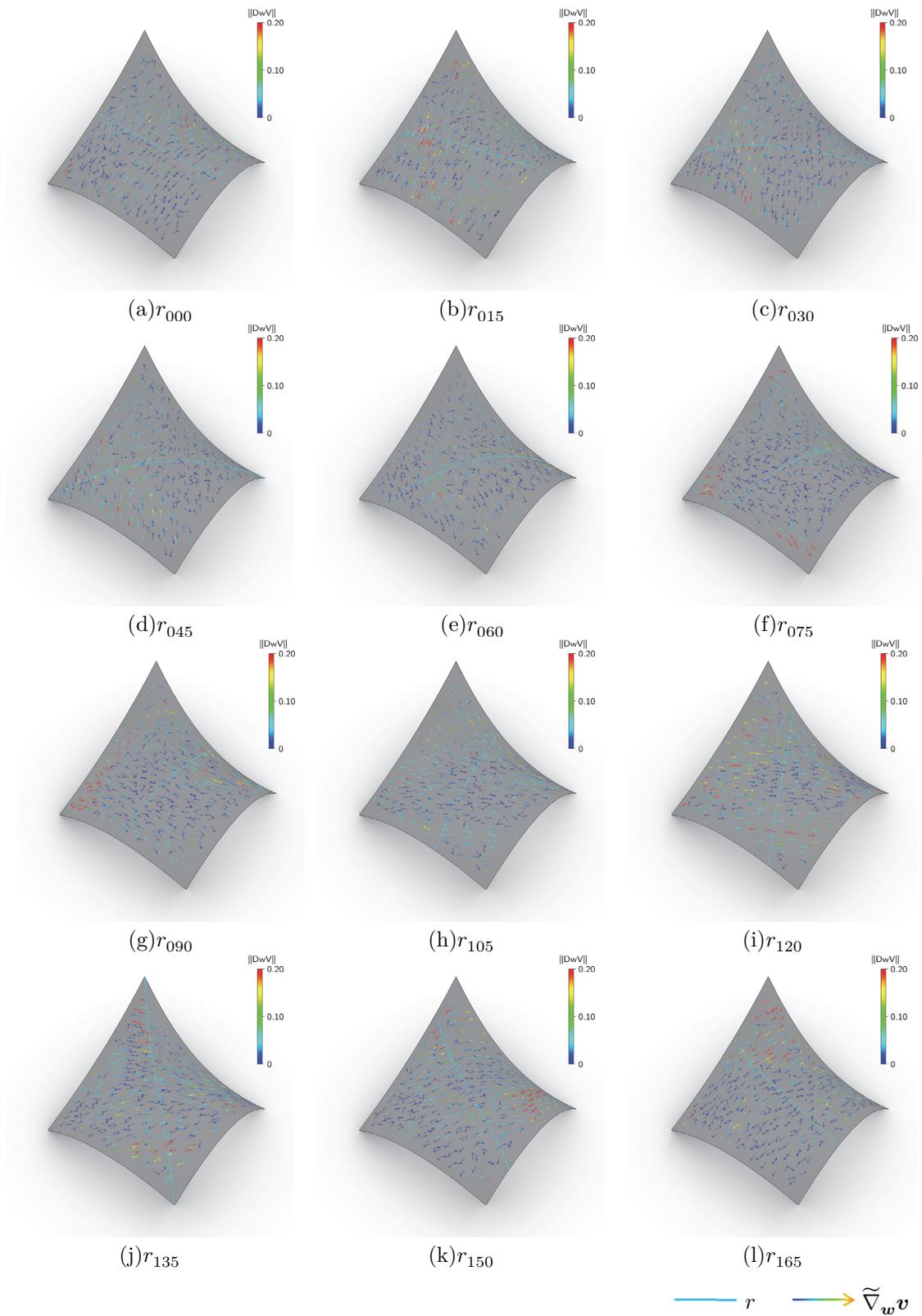


図 4-23 解析モデル b 初期解における共変微分

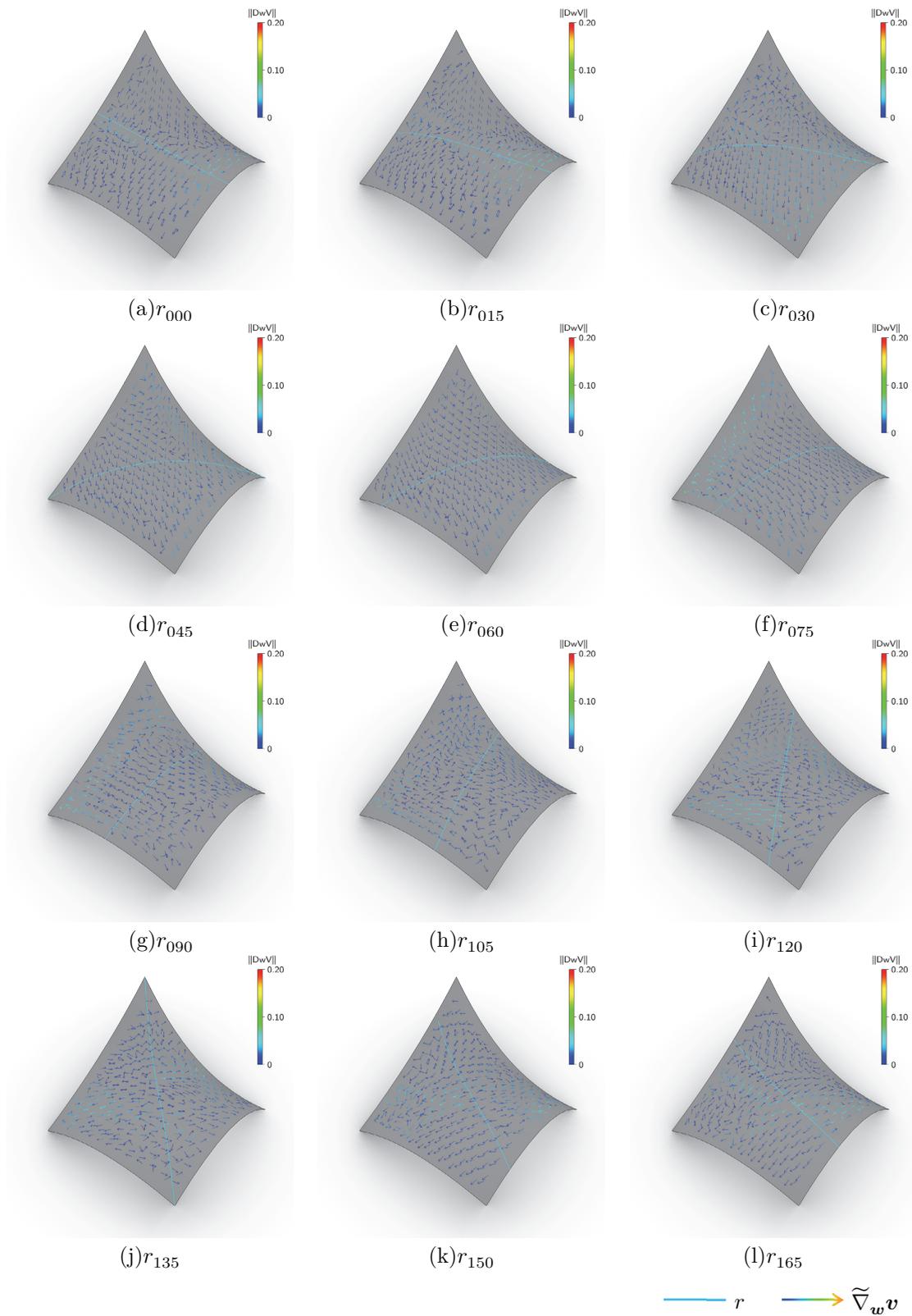


図 4-24 解析モデル b 最適解における共変微分

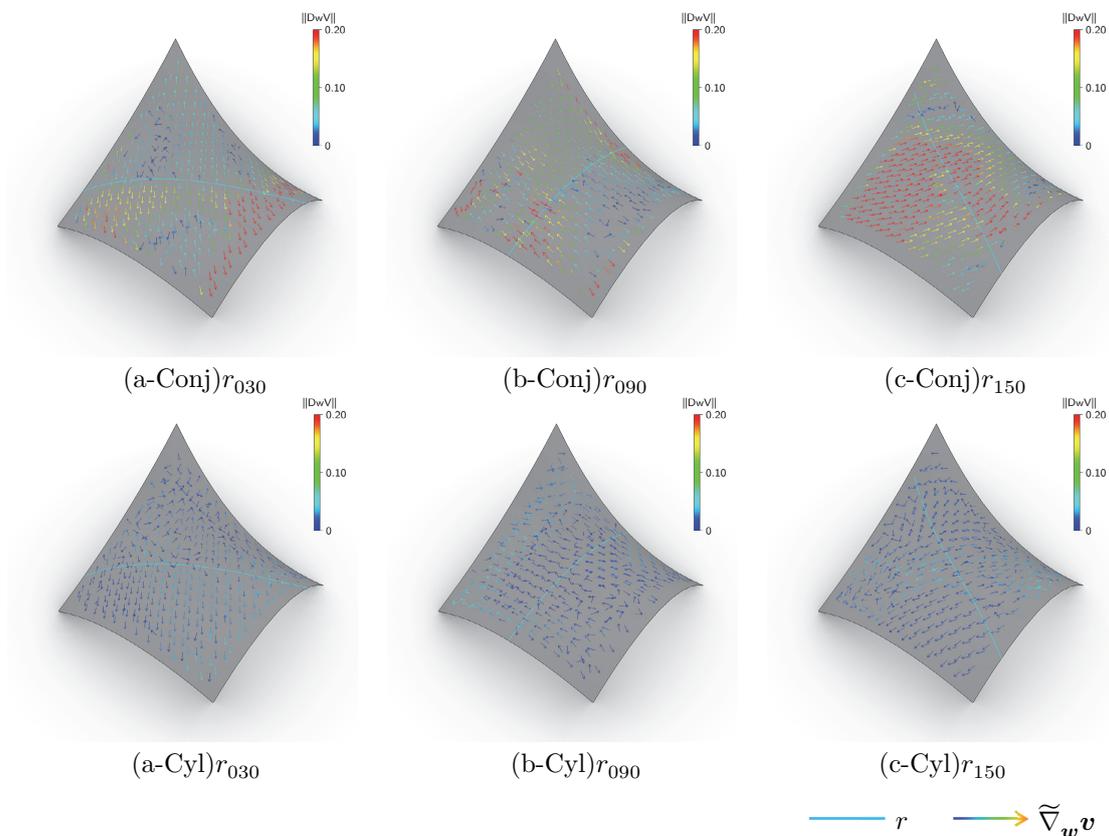


図 4-25 解析モデル b 一般共役場と柱面共役場の共変微分比較( $r_{030}, r_{090}, r_{150}$ のみ抜粋)

本解析モデルの場合、図 4-22 に示したように特異点をもつ柱面共役場が得られている。図 4-22 では、一般の共役場に対する特異点の判別法(4.31)に基づいて判別された特異点を示したが、方法 A の考察で述べたように、本解析モデルで得られる特異点は自己共役性から生じる特異点でありそれぞれの特異点は孤立点でないため、(4.31)の判別法を直接適用することは適切ではない。孤立点でない特異点を含む特異点の定義やその扱いは今後の課題である。

### 4.5 B-spline 形式による C-strip モデル

本項では、4.3 節や 4.4 節で示した方法で求めた C-strip モデルの離散解から、滑らかな柱面で補間された C-strip モデルを求める方法を示す。B-spline 形式による D-strip モデルを求める方法 [12]を応用する。

離散曲線によって表された C-strip モデルの離散解 $\{\hat{p}_i\}$ が与えられているとする。各離散曲線を B-spline 曲線により補間または近似することで B-spline 曲線で表された C-strip モデルの近似解 $\{p_i\}$ が得られる。このとき、隣接する曲線間に張られる線織面 $\Gamma_i$ が B-spline 曲面として次のように径数付けられる。

$$\mathbf{x}_i(u, v) = (1 - v)\mathbf{p}_i(u) + v\mathbf{p}_{i+1}(u) \quad u, v \in [0, 1] \quad (4.62)$$

上式が定める補間曲面は柱面ではないため、すべての補間曲面が柱面となるよう、各曲線 $\mathbf{p}_i$ を変形する必要がある。[12]では、各曲線 $\mathbf{p}_i$ の制御点を変数として以下に示す目的関数を最小化することで各曲線の最適解を求める。

$$E = \lambda_1 f_{prox} + \lambda_2 f_{\partial, prox} + \lambda_3 f_{dev} + \lambda_4 f_{fair, edge} + \lambda_5 f_{fair, ruling} \quad (4.63)$$

ここで、 $\lambda_1 \sim \lambda_5$ は各評価指標に対する重み係数、 $f_{prox}$ は補間曲面の内部点における近似性指標、 $f_{\partial, prox}$ は補間曲面の境界曲線上における近似性指標、 $f_{dev}$ は補間曲面の可展性指標、 $f_{fair, edge}$ は曲線のフェアリングエネルギー、 $f_{fair, ruling}$ は線織方向のフェアリングエネルギーである。[12]はD-stripモデルを求める方法であるので、補間曲面の可展性指標が用いられている。本研究では、この可展性指標 $f_{dev}$ を柱面性指標 $f_{cyl}$ で置き換える。

ここでは、本研究で導入する柱面性指標についてのみ示す。柱面は線織の平行性により特徴付けられるので、線織面 $\Gamma_i$ に関して次が成り立てばよい。

$$\forall u_1, \forall u_2, \quad \mathbf{p}_i(u_1) - \mathbf{p}_{i+1}(u_1) // \mathbf{p}_i(u_2) - \mathbf{p}_{i+1}(u_2) \quad (4.64)$$

この条件を満たすためには、線織方向の単位ベクトルが定ベクトルであればよいので、次のように評価できる。

$$\zeta_i = \langle \dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i \rangle^2, \quad \text{where } \mathbf{r}(u) = \frac{\mathbf{p}_{i+1}(u) - \mathbf{p}_i(u)}{\|\mathbf{p}_{i+1}(u) - \mathbf{p}_i(u)\|} \quad (4.65)$$

境界曲線に沿って(4.65)式を積分することで線織面 $\Gamma_i$ の柱面性を評価できる。すべての線織面の総和を取ることで柱面性指標は以下のように定義できる。

$$f_{cyl} = \sum_i \int \zeta_i(u) du \quad (4.66)$$

(4.63)中の $f_{dev}$ を上記の $f_{cyl}$ で置き換えることで、C-stripモデルを求める問題へと拡張される。(4.63)を目的関数とする最適化問題は制約のない非線形の連続最適化問題であるので、準ニュートン法などの一般的な解法で最適解を効率的に求めることができる。

## 4.6 結言

本章では、滑らかな曲面の特定の共役座標系に対する半離散モデルであるC-stripモデルおよびその離散モデルであるcylindricalメッシュについて述べた。4.2節では、C-stripモデルの一般形であるD-stripモデルとの比較から、C-stripモデルを導く特殊な共役座標系として柱面共役座標系を定義した。また、柱面共役座標系に対応する共役場の条件を導き、その条件を用いて柱面共役場を定義した。4.3節および4.4節では、与えられた曲面からC-stripモデルを求める方法として数値解析を用いた2つの方法を示した。4.3節では、滑らかな曲面上の柱面共役場を数値積分することでC-stripモデルの離散解を求める方法を示し、4.4節では、C-stripモデルに離散対応するcylindricalメッシュを求めることでC-stripモデルの離散解を求める方法を示した。4.5

---

節では、4.3 節や 4.4 節で示した方法を用いて求まる C-strip モデルの離散解から、B-spline 曲面による補間柱面をもつ厳密な C-strip モデルを求める方法を、D-strip モデルの厳密解を求める既往手法を拡張することで示した。

## 第5章 $k$ -Cylindrical Strip モデル

### 5.1 概説

本章では、滑らかな曲面の特別な半離散モデルとして第 4 章において定義した C-strip モデルに、第 3 章で定義した要素反復性を考慮した単一柱面の離散モデルである  $k$ -離散柱面モデルを組み込んだ  $k$ -cylindrical strip モデルについて述べる。この  $k$ -cylindrical strip モデルが 1.3 節で示したパネリング条件(\*)を満たすパネリング曲面となる。

$k$ -cylindrical strip モデルは、C-strip モデルを構成する複数の滑らかな柱面を  $k$ -離散柱面モデルで置き換えたモデルとして定義される。滑らかな柱面に対する  $k$ -離散柱面モデルは、準線の特殊な離散モデルである  $k$ -離散モデルを用いて定義されたモデル(定義 3-2)であった。第 3 章では、与えられた柱面の  $k$ -離散柱面モデルを求めるために、arc spline 曲線を補間曲線としてもつ準線の  $k$ -離散モデルを具体的に求めた。本章でも同様に、このモデルを前提とした  $k$ -cylindrical strip モデルを求める。つまり、本章で具体的に求める  $k$ -cylindrical strip モデルは  $k$  種類の円筒面で構成されるパネリング曲面となる。

C-strip モデルを構成する滑らかな柱面を  $k$ -離散柱面モデルで置き換える方法として、3.3.3 項で示した方法の適用が考えられる。3.3.3 項で示した方法では、複数の独立した柱面に対して、それぞれを最良近似する  $k$ -離散柱面モデルを求めた。それぞれの  $k$ -離散柱面モデルは、 $k$  種類の型となる部分柱面を共有するという点においてのみ相互に関係しており、それぞれの離散柱面間に埋め込み空間で生じる直接的な幾何学的関係はない。一方で、C-strip モデルに  $k$ -離散柱面モデルを組み込む場合、隣接関係にある柱面間で線織が連続している必要があるため、それぞれの  $k$ -離散柱面モデルは、型となる部分柱面の共有関係だけでなく直接的な幾何学的関係をもつ。3.3.3 項で示した方法では、このような離散柱面間の幾何学的関係は考慮されないが、本章では、3.3.3 項で示した方法に柱面間の幾何学的関係を組み込んだ方法を新たに提案する。

上述の隣接柱面間での幾何学的関係を満たすためには、 $k$ -離散柱面モデルの緩和が必要となる。これは、C-strip モデルを連続する線織で分割して得られる部分柱面の準線方向の長さが、それぞれ異なるためである。これを考慮して、セグメント長さに関する制約を緩和した新たな  $k$ -離散柱面モデルを定義し、その  $k$ -離散柱面モデルを用いて  $k$ -cylindrical strip モデルを定義する。

本章の構成は以下のとおりである。まず、5.2 節において、条件緩和された新しい  $k$ -離散柱面モデルの定義を示し、その定義を用いて  $k$ -cylindrical strip モデルの定義を示す。そのうち、条件緩和された新しい  $k$ -離散柱面モデルの構成に必要な  $k$ -arc spline 曲線の拡張について述べる。次に、5.3 節において、与えられた C-strip モデルを近似する  $k$ -cylindrical strip モデルを求める方法について述べる。ここでは、3.3.3 項で示した方法を基本として、C-strip モデル特有の幾何学的条件を最適化問題に新たに組み込む。続いて、5.4 節において数値解析例を示し、5.5 節で結言を述べる。

## 5.2 準備

本節では、C-strip モデルに $k$ -離散柱面モデルを組み込むために必要となる基本的な事項について整理する。まず、5.2.1 項において、 $k$ -離散モデルの離散幅に関する条件を緩和した新しい定義について示し、次に、5.2.2 項において、 $k$ -cylindrical strip モデルの定義を示す。続いて、5.2.3 項において、5.2.1 項で示す条件緩和された $k$ -離散モデルと arc spline 曲線の関係を 3.2.2 項に倣って簡単に示したのち、当該モデルに対応する $k$ -arc spline 曲線を新たに定義し、その数式表現を与える。

### 5.2.1 $k$ -離散モデルの緩和

曲線の $k$ -離散モデルは、 $k$ 種類の曲線 $c^0, c^1, \dots, c^{k-1}$ で構成される $G^1$ 連続な補間曲線をもつ特殊な離散モデルとして定義された(定義 3-2)。離散点列を補間するセグメントを $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ とすれば、添字集合 $\Lambda = \{0, 1, \dots, n-1\}$ のある $k$ 分割 $\{\Lambda^i\}$ が存在して補間曲線は次を満たす。

$$a, b \in \Lambda^i \iff s_a \equiv s_b \quad (5.1)$$

ここで、定義 3-2 による $k$ -離散モデルがもつ補間曲線が満たすべき条件(5.1)の緩和を考える。曲面のパネリングにおいて曲面パネルを用いる場合、合同なパネルを多く含むパネリング曲面がパネル製造の観点から有効であることを 2.4 節で述べた。これは、合同なパネルを多く含む場合、パネル製造に要する型枠の数が大幅に削減されるためである。必要となる型枠数の削減が、パネル製造に掛かるコストの抑制に大きな効果をもつと仮定すれば、合同ではないが同じ型枠から製造可能なパネルが合同なパネルと同等に有効である。このようなパネルは、ある曲面 $S$ のトリム曲面として定義することができる。曲面 $S$ が $S = \{\mathbf{x}(u, v) | (u, v) \in \Omega\}$ として与えられたとき、そのトリム曲面 $S_i$ は次のように表せる。

$$S_i = \{\mathbf{x}(u, v) | (u, v) \in \Omega_i \subset \Omega\} \quad (5.2)$$

曲面 $S$ が型枠に、トリム曲面 $S_i$ がパネルに対応する。つまり、定義域 $\Omega$ 内の部分領域 $\Omega_i$ を定めることによりトリム曲面 $S_i$ を定めることができる。曲面 $S$ が定めるある型枠 $M$ から複数のパネル $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ を製造する場合、それぞれのパネルを定めるトリム曲面は次を満たす必要がある。

$$\Omega_0 \approx \Omega_1 \approx \dots \approx \Omega_{n-1} \quad (5.3)$$

(5.3)が満たされない場合、同じ型枠から製造するメリットが少ないことは明らかであろう。ここまで述べたパネルと型枠の関係を踏まえて、条件(5.1)の緩和を考える。 $k$ 種類の曲線の埋め込み写像を $\mathbf{g}^0, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^{k-1}$ とすると $c^0, c^1, \dots, c^{k-1}$ は次のように書ける。

$$c^i = \{\mathbf{g}^i(t) | t \in \Omega^i \subset \mathbb{R}\} \quad (i = 0, 1, \dots, k-1) \quad (5.4)$$

ここで $\Omega^i$ は $\mathbb{R}$ 上の閉区間である。このとき、各曲線に対して次の曲線を考える。

$$c_j^i = \{\mathbf{g}^i(t) | t \in \Omega^j \subset \Omega^i\} \quad (j = 0, 1, \dots) \quad (5.5)$$

ここで $\Omega^j$ も $\mathbb{R}$ 上の閉区間である。このとき、 $c_j^i$ を準線とする柱面が $c^i$ を準線とする柱面のトリム曲面であることは明らかであろう。これを踏まえて条件(5.1)を次のように緩和する。

$$a \in \Lambda^i \iff \exists \Omega_a \subset \Omega^i, \exists R_a \in E(3), s_a = R_a(\{g^i(t) | t \in \Omega_a \subset \Omega^i\}) \quad (5.6)$$

つまり、型となる曲線 $c^i$ に対応するセグメント $s_a$ は、曲線 $c^i$ の一部を合同変換することで得られる曲線であればよい。このセグメント長さに関する緩和条件を用いると、曲線の $k$ -離散モデルは次のようになる。

**定義 5-1** 滑らかな曲線 $g$ の離散モデル $\{g_i\}$ が、

$$\exists \mathcal{G} = \{g^j: \Omega^j \rightarrow \mathbb{R}^3 | j \in K = \{0, \dots, k-1\}\}, \forall i, \exists \xi, \eta \in K, \exists [s_1, e_1] \subset \Omega^\xi, \exists [s_2, e_2] \subset \Omega^\eta, \exists R_1, R_2 \in SO(3), \exists v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} g_{i-1} &= R_1(g^\xi(s_1)) + v_1 \\ g_i &= R_1(g^\xi(e_1)) + v_1 = R_2(g^\eta(s_2)) + v_2 \\ g_{i+1} &= R_2(g^\eta(e_2)) + v_2 \\ R_1(\dot{g}^\xi(e_1)) &= R_2(\dot{g}^\eta(s_2)) \end{aligned}$$

を満たすとき、離散モデル $\{g_i\}$ を $k$ -離散モデルという。ここで、 $\dot{g}$ は写像 $g$ の微分ベクトルであり $g$ の接ベクトルを表す。

本章では、曲線の $k$ -離散モデルとして定義 5-1 による条件緩和された離散モデルを用いる。また、 $k$ -離散柱面モデル(定義 3-3)に関しても、準線の $k$ -離散モデルは条件緩和されたモデルを用いる。

### 5.2.2 k-cylindrical strip モデル

本項では、5.2.1 項で示した $k$ -離散柱面モデルを C-strip モデルに組み込んだ $k$ -cylindrical strip モデルの定義を示す。まず、曲線の集合に対する $k$ -離散モデルの定義を示す。複数の曲線に対して $k$ -離散モデルを求める具体的な方法については 3.3.3 項で示したが、ここでは、改めてその厳密な定義を示しておく。滑らかな曲線の集合 $\{g_\lambda\}$ に対して、 $k$ -離散モデルを次のように定義する。

**定義 5-2** 滑らかな曲線の集合 $\{g_\lambda\}$ の離散モデルを $\{\hat{g}_\lambda = \{g_{\lambda,i}\}\}$ とする。このとき、

$$\exists \mathcal{G} = \{g^j: \Omega^j \rightarrow \mathbb{R}^3 | j \in K = \{0, \dots, k-1\}\}, \forall \lambda, \forall i, \exists \xi, \eta \in K, \exists [s_1, e_1] \subset \Omega^\xi, \exists [s_2, e_2] \subset \Omega^\eta, \exists R_1, R_2 \in SO(3), \exists v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} g_{\lambda,i-1} &= R_1(g^\xi(s_1)) + v_1 \\ g_{\lambda,i} &= R_1(g^\xi(e_1)) + v_1 = R_2(g^\eta(s_2)) + v_2 \\ g_{\lambda,i+1} &= R_2(g^\eta(e_2)) + v_2 \\ R_1(\dot{g}^\xi(e_1)) &= R_2(\dot{g}^\eta(s_2)) \end{aligned}$$

を満たすとき、離散モデルを $\{\hat{g}_\lambda\}$ を曲線の集合 $\{g_\lambda\}$ に対する $k$ -離散モデルという。

型となる曲線の集合の濃度は、単一の曲線の場合と変わらず $k$ であることに注意する( $k \times$ 曲線の数ではない)。この定義を用いて、滑らかな柱面の集合 $\{C_\lambda\}$ に対する離散柱面モデルを次のように定義する。

**定義 5-3** 滑らかな柱面の集合 $\{C_\lambda\}$ に対してその準線の集合を $\{g_\lambda\}$ とする。このとき、 $\{g_\lambda\}$ の  $k$ -離散モデル $\{\hat{g}_\lambda = \{g_{\lambda,i}\}\}$ によって、

$$\{C_\lambda\} = \{\{g_{\lambda,i} + vz_\lambda\}\}$$

と定められる離散柱面モデルの集合を柱面の集合に対する  $k$ -離散柱面モデルという。ここで、 $z_\lambda$  は柱面 $C_\lambda$ の準線 $g_\lambda$ がのる平面に直交する単位ベクトルである。

定義 5-3 による柱面の集合に対する  $k$ -離散柱面モデルを C-strip モデルの補間柱面に適用することで、 $k$ -cylindrical strip モデルを定義する。補間柱面に対して定義 5-3 を適用するために、ここで扱う C-strip モデル $\{p_\lambda\}$ は離散化による誤差をもたない厳密なモデルであることを仮定する。また、簡単のために、C-strip モデル $\{p_\lambda\}$ は特異点を含まない柱面共役場の半離散モデルであるとする。このとき、 $p_\lambda \sim p_{\lambda+1}$ 間を補間する柱面を $C_\lambda$ とすれば、 $k$ -cylindrical strip モデルが次のように定義される。

**定義 5-4** C-strip モデル $\{p_\lambda\}$ の曲線間を補間する柱面の集合 $\{C_\lambda\}$ が  $k$ -離散柱面モデルであるとき、その C-strip モデルを  $k$ -cylindrical strip モデルという。

以上で、C-strip モデルに  $k$ -離散柱面モデルが組み込まれた。定義 5-4 が定める  $k$ -cylindrical strip モデルが、1.3 節で示したパネリング条件(\*)を満たすパネリング曲面であることは明らかであろう。

### 5.2.3 k-arc spline 曲線の拡張

本項では、5.2.1 項で拡張された曲線の  $k$ -離散モデルと arc spline 曲線の関係を、3.2.2 項に倣って簡単に整理したのち、条件緩和されたモデルに対応する  $k$ -arc spline 曲線について述べる。

3.2.2 項では、曲率の離散化により得られる曲線の離散モデルが arc spline 曲線により補間可能であることを示した。3.2.2 項では、曲率の離散化における離散幅を等間隔 $\Delta s$ と仮定したが、任意の離散幅 $\Delta s_0, \Delta s_1, \dots$ を仮定しても一般性を失わないことは明らかであろう。任意の離散幅を仮定して得られる離散モデルを補間する arc spline 曲線は、弧長の異なる円弧で構成される arc spline 曲線となる。この離散モデルに対して、3.2.2 項で示した  $k$ -離散モデルとなるための条件を直接適用すれば、定義 5-1 による  $k$ -離散モデルの中で補間曲線が arc spline 曲線となる離散モデルが導かれる。つまり、本章の目的は、定義 5-4 が定める  $k$ -cylindrical strip モデルの中で、モデルを構成するすべての  $k$ -離散柱面の準線が arc spline 曲線によって補間可能なモデルを求めることである。

上述の  $k$ -離散モデルが補間曲線としてもつ arc spline 曲線は、弧長に関する制約をもたない  $k$ -arc spline 曲線である。本章では、弧長に関して条件緩和された次の定義を  $k$ -arc spline 曲線の定義として用いる。

**定義 5-5**  $A = \{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}\}$ を  $n$ セグメントで構成される arc spline 曲線とし、 $r_i$ を第  $i$ セグメント  $A_i$ の半径とする。このとき、ある集合 $M = \{r^0, \dots, r^{k-1}\}$  ( $2 \leq k < n$ )が存在して、

$$\{r_i | i = 0, 1, \dots, n-1\} = M$$

を満たすとき、 $A$ を  $k$ -arc spline 曲線という。

この定義に基づく  $k$ -arc spline 曲線は、 $k$ 種類の曲率半径をもつ arc spline 曲線であり、各セグメントの弧長は独立変数である。各セグメントの弧長を独立変数として表現することで、(3.18)～(3.20)は次のように拡張される。

$$\mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{P}_i + \sum_j \delta_{i,j} r^j (\mathbf{e}_{i+1}^1 - \mathbf{e}_i^1) \times \mathbf{e}_i^3 \quad (i = 0, 1 \dots n-1) \quad (5.7)$$

$$\mathbf{P}_i^m = \mathbf{P}_i + \sum_j \delta_{i,j} r^j \left( R \left( \mathbf{e}_{i,z}^3 \frac{l_i}{2 \sum_j \delta_{i,j} r^j} \right) \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_i^1 \right) \times \mathbf{e}_i^3 \quad (5.8)$$

$(i = 0, 1 \dots n-1)$

$$\mathbf{e}_{i+1}^1 = R \left( \mathbf{e}_{i,z}^3 \frac{l_i}{\sum_j \delta_{i,j} r^j} \right) \mathbf{e}_i^1 \quad (i = 0, 1 \dots n-1) \quad (5.9)$$

### 5.3 k-Cylindrical Strip Approximation

本項では、与えられた C-strip モデルから  $k$ -cylindrical strip モデルを求める方法を示す。本章で求める  $k$ -cylindrical strip モデルは、モデルを構成するすべての  $k$ -離散柱面の準線が arc spline 曲線によって補間可能なモデルである。複数の独立した柱面に対してこのようなモデルを求める具体的な方法は 3.3.3 項で示した。本項では、C-strip モデルを構成する柱面間に生じる幾何学的関係を 3.3.3 項の最適化問題に組み込むことで、当該方法を  $k$ -cylindrical strip モデルを求める方法へと拡張する。

まず、5.3.1 項において、本項で示す方法で前提とするモデルについて整理する。次に、5.3.2 項において、 $k$ -cylindrical strip モデルの柱面間に生じる幾何学的関係を組み込んだ最適化問題について述べ、最後に、5.3.3 項において、3.3.2 項で示した初期化アルゴリズムの拡張について簡単に述べる。

#### 5.3.1 モデルの整理

本項では、対象とする曲面  $S$  の半離散モデルである C-strip モデルの厳密解および各ストリップの線織での連続な分割レイアウトが与えられていることを前提とする(図 5-3)。この分割レイアウトを定める分割線が、 $S$  上の柱面共役座標系のアイソパラメータ曲線に対応することは明らかであろう。本項では、最適化問題の定式化にあたって、簡単のために、与えられた C-strip モデルが特異点を含まない柱面共役場の半離散モデルであることを仮定する。このとき、C-strip モデルを曲線の集合  $\{\mathbf{p}_\lambda\}$  で表し、 $\mathbf{p}_\lambda \sim \mathbf{p}_{\lambda+1}$  間に張られる柱面を  $C_\lambda$ 、 $C_\lambda$  の準線を  $g_\lambda$ 、 $g_\lambda$  がのる平面を  $\Pi_\lambda$ 、 $\Pi_\lambda$  を定める原点と 3 軸方向の単位ベクトルを  $\mathbf{o}_\lambda$ 、 $\mathbf{x}_\lambda$ 、 $\mathbf{y}_\lambda$ 、 $\mathbf{r}_\lambda$  とする(図 5-1)。

与えられた分割線(i.e., 線織)によって柱面  $C_\lambda$  は複数の部分柱面に分割されるので、準線  $g_\lambda$  も複数の部分曲線に分割され、それぞれの部分曲線がそれぞれの部分柱面(i.e., パネル)の準線に対応する。このとき準線  $g_\lambda$  の分割数を  $n_\lambda$  とし、両端点を含む分割点を  $g_{\lambda,0}, g_{\lambda,1}, \dots, g_{\lambda,n_\lambda}$ 、分割さ

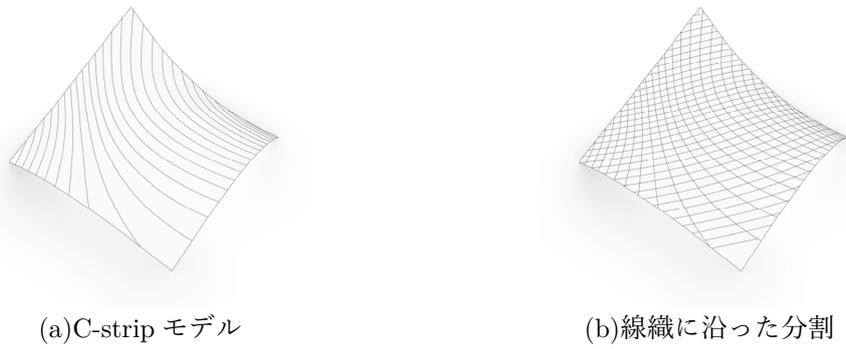


図 5-3 与えられる C-strip モデルと分割レイアウト

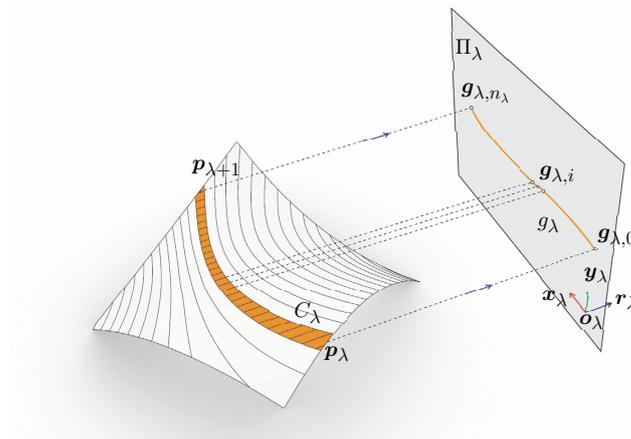


図 5-1 C-strip モデルの記号整理

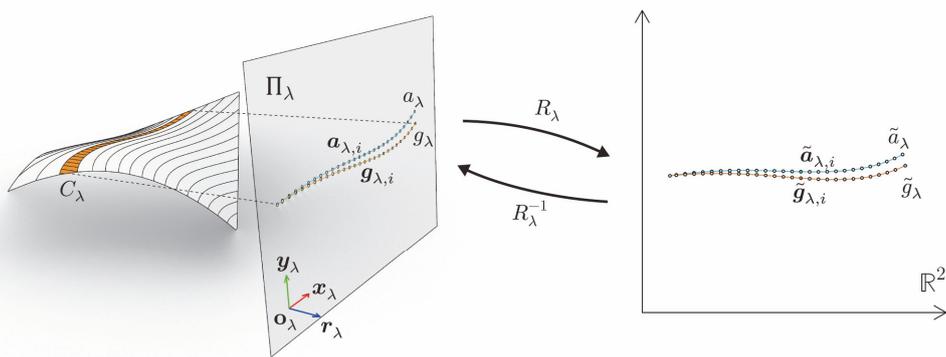


図 5-2 準線  $g_\lambda, \tilde{g}_\lambda$  と  $k$ -arc spline 曲線  $a_\lambda, \tilde{a}_\lambda$

れた各セグメントの中点を  $g_{\lambda,0}^m, g_{\lambda,1}^m, \dots, g_{\lambda,n_\lambda}^m$  とすると、これらの点列は準線  $g_\lambda$  を近似する  $k$ -arc spline 曲線  $a_\lambda$  のターゲット点となる。ここで、 $a_\lambda$  上の対応点として円弧の結節点を  $a_{\lambda,0}, a_{\lambda,1}, \dots, a_{\lambda,n_\lambda}$  とし、各円弧の中点を  $a_{\lambda,0}^m, a_{\lambda,1}^m, \dots, a_{\lambda,n_\lambda}^m$  とする(図 5-2)。

X-Y平面上の $k$ -arc spline 曲線を前提とした制御式(5.7)~(5.9)を用いて曲線 $a_\lambda \subset \Pi_\lambda$ を制御するためには、 $\Pi_\lambda$ とX-Y平面間の合同変換による座標の変換が必要となる(図5-2)。 $\Pi_\lambda$ からX-Y平面への合同変換 $R_\lambda$ およびその逆変換 $R_\lambda^{-1}$ は次のように得られる。

$$R_\lambda(\mathbf{p}) = [\mathbf{x}_\lambda \quad \mathbf{y}_\lambda \quad \mathbf{r}_\lambda]^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{o}_\lambda) \quad (5.10)$$

$$R_\lambda^{-1}(\tilde{\mathbf{p}}) = [\mathbf{x}_\lambda \quad \mathbf{y}_\lambda \quad \mathbf{r}_\lambda]\tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{o}_\lambda \quad (5.11)$$

ここで、 $\mathbf{p}$ は $\Pi_\lambda \subset \mathbb{E}^3$ 上の点、 $\tilde{\mathbf{p}}$ はX-Y平面上の点を表す。(5.10)が定める変換によって、準線 $g_\lambda$ 上の点列 $\mathbf{g}_{\lambda,0}, \mathbf{g}_{\lambda,1}, \dots, \mathbf{g}_{\lambda,n_\lambda}$ および $\mathbf{g}_{\lambda,0}^m, \mathbf{g}_{\lambda,1}^m, \dots, \mathbf{g}_{\lambda,n_\lambda}^m$ が、 $\tilde{\mathbf{g}}_{\lambda,0}, \tilde{\mathbf{g}}_{\lambda,1}, \dots, \tilde{\mathbf{g}}_{\lambda,n_\lambda}$ および $\tilde{\mathbf{g}}_{\lambda,0}^m, \tilde{\mathbf{g}}_{\lambda,1}^m, \dots, \tilde{\mathbf{g}}_{\lambda,n_\lambda}^m$ に変換され、 $k$ -arc spline 曲線 $a_\lambda$ 上の点列 $\mathbf{a}_{\lambda,0}, \mathbf{a}_{\lambda,1}, \dots, \mathbf{a}_{\lambda,n_\lambda}$ および $\mathbf{a}_{\lambda,0}^m, \mathbf{a}_{\lambda,1}^m, \dots, \mathbf{a}_{\lambda,n_\lambda}^m$ が、 $\tilde{\mathbf{a}}_{\lambda,0}, \tilde{\mathbf{a}}_{\lambda,1}, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_{\lambda,n_\lambda}$ および $\tilde{\mathbf{a}}_{\lambda,0}^m, \tilde{\mathbf{a}}_{\lambda,1}^m, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_{\lambda,n_\lambda}^m$ に変換されるとする。 $\tilde{\mathbf{o}}$ はX-Y平面上の点を表し3.3節で用いた表記と異なるので注意する。X-Y平面上に写された準線 $\tilde{g}_\lambda$ を近似する $k$ -arc spline 曲線 $\tilde{a}_\lambda$ を、(5.11)による変換で $\Pi_\lambda$ 上に写せば、 $k$ -cylindrical strip モデルを構成する柱面 $\hat{C}_\lambda$ が得られる。

### 5.3.2 最適化問題

#### 5.3.2.1 近似エネルギー

$k$ -cylindrical strip モデルの近似精度を評価するために、柱面 $C_\lambda$ に対する近似精度と交線 $\mathbf{p}_\lambda = C_\lambda \cap C_{\lambda+1}$ に対する近似精度の2つの評価関数を導入する。まず、柱面 $C_\lambda$ の近似精度に関する評価関数を考える。柱面 $C_\lambda$ の近似精度は準線 $g_\lambda$ の近似精度で評価できるので、3.3.3項と同様に準線 $g_\lambda$ と $k$ -arc spline 曲線 $a_\lambda$ の対応点間の誤差の二乗和により柱面の近似精度に関する評価関数が次のように得られる。

$$E_{prox,s,\lambda} = \sum_{i=0}^{n_\lambda} \langle \tilde{\mathbf{g}}_{\lambda,i} - \tilde{\mathbf{a}}_{\lambda,i}, \tilde{\mathbf{g}}_{\lambda,i} - \tilde{\mathbf{a}}_{\lambda,i} \rangle + \sum_{i=0}^{n_\lambda-1} \langle \tilde{\mathbf{g}}_{\lambda,i}^m - \tilde{\mathbf{a}}_{\lambda,i}^m, \tilde{\mathbf{g}}_{\lambda,i}^m - \tilde{\mathbf{a}}_{\lambda,i}^m \rangle \quad (5.12)$$

上式は、 $\Pi_\lambda$ への写像を考慮せず、X-Y平面上の曲線 $\tilde{g}_\lambda$ と $\tilde{a}_\lambda$ から直接求めればよい。すべての柱面で総和を取ることで $k$ -cylindrical strip モデル全体の柱面の近似精度が次のように得られる。

$$E_{prox,s} = \sum_{\lambda=0}^{N-1} E_{prox,s,\lambda} \quad (5.13)$$

次に、交線 $\mathbf{p}_\lambda = C_\lambda \cap C_{\lambda+1}$ に対する近似精度を考える。 $a_\lambda, a_{\lambda+1}$ を準線とする柱面を $\hat{C}_\lambda, \hat{C}_{\lambda+1}$ としたとき、新たな交線 $\hat{\mathbf{p}}_\lambda = \hat{C}_\lambda \cap \hat{C}_{\lambda+1}$ と対象交線 $\mathbf{p}_\lambda$ 間の誤差を表す関数を定めればよいが、交線 $\hat{\mathbf{p}}_\lambda$ の径数付けを解析的に求めることは困難である。そこで、交線 $\hat{\mathbf{p}}_\lambda$ の近似解を求めることを考える。 $\hat{C}_\lambda$ の準線 $a_\lambda$ 上の点 $\mathbf{a}_{\lambda,i}$ を考え、この点と対応する $\hat{C}_{\lambda+1}$ の準線 $a_{\lambda+1}$ 上の点を $\mathbf{a}_{\lambda+1,j}$ とする。 $\mathbf{a}_{\lambda+1,j}$ における $a_{\lambda+1}$ の接ベクトルを $\mathbf{e}_{\lambda+1,j}^1$ とすれば、 $\mathbf{a}_{\lambda+1,j}$ における $\hat{C}_{\lambda+1}$ の接平面は次のベクトルを法ベクトルとする平面である。

$$\mathbf{n}_{\lambda+1,j} = \mathbf{e}_{\lambda+1,j}^1 \times \mathbf{r}_{\lambda+1} \quad (5.14)$$

$\mathbf{p}_{\lambda,i}$ を通り $\mathbf{r}_\lambda$ を方向ベクトルとする直線と(5.14)が定める平面の交点は、当該直線と $\hat{C}_{\lambda+1}$ の近

似交点を与える。この直線と平面の交点 $s_{\lambda,i}$ は次のように得られる。

$$s_{\lambda,i} = \mathbf{a}_{\lambda,i} + \frac{\langle \mathbf{n}_{\lambda+1,j}, \mathbf{a}_{\lambda+1,j} \rangle - \langle \mathbf{n}_{\lambda+1,j}, \mathbf{a}_{\lambda,i} \rangle}{\langle \mathbf{n}_{\lambda+1,j}, \mathbf{r}_{\lambda} \rangle} \mathbf{r}_{\lambda} \quad (5.15)$$

上述と逆の関係を考えれば、 $\mathbf{p}_{\lambda+1,j}$ を通る直線と $\hat{C}_{\lambda}$ の接平面の交点 $t_{\lambda,j}$ も同様に次のように得られる。

$$t_{\lambda,j} = \mathbf{a}_{\lambda+1,j} + \frac{\langle \mathbf{n}_{\lambda,i}, \mathbf{a}_{\lambda,i} \rangle - \langle \mathbf{n}_{\lambda,i}, \mathbf{a}_{\lambda+1,j} \rangle}{\langle \mathbf{n}_{\lambda,i}, \mathbf{r}_{\lambda+1} \rangle} \mathbf{r}_{\lambda+1} \quad (5.16)$$

(5.15), (5.16)が表す2点は、 $\mathbf{a}_{\lambda,i}$ および $\mathbf{a}_{\lambda+1,j}$ を通る2つの線織が交わる場合に厳密に一致し、すべての $i, j$ でこれが成り立つとき交線 $\hat{\mathbf{p}}_{\lambda}$ を厳密に表す点列となる。一般的に、近似曲線 $a_{\lambda}, a_{\lambda+1}$ 上の対応点から定まる2つの線織が厳密に交わることはないので、点列 $\{s_{\lambda,i}\}$ と $\{t_{\lambda,j}\}$ のそれぞれを交線 $\hat{\mathbf{p}}_{\lambda}$ の近似点列として扱う。一方で、近似対象である準線 $g_{\lambda}$ と $g_{\lambda+1}$ の対応点から定まる2つの線織は交線 $\mathbf{p}_{\lambda} = C_{\lambda} \cap C_{\lambda+1}$ 上で交わるので、交線 $\mathbf{p}_{\lambda}$ 上に近似点列に対応するターゲット点列 $\{\mathbf{p}_{\lambda,\xi}\}$ が得られる。対応点間の二乗誤差の総和により曲線 $\mathbf{p}_{\lambda}$ に対する曲線 $\hat{\mathbf{p}}_{\lambda}$ の近似精度が次のように評価される。

$$E_{prox,c,\lambda} = \sum_i \langle \mathbf{p}_{\lambda,\xi} - s_{\lambda,i}, \mathbf{p}_{\lambda,\xi} - s_{\lambda,i} \rangle + \sum_j \langle \mathbf{p}_{\lambda,\xi} - t_{\lambda,j}, \mathbf{p}_{\lambda,\xi} - t_{\lambda,j} \rangle \quad (5.17)$$

$a_{\lambda}$ および $a_{\lambda+1}$ 上の点として、それぞれの円弧結節点と円弧中点を用い、両曲線間で対応関係のない点は考慮しない。ここでも同様にすべての交線の総和を取ることによって $k$ -cylindrical-strip モデル全体の交線の近似精度が次のように得られる。

$$E_{prox,c} = \sum_{\lambda=0}^{N-2} E_{prox,c,\lambda} \quad (5.18)$$

### 5.3.2.2 線織方向の連続性エネルギー

与えられた C-strip モデルの線織に沿った分割線は、モデル全体で連続なポリラインを形成しているが、 $k$ -cylindrical strip モデルでは、厳密に連続な分割線を形成することは困難である。そこで、線織に沿った分割線の不連続量を最小化することで、極力連続な分割線を形成することを考える。連続関係にある2つの線織の不連続量を、2線織に対応する直線間の距離によって評価する。ここで、2つの直線 $L_1: \mathbf{p}_1 + t\mathbf{r}_1$ ,  $L_2: \mathbf{p}_2 + s\mathbf{r}_2$ を考えると、2直線間の距離は次のように得られる。

$$d(L_1, L_2) = \frac{1}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\|} |\langle \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \rangle| \quad (5.19)$$

C-strip モデルを構成する各曲線 $\mathbf{p}_{\lambda}$ に沿って線織の不連続点が生じるので、 $\mathbf{p}_{\lambda}$ に沿った線織の不連続量が次のように評価される。

$$E_{cont,\lambda} = \sum_i d(L_{i,\lambda}, L_{i,\lambda+1})^2 + \sum_i d(L_{i,\lambda}^m, L_{i,\lambda+1}^m)^2 \quad (5.20)$$

ここで、 $L_{i,\lambda}$ ,  $L_{i,\lambda+1}$ ,  $L_{i,\lambda}^m$ ,  $L_{i,\lambda+1}^m$  は柱面 $C_\lambda$ および $C_{\lambda+1}$ の $k$ -離散モデルの線織を表す直線である。 $L_{i,\lambda}$ ,  $L_{i,\lambda+1}$ は準線 $a_\lambda$ の円弧結節点、 $L_{i,\lambda}^m$ ,  $L_{i,\lambda+1}^m$ は円弧中点を通る線織に対応する。柱面 $C_\lambda$ ,  $C_{\lambda+1}$ の端部トリムによる分割数の違いが生じる場合、線織の対応関係に注意を要する。片側のみ線織が存在する場合は $d=0$ として評価する。すべての交線の総和を取ることで、 $k$ -cylindrical strip モデル全体の線織の連続性が次のように得られる。

$$E_{cont} = \sum_{\lambda=0}^{N-2} E_{cont,\lambda} \quad (5.21)$$

### 5.3.2.3 フェアリングエネルギー

5.3.2.2 項において、連続する線織間に生じる不連続量を評価することで、 $k$ -cylindrical strip モデルの線織に沿った分割線の連続性を評価した。これに対して、本項では、ストリップ交線 $\hat{p}_\lambda$ の連続性を評価する。 $k$ -cylindrical strip モデルの隣接するストリップ間の交線によって得られる曲線 $\hat{p}_\lambda$ は、一般的に連続な曲線であるがフェアな曲線ではない。これは、各柱面の $k$ -離散モデルへの置換によって誤差が生じるためである。そこで、フェアな交線 $\hat{p}_\lambda$ を得るために、交線 $\hat{p}_\lambda$ のフェアリングエネルギーを評価関数に組み込む。5.3.2.1 項で示したように、厳密な交線 $\hat{p}_\lambda$ を解析的に求めることは困難であるので、ここでも 5.3.2.1 項と同様に、交線 $\hat{p}_\lambda$ の近似点列によって交線 $\hat{p}_\lambda$ のフェアリングエネルギーを評価する。(5.20), (5.21)によって得られる交線 $\hat{p}_\lambda$ の近似点列と交線 $p_\lambda$ 上の対応点列 $\{p_{\lambda,\xi}\}$ から、点の対応関係を考慮して再ナンバリングした点列を $\{s_{\lambda,i}\}$ ,  $\{t_{\lambda,i}\}$ ,  $\{p_{\lambda,i}\}$ として、次のフェアリングエネルギー [31]を導入する。

$$E_{fair1,\lambda} = \sum_i (s_{\lambda,i-1} - 2s_{\lambda,i} + s_{\lambda,i+1})^2 + (t_{\lambda,i-1} - 2t_{\lambda,i} + t_{\lambda,i+1})^2 \quad (5.22)$$

$$E_{fair2,\lambda} = \sum_i \left( (s_{\lambda,i-1} - 2s_{\lambda,i} + s_{\lambda,i+1}) - (p_{\lambda,i-1} - 2p_{\lambda,i} + p_{\lambda,i+1}) \right)^2 \\ + \left( (t_{\lambda,i-1} - 2t_{\lambda,i} + t_{\lambda,i+1}) - (p_{\lambda,i-1} - 2p_{\lambda,i} + p_{\lambda,i+1}) \right)^2$$

ここでは、 $a_\lambda$ ,  $a_{\lambda+1}$ 上の点として、それぞれの円弧結節点と円弧中点に加えて、各円弧セグメントの4分割点も用いる。すべての交線の総和を取ることで、 $k$ -cylindrical strip モデル全体のストリップ交線の連続性が次のように得られる。

$$E_{fair} = \sum_{\lambda=0}^{N-2} E_{fair1,\lambda} + E_{fair2,\lambda} \quad (5.23)$$

### 5.3.2.4 境界補間エネルギー

$k$ -離散柱面の端部で境界条件を補間する場合、3.3.1.2 項で示した補間条件を必要に応じて適宜組み込めばよい。 $G^0$ 補間制約について示せば、5.3.2.1 項と同様にX-Y平面上で直接評価することで柱面 $C_\lambda$ に関して次が得られる。

$$E_{ip,\lambda} = \langle \tilde{\mathbf{g}}_{\lambda,n_\lambda} - \tilde{\mathbf{a}}_{\lambda,n_\lambda}, \tilde{\mathbf{g}}_{\lambda,n_\lambda} - \tilde{\mathbf{a}}_{\lambda,n_\lambda} \rangle \quad (5.24)$$

ここでは、補間制約を弱制約として最適化問題に組み込むため、第3章と異なりノルム二乗の形式を採用した。 $G^1$ 補間制約の場合、接ベクトルに関する項をスケール径数なしで追加すればよい。補間制約を設定する柱面で総和を取れば、 $k$ -cylindrical strip モデル全体の補間制約が次のように評価される。

$$E_{ip} = \sum_{\lambda} E_{ip,\lambda} \quad (5.25)$$

### 5.3.2.5 閉曲線エネルギー

$k$ -離散柱面の準線が閉曲線となる場合、3.3.1.3 項に示した閉曲線制約を組み込む必要がある。ここでも同様に、X-Y平面上で直接評価することで柱面 $C_\lambda$ に関して次が得られる。

$$E_{closed,\lambda} = E_{c0,\lambda} + E_{c1,\lambda} \quad (5.26)$$

$$E_{c0,\lambda} = \langle \tilde{\mathbf{a}}_{\lambda,n_\lambda} - \tilde{\mathbf{a}}_{\lambda,0}, \tilde{\mathbf{a}}_{\lambda,n_\lambda} - \tilde{\mathbf{a}}_{\lambda,0} \rangle, \quad E_{c1,\lambda} = 1 - \langle \tilde{\mathbf{e}}_{\lambda,n_\lambda}^1, \tilde{\mathbf{e}}_{\lambda,0}^1 \rangle$$

前項と同様に、 $G^0$ 制約に関してノルム二乗の形式を用いること、および、 $G^1$ 制約に関してスケール径数を省略することに注意する。準線が閉曲線となる柱面で総和を取れば、 $k$ -cylindrical strip モデル全体の閉曲線制約が次のように評価される。

$$E_{closed} = \sum_{\lambda} E_{closed,\lambda} \quad (5.27)$$

### 5.3.2.6 無制約最適化問題

5.3.2.1 項～5.3.2.5 項で定式化された各関数を用いて、与えられた C-strip モデルを近似する  $k$ -cylindrical strip モデルを求める問題を、各柱面準線の近似問題として次のように定める。

$$\begin{aligned}
(P) \quad & \text{find } \Delta \tilde{\mathbf{a}}_0, \dots, \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{N-1} \in \mathbb{R}^2, \Delta \theta_0, \dots, \Delta \theta_{N-1} \in \mathbb{R} \\
& \Delta l_{0,0}, \dots, \Delta l_{N-1, n_{N-1}-1} \in \mathbb{R}, \Delta r^0, \dots, \Delta r^{k-1} \in \mathbb{R} \\
& \delta_{0,0,0}, \dots, \delta_{N-1, n_{N-1}-1, k-1} \in \{0, 1\} \\
& \mathbf{e}_{0,0}^3, \dots, \mathbf{e}_{N-1, n_{N-1}-1}^3 \in \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\} \\
& n_0, \dots, n_{N-1} \in \mathbb{N} \\
\min \quad & E = \lambda_{prox,s} E_{prox,s} + \lambda_{prox,c} E_{prox,c} + \lambda_{cont} E_{cont} + \lambda_{fair} E_{fair} \\
& \quad + \lambda_{ip} E_{ip} + \lambda_{closed} E_{closed} \\
\text{s. t.} \quad & \Delta r_{min}^j \leq \Delta r^j \leq \Delta r_{max}^j \quad (j = 0, 1, \dots, k-1) \\
& \Delta l_{min,i,j} \leq \Delta l_{i,j} \leq \Delta l_{max,i,j} \quad (i = 0, \dots, N-1, \quad j \\
& \quad = 0, \dots, n_i - 1)
\end{aligned} \tag{5.28}$$

ここで、 $\lambda_{prox,s}$ ,  $\lambda_{prox,c}$ ,  $\lambda_{cont}$ ,  $\lambda_{fair}$ ,  $\lambda_{ip}$ ,  $\lambda_{closed}$  は各関数に対する重み係数であり、問題に応じて適切な値を設定する必要がある。5.3.1 項で示したように、最適化変数が定める  $k$ -arc spline 曲線は、すべて X-Y 平面上に存在することに注意する。つまり、 $\mathbf{e}_{i,j}^3 \in \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$  である。また、3.3 節と同様にスケール変数を導入した。3.3.3 項と同様に、離散変数の定数化により (5.28) を次の連続最適化問題に変換する。

$$\begin{aligned}
(P) \quad & \text{find } \Delta \tilde{\mathbf{a}}_0, \dots, \Delta \tilde{\mathbf{a}}_{N-1} \in \mathbb{R}^2, \Delta \theta_0, \dots, \Delta \theta_{N-1} \in \mathbb{R} \\
& \Delta l_{0,0}, \dots, \Delta l_{N-1, n_{N-1}-1} \in \mathbb{R}, \Delta r^0, \dots, \Delta r^{k-1} \in \mathbb{R} \\
\min \quad & E = \lambda_{prox,s} E_{prox,s} + \lambda_{prox,c} E_{prox,c} + \lambda_{cont} E_{cont} + \lambda_{fair} E_{fair} \\
& \quad + \lambda_{ip} E_{ip} + \lambda_{closed} E_{closed} \\
\text{s. t.} \quad & \Delta r_{min}^j \leq \Delta r^j \leq \Delta r_{max}^j \quad (j = 0, 1, \dots, k-1) \\
& \Delta l_{min,i,j} \leq \Delta l_{i,j} \leq \Delta l_{max,i,j} \quad (i = 0, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, n_i - 1)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

3.3.3 項と同様に、(5.28) を (5.29) に変形するためには離散変数の推定のための初期化アルゴリズムが必要である。初期化アルゴリズムの基本は 3.3.2 項と同様であるが簡単な拡張について 5.3.3 項で示す。(5.29) は側面制約のみをもつ連続最適化問題であるので、準ニュートン法などの適用により効率的に最適解を求めることができる。本研究では、問題のサイズに応じて BFGS 法による準ニュートン法 [68] と L-BFGS 法による準ニュートン法 [68] を適宜使い分ける。

### 5.3.3 初期化アルゴリズム

本項では、CCA と FIA に関して、 $k$ -cylindrical strip 近似問題での応用を考慮した概略について述べる。両アルゴリズムの基本的な概念は 3.3.2 項と同様であるので詳細は省略する。

#### 5.3.3.1 Curvature Clustering アルゴリズム

本項では、C-strip モデルの分割レイアウトがあらかじめ与えられていることを前提としているので、近似対象となるすべての曲線の分割が既知である。よって、CCA は次のように拡張される。

[Curvature Clustering Algorithm]

1. すべての *local segment*  $g_{0,0}, g_{0,1}, \dots, g_{n_{N-1}-1}$  の曲率代表値  $\bar{\kappa}_{0,0}, \bar{\kappa}_{0,1}, \dots, \bar{\kappa}_{n_{N-1}-1}$  を求める
2.  $k$ -means<sup>++</sup>法により曲率  $\bar{\kappa}_{0,0}, \bar{\kappa}_{0,1}, \dots, \bar{\kappa}_{n_{N-1}-1}$  を  $k$ グループに分類

本項で扱う問題では、対象とする曲線の分割が既知であることから変曲点による分割が行えないので、ステップ1において各セグメントの曲率代表値を求める際に、曲率の正負を考慮した平均値を代表値の初期値として用いる。また、各セグメントの従法線ベクトルは曲率の正負を考慮した平均値の符号によって定める。この平均値に FIA を適用し曲率の代表値を定める。ステップ2では、ステップ1で定まる代表値を  $k$ -means<sup>++</sup>法でクラスタリングしたのち FIA を適用しクラスター代表値を修正する。全曲線・全セグメントの曲率代表値を同時にクラスタリングする点に注意する。

### 5.3.3.2 Fast Improvement アルゴリズム

対象とする柱面準線  $\tilde{g}_\lambda$  が開曲線であり、端点での最終的な補間条件が  $G^0$  または補間条件が無い場合、次の補間条件を解く。

$$\langle \tilde{g}_{\lambda, n_\lambda} - \tilde{a}_{\lambda, n_\lambda}, \tilde{g}_{\lambda, n_\lambda} - \tilde{a}_{\lambda, n_\lambda} \rangle = 0 \quad (5.30)$$

このとき、 $\Delta \mathbf{a}_\lambda$  は定数として扱う。端点での最終的な補間条件が  $G^1$  である場合、次の補間条件を解く。

$$\begin{cases} \langle \tilde{g}_{\lambda, n_\lambda} - \tilde{a}_{\lambda, n_\lambda}, \tilde{g}_{\lambda, n_\lambda} - \tilde{a}_{\lambda, n_\lambda} \rangle = 0 \\ \langle {}_g \tilde{e}_{\lambda, n_\lambda}^1, {}_a \tilde{e}_{\lambda, n_\lambda}^1 \rangle - 1 = 0 \end{cases} \quad (5.31)$$

ここで、 ${}_g \tilde{e}_{\lambda, n_\lambda}^1$ ,  ${}_a \tilde{e}_{\lambda, n_\lambda}^1$  は、曲線  $\tilde{g}_\lambda$ ,  $\tilde{a}_\lambda$  の初期点における接ベクトルである。このとき、 $\Delta \mathbf{a}_\lambda$ ,  $\Delta \theta_\lambda$  は定数として扱う。最後に閉曲線の場合は、次の条件を解く。

$$\begin{cases} \langle \tilde{a}_{\lambda, n_\lambda} - \tilde{a}_{\lambda, 0}, \tilde{a}_{\lambda, n_\lambda} - \tilde{a}_{\lambda, 0} \rangle = 0 \\ \langle {}_a \tilde{e}_{\lambda, n_\lambda}^1, {}_a \tilde{e}_{\lambda, 0}^1 \rangle - 1 = 0 \end{cases} \quad (5.32)$$

ここでは、 $\Delta \mathbf{a}_\lambda$ ,  $\Delta \theta_\lambda$  は変数として扱う。以上の補間条件をすべての柱面に関して連立することで解くべき連立方程式が得られる。ここでも、3.3.2.2 項と同様に、一般化 Newton-Raphson 法を適用して解を求める。境界条件に関わる変数 ( $\Delta \mathbf{a}_\lambda, \Delta \theta_\lambda$ ) に加えて、CCA-1 ではすべてのセグメントの曲率半径と弧長に関するスケール変数を未知変数として、CCA-2 では曲率半径の  $k$  個の代表値とすべてのセグメントの弧長に関するスケール変数を未知変数として扱う。

## 5.4 数値解析

本節では、5.3 節で示した  $k$ -cylindrical strip 近似アルゴリズムを 2 つの C-strip モデルに対して適用した数値解析例を示す。本節で示す数値解析は、Intel® Core™ i9-9980HK プロセッサを搭載する PC を用いて実行されており、各アルゴリズムの実装においては並列演算処理を適宜組み込んでいる。

### 5.4.1 解析モデル a

本項で解析対象とする C-strip モデルを図 5-4 に示す。当該モデルは、図 5-5 に示す制御点数  $5 \times 7$  の 3 次 Nurbs 曲面  $S_a$  を、任意に設定した柱面共役座標系で半離散化し、端部を正方形領域 (図 5-5(a) 着色部) でトリムすることで得られたモデルである。曲面  $S_a$  はガウス曲率が正となる領域と負となる領域の双方を含むような複雑な形状となるよう任意にモデル化した。C-strip モデルの生成には方法 A (4.3 節) を用いたが、ここでは曲線間の線形補間 (4.5 節) ではなく曲線に沿った接触柱面 (4.2.6 項) を生成することで C-strip モデルの厳密解を生成した。接触柱面の生成には、方法 A で得られる離散曲線を Nurbs 補間して得られる滑らかな曲線を用いた (図 5-6)。C-strip モデルの分割は、総パネル枚数  $N = 500$  程度となる分割数とし、各パネルのアスペクト比が 1 に近くなるような分割位置を任意に設定した。このモデルに対して型枠数  $k = 20$  を設定し、表 5-1 に示す 4 パターンのパラメータを用いて解析を行った。型枠数  $k$  は、ワインガルデン曲面を対象としたパネルング手法 [11] が満たすことのできる型枠数  $k \approx \sqrt{N}$  を基準に設定した。a-1 は、ストリップ間に生じる幾何学的関係を考慮せず各ストリップの近似のみを個別に考慮したパラメータ設定であり、3.3.3 項で示した方法を直接適用した場合に等しい。a-2 はストリップの近似に加え線織の連続性を考慮したパラメータ設定、a-3 はさらに隣接するストリップ間の交線の近似を考慮したパラメータ設定、a-4 はストリップそのものの近似を考慮せず隣接するストリップ間交線の近似のみを考慮したパラメータ設定である。すべてのパターンで同じ初期化アルゴリズム ( $G^1$  補間 FIA) を採用し、最適化問題 (5.29) の初期解が全パターンで等しくなるよう設定した。

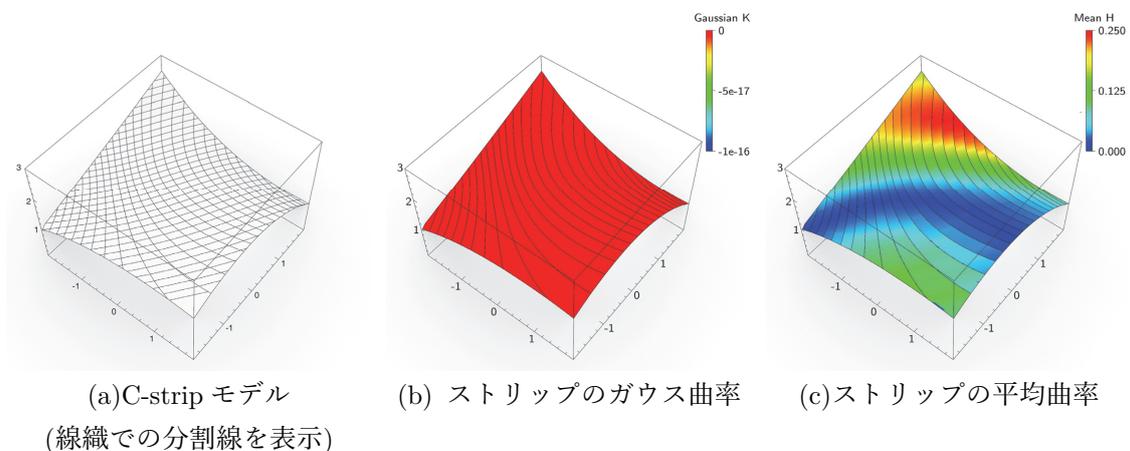


図 5-4 解析モデル a

最適化問題の収束判定は、初期解における目的関数の勾配ベクトルのノルム $\|\Delta E_0\|_\infty$ を基準として $\|\nabla E\|_\infty < 1.0e - 4 * \|\nabla E_0\|_\infty$ とした。解析結果を表 5-2 および図 5-7～図 5-14 に示す。

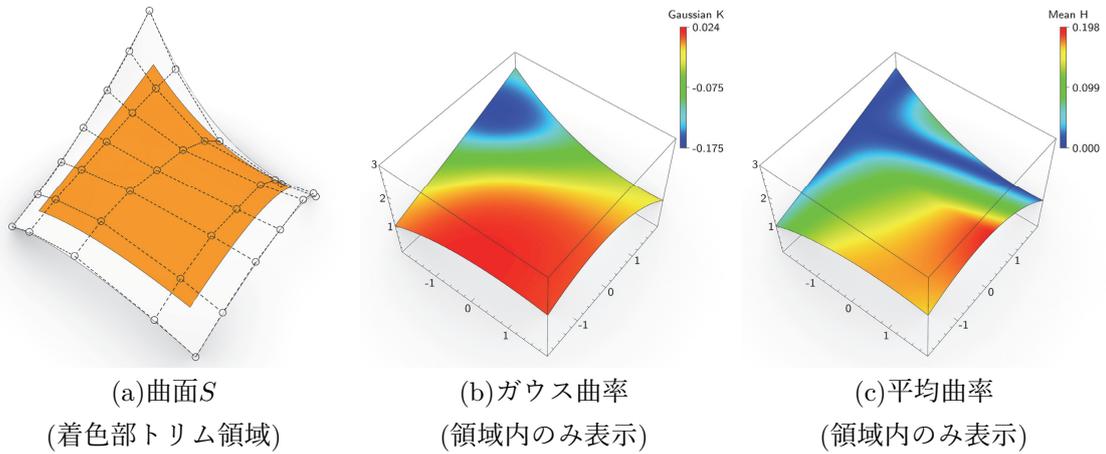


図 5-5 解析モデル a の連続対応曲面 $S$

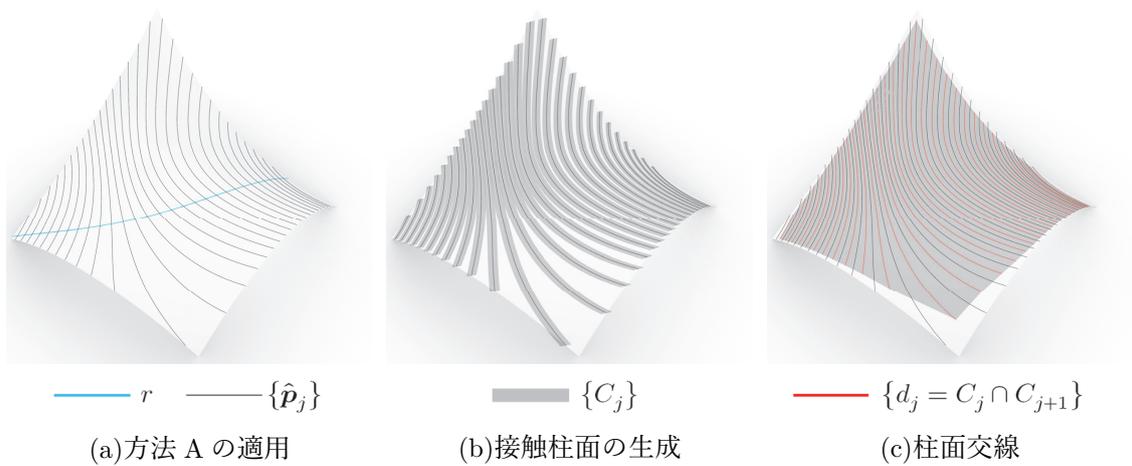


図 5-6 解析モデル a 生成フロー

表 5-1 最適化問題のパラメータ

	a-1	a-2	a-3	a-4
$\lambda_{prox,s}$	1.000	1.000	1.000	0.001
$\lambda_{prox,c}$	0.000	0.000	1.000	1.000
$\lambda_{cont}$	0.000	1.000	1.000	0.001
$\lambda_{fair}$	0.000	0.000	1.000	1.000
$\lambda_{ip}$	0.000	0.000	0.000	0.000
$\lambda_{closed}$	0.000	0.000	0.000	0.000

表 5-2 数値解析の計算コスト比較

	a-1	a-2	a-3	a-4
パネル数 $N$	498	498	498	498
収束回数	568	376	721	740
計算時間[m]	4.9	3.3	6.4	7.2

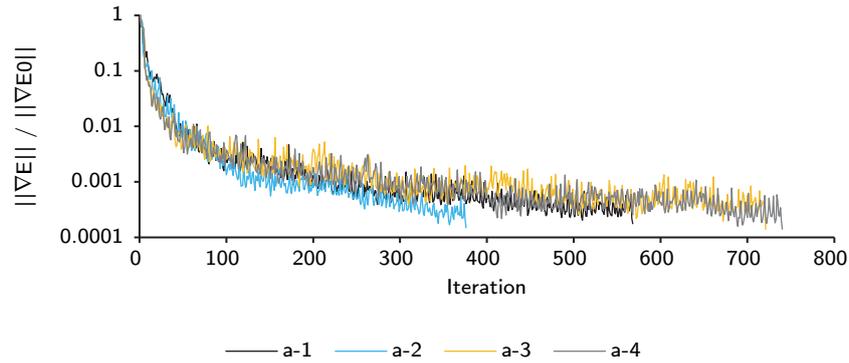


図 5-7 解析モデル a  $\|\nabla E\|_2 / \|\nabla E_0\|_2$  の推移

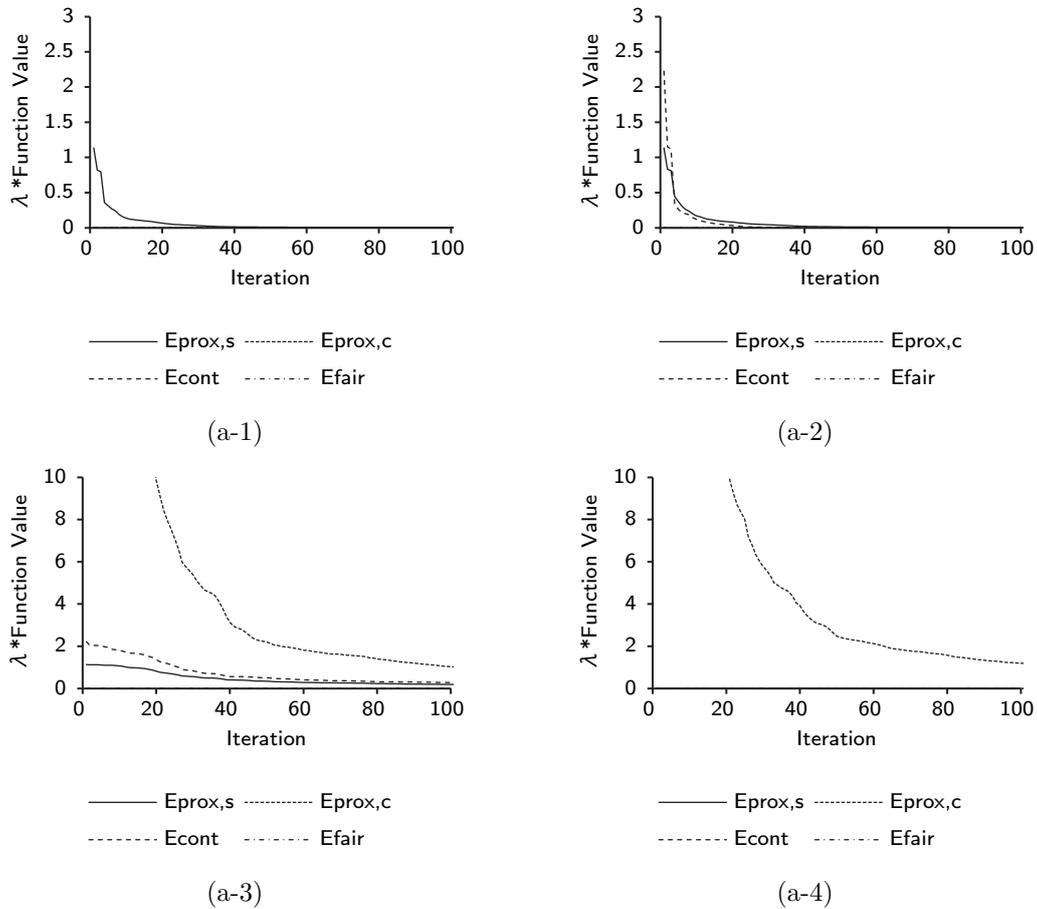


図 5-8 解析モデル a 目的関数の推移内訳(1~100 ステップ)

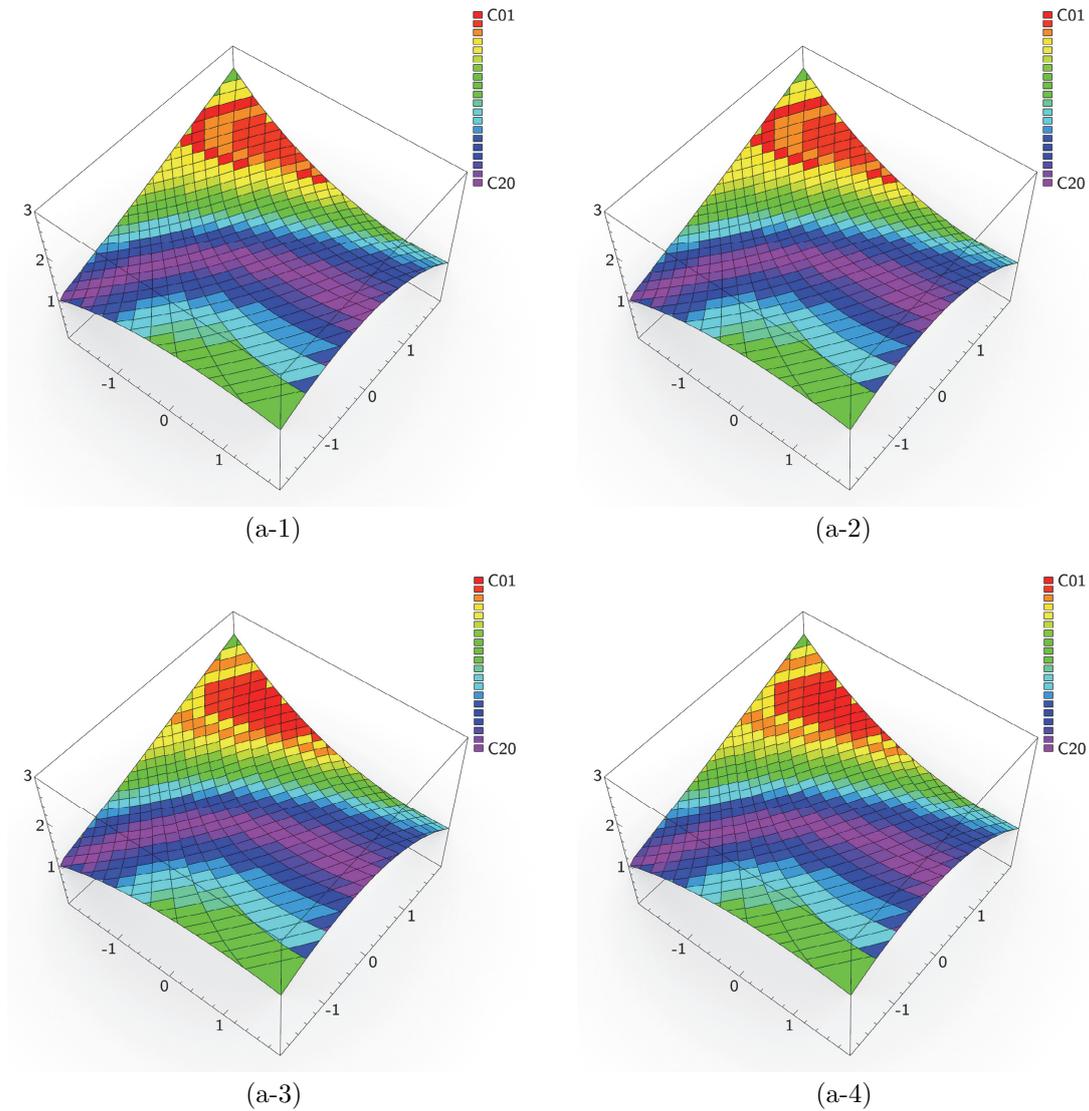


図 5-9 解析モデル a パネリングレイアウト

表 5-2 に計算コストの比較を示した。a-3 および a-4 で準ニュートン法の収束計算に多くの反復を要しており計算コストが高くなっている。図 5-7 には最適化過程における最適性の推移を示した。すべてのパターンが 100 ステップ程度でおおむね収束状態にあるにもかかわらず閾値までの収束に多くの反復を要している。この要因として、解法に L-BFGS 法( $m = 30$ )による準ニュートン法を用いたことや最適化問題が大規模であり自由度が高いことなどがあげられる。図 5-8 には 100 ステップまでの目的関数の推移を示した。 $E_{prox,c}$  が全体の収束性に大きく影響しており、a-3 および a-4 の計算コストに影響していることが確かめられる。図 5-9 にはパネルレイアウトを示した。隣接するストリップ  $C_i, C_{i+1}$  が最適化によって近似柱面  $C_i^{opt}, C_{i+1}^{opt}$  に変形されたとき、ストリップ間の交線  $\mathbf{p}_i = C_i \cap C_{i+1}$  は  $\mathbf{p}_i^{opt} = C_i^{opt} \cap C_{i+1}^{opt}$  に変形されるが、ここでは  $\mathbf{p}_i$  の  $S_a$  への最近接点における  $S_a$  の法ベクトルを  $\mathbf{p}_i$  に沿って平均化して得られるベクトル  $\mathbf{n}_i$  方向に  $\mathbf{p}_i$  を押し出して得られる曲面で  $C_i^{opt}, C_{i+1}^{opt}$  をトリムして得られるパネリング曲面を示した。5.3.3 項

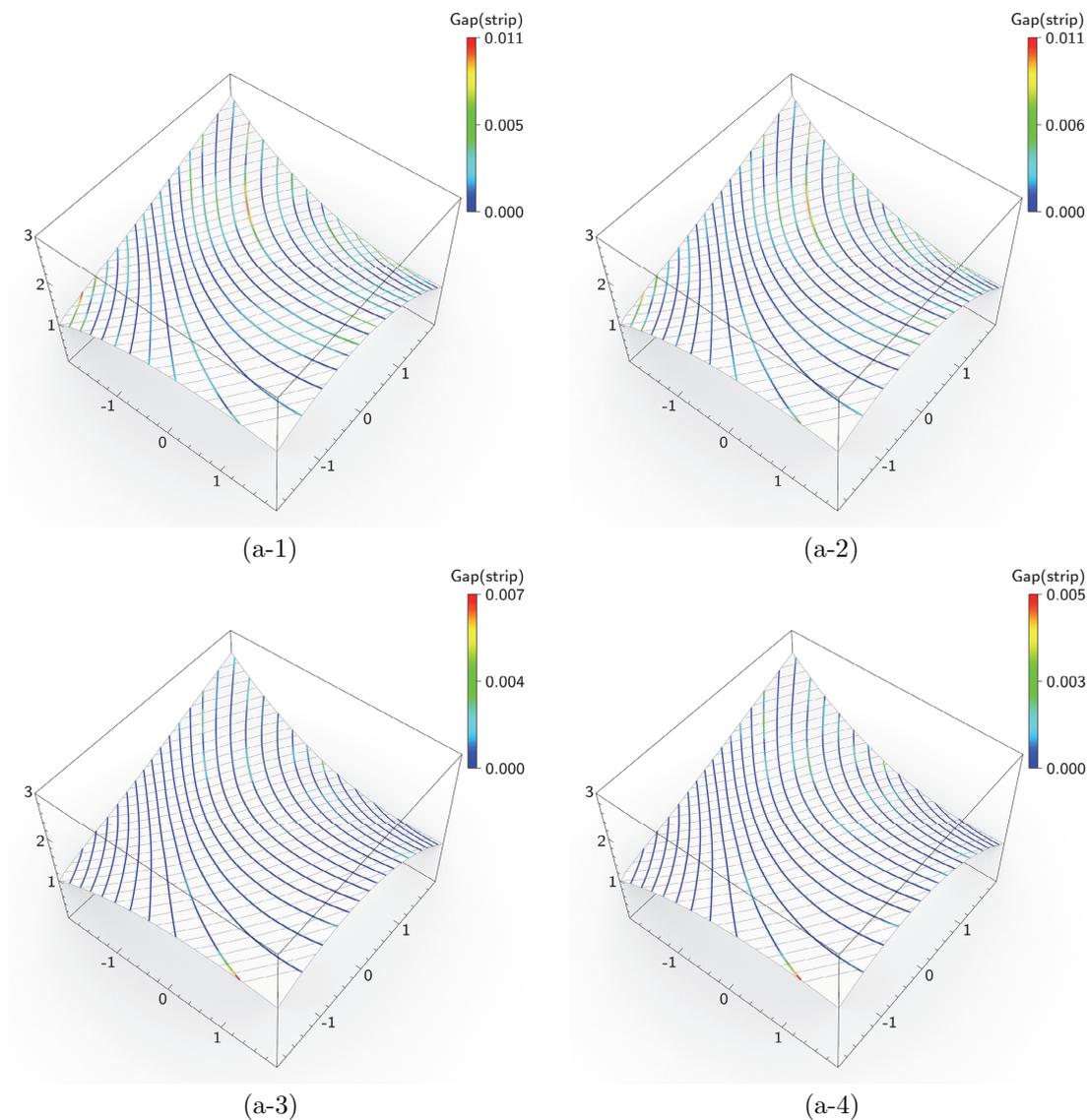


図 5-10 解析モデル a ストリップ間のギャップ

で示した初期化アルゴリズムから定まる型曲面の割り当てはすべてのパターンで共通であるが、ここでは最適化で得られた型曲面を準線の曲率の大きさに従って再ナンバリングした結果を示した。a-1 および a-2 と a-3 および a-4 で異なる型曲面の分布が得られており、得られた最適解に2つの傾向があることが確かめられる。

前述のトリムによって隣接するストリップ間にはギャップが生じるが、図 5-10 にはストリップ間に生じたギャップ量を示した。ここでも、a-1 および a-2 と a-3 および a-4 で異なる傾向の結果が得られている。a-1 および a-2 に対して a-3 および a-4 ではストリップ間に生じる最大ギャップが小さいうえ全体のギャップの分布も小さい。ここで生じるギャップ量は元の C-strip モデルに対する近似精度の 1 つの指標であるが、 $E_{prox,c}$  がストリップ間ギャップに効果をもつことが確かめられる。

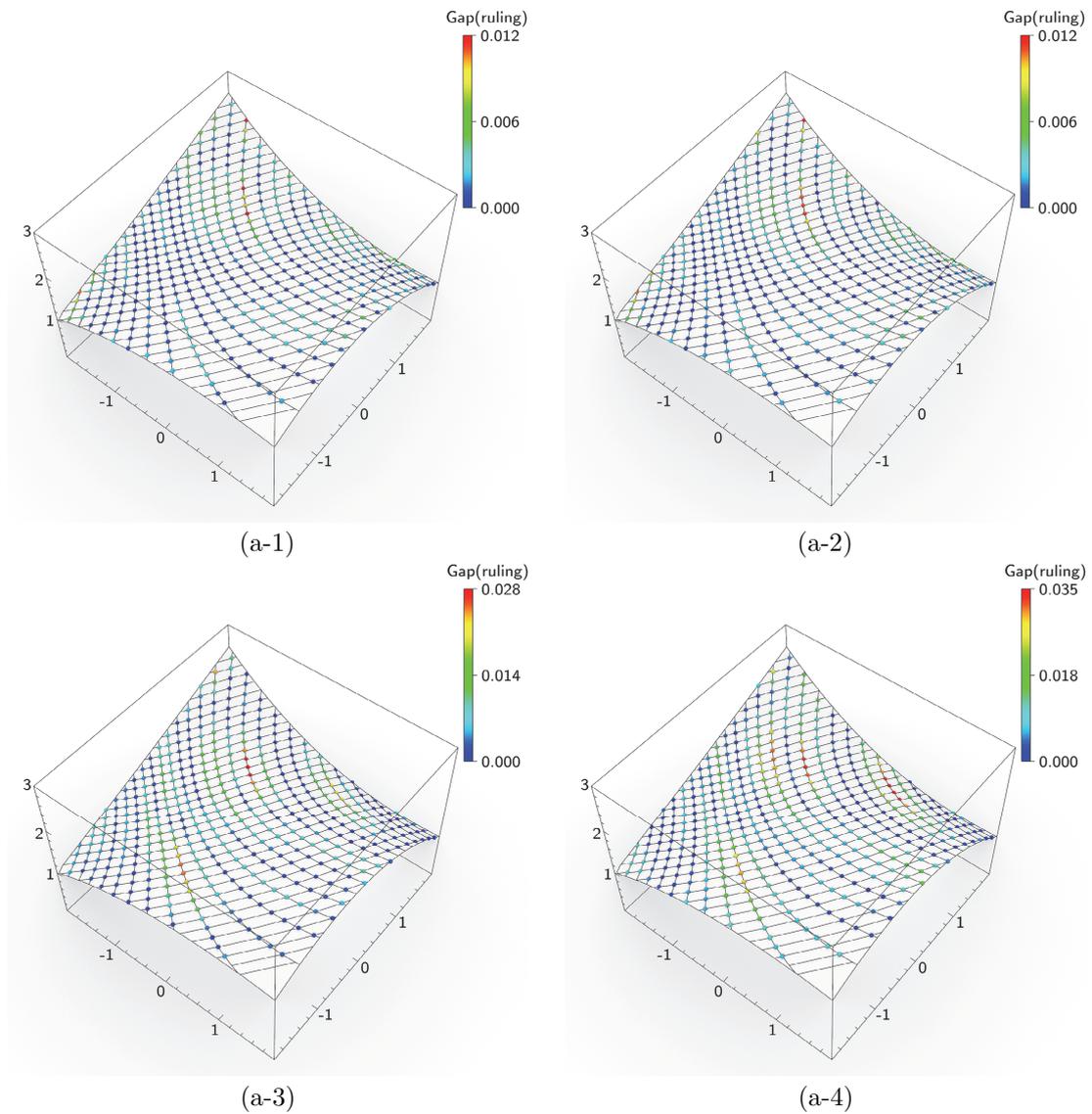


図 5-11 解析モデル a 線織間のギャップ

図 5-11 では、連続する線織間に生じたギャップを示した。ここでも同様に、a-1 および a-2 と a-3 および a-4 で異なる傾向が得られているが、線織の連続性に関しては a-1 および a-2 の方が高いことがわかる。図 5-10 に示した結果とあわせると、a-1 および a-2 では線織の高い連続性からストリップ全体の形状の自由度が低いいためストリップ間のギャップが大きくなっており、a-3 および a-4 ではストリップ内で線織位置がより自由に変化することでストリップ間のギャップが減少している。本章で新たに導入した関数  $E_{prox,c}$  が C-strip モデルに対する近似精度に大きく寄与していることが確かめられる。

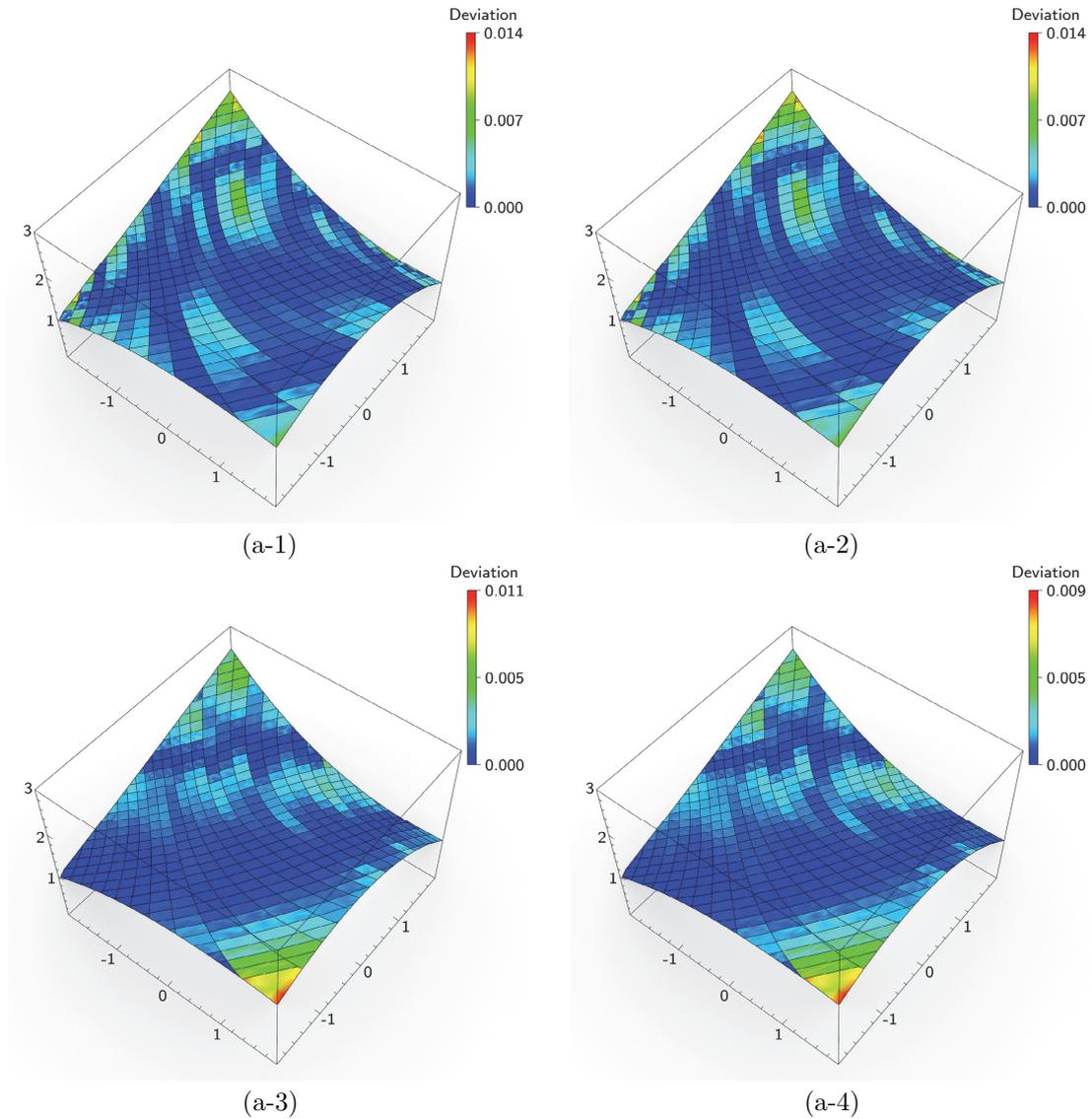


図 5-12 解析モデル a 対象 C-strip との離隔距離

図 5-12 ではパネリング対象の C-strip モデルとの離隔距離を示した。すべてのパターンで最大離隔距離に大きな違いはなく十分な精度で対象が近似されている。また、図 5-13 では連続対応する曲面  $S_a$  との離隔距離を示したが、この離隔距離もすべてのパターンで十分小さいことがわかる。

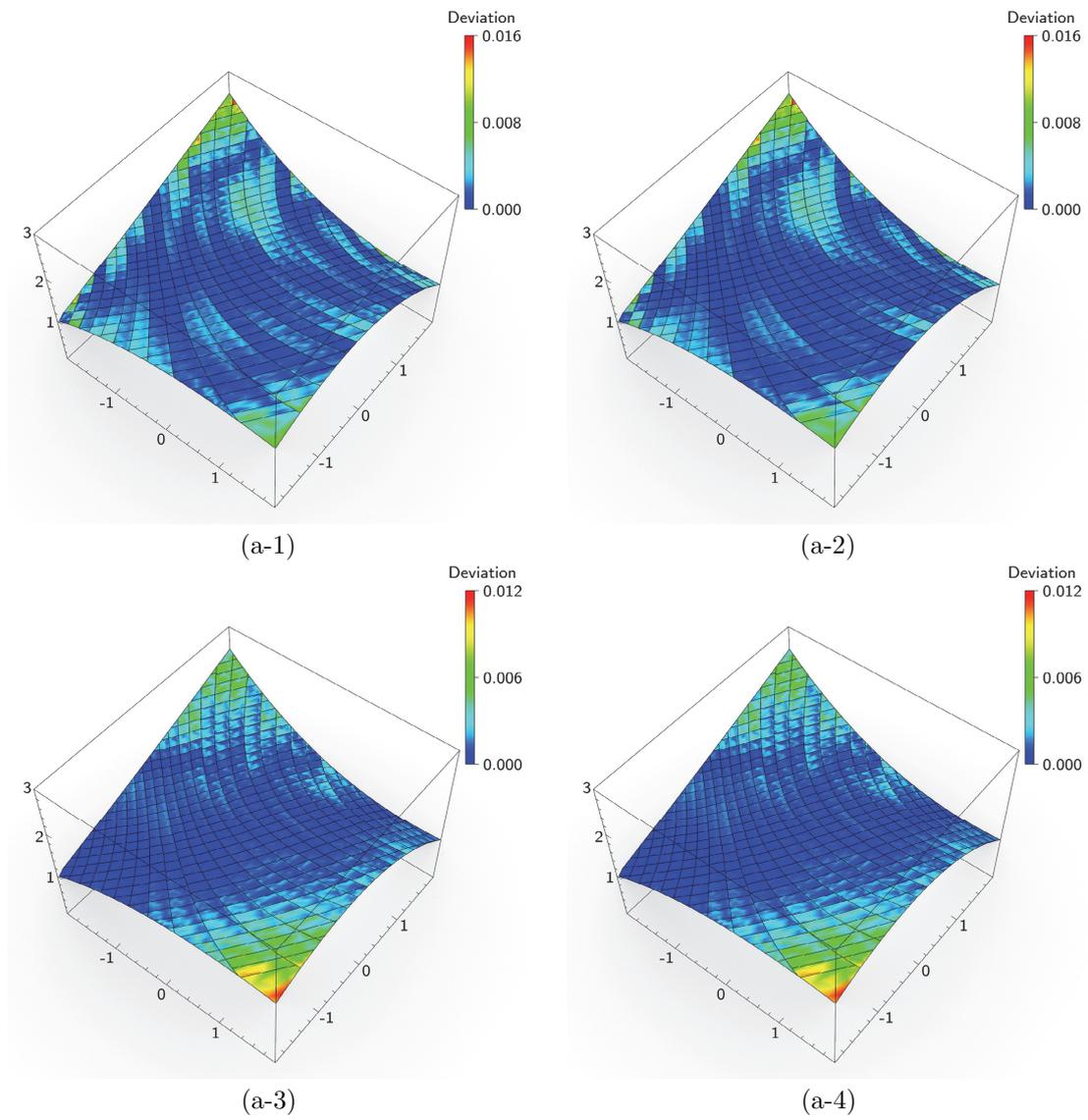


図 5-13 解析モデル a 曲面Sとの離隔距離

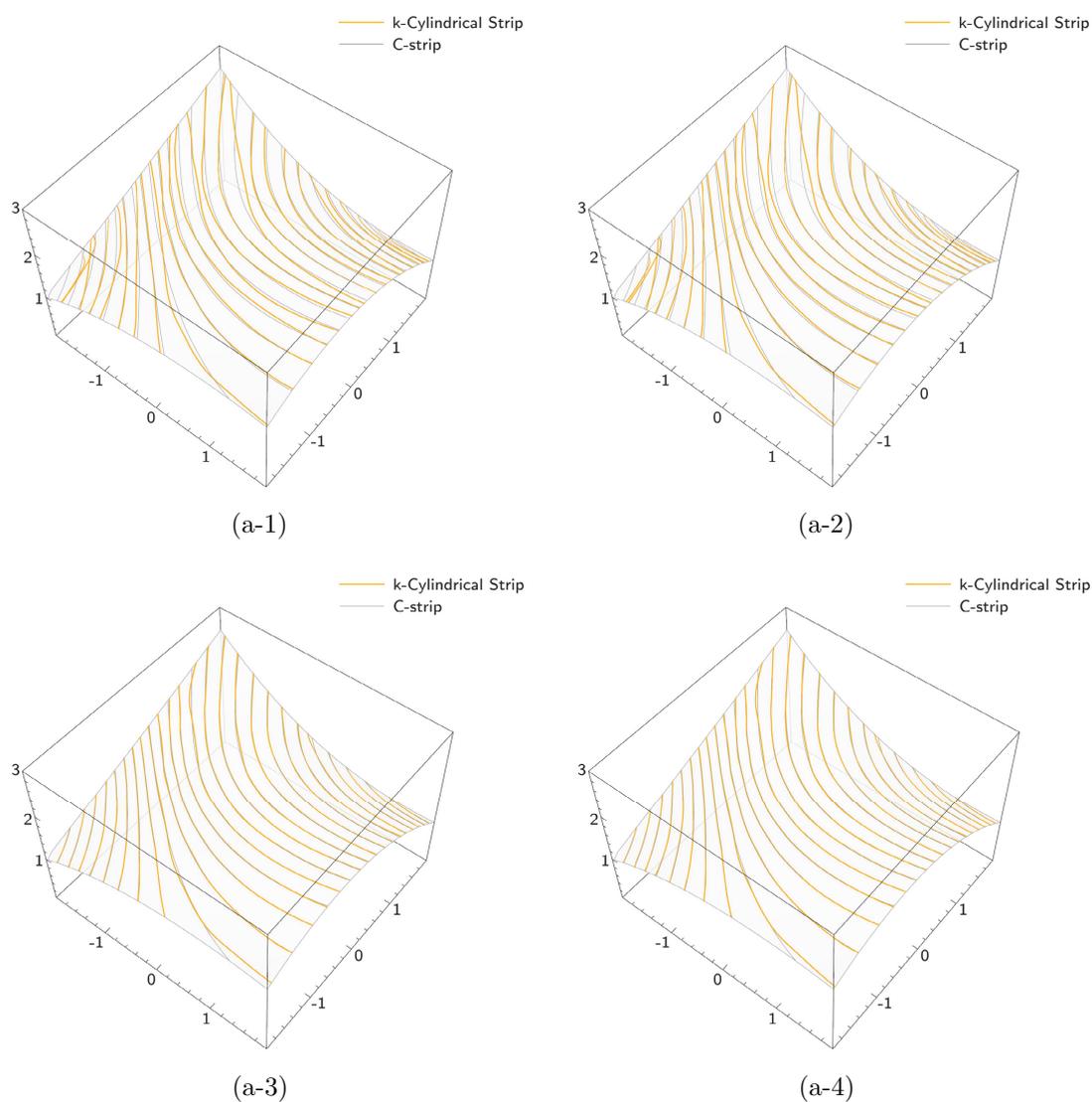


図 5-14 解析モデル a 厳密なストリップ間交線

最後に、図 5-14 にストリップ間の厳密な交線  $\mathbf{p}_i^{opt} = C_i^{opt} \cap C_{i+1}^{opt}$  を示した。ストリップ間に比較的大きなギャップを生じる a-1 および a-2 では  $\mathbf{p}_i^{opt}$  に大きなうねりが生じ、対象とする C-strip モデルの交線  $\mathbf{p}_i$  に対して大きな誤差が生じている。特に、曲面端部では隣接する交線が交わっており、このとき  $\{\mathbf{p}_i^{opt}\}$  は適切な C-strip モデルを導かない。一方で、ストリップ間ギャップの小さな a-3 および a-4 では、 $\mathbf{p}_i$  と  $\mathbf{p}_i^{opt}$  に大きな誤差がない。これらのモデルでは曲線間の交差が存在しないため  $\{\mathbf{p}_i^{opt}\}$  は適切な C-strip モデルを導く。

$\mathbf{p}_i$  に対する  $\mathbf{p}_i^{opt}$  の近似精度が高い a-3 や a-4 においても、一部の領域で交線  $\mathbf{p}_i^{opt}$  にわずかなうねりが生じている。 $E_{fair}$  は交線のうねりの解消に一定の効果をもつものの、(a-3) および (a-4) で得られた交線に大きな違いがないことを考慮すると、 $\mathbf{p}_i^{opt}$  の滑らかさに限界があることがわかる。これは、 $k$ -cylindrical strip モデルの曲率に関する厳しい制約 (i.e. 曲率が  $k$  種類のみ) に起因しており、より滑らかな交線を得るためには  $k$  にさらに大きな値を設定する必要がある。

### 5.4.2 解析モデル b

本項で対象とする C-strip モデルを図 5-15 に示す。当該モデルは図 5-16 に示す制御点数  $295 \times 3$  の  $3 \times 2$  次 Nurbs 曲面  $S_b$  を、底面側の境界曲線接ベクトルを 1 方向とする柱面共役座標系で半離散化して得られたモデルである。曲面  $S_b$  はスタジアム客席部の外郭構造を参考にモデル化した曲面であり、曲面の全域でガウス曲率が正となる曲面である。この曲面  $S$  は左右対称な曲面であるため一方のみを解析対象として扱う。C-strip モデルの生成には解析モデル a と同じ方法を用いた(図 5-17)。C-strip モデルの分割は総パネル枚数  $N = 500$  程度(対称部分を考慮すれば  $N = 1000$ )となる分割数とし、各ストリップの分割位置はスタジアムのスケールを考慮して PC パネルなどでパネリング曲面が設計できるよう設定した。このモデルに対して、モデル a と同様に型枠数  $k = 20$  を設定し、4 パターンのパラメータ(表 5-3)を用いて解析を行った。 $\lambda_{fair}$  以外の係数は解析モデル a と同様であるが、 $\lambda_{fair}$  は他の関数の値とのバランスを考慮して 0.01 を設定した。すべてのパターンで同じ初期化アルゴリズムを採用するが、モデル a と異なり、クラスタリングから定まる型曲面の割り当てのばらつきを考慮して  $G^0$  補間 FIA を採用する。最適化問題の収束判定は、モデル a と同様に、初期解における目的関数の勾配ベクトルのノルム  $\|\Delta E_0\|_\infty$  を基準として、 $\|\nabla E\|_\infty < 1.0e - 4 * \|\nabla E_0\|_\infty$  とした。解析結果を表 5-4 および図 5-18~図 5-25 に示す。

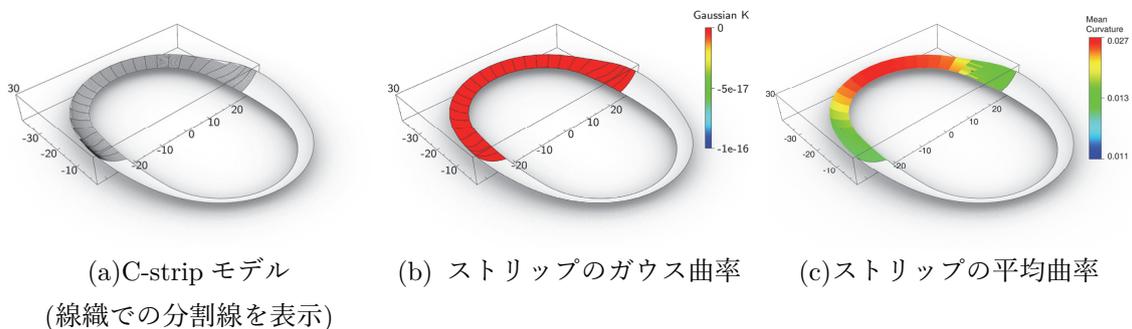


図 5-15 解析モデル b

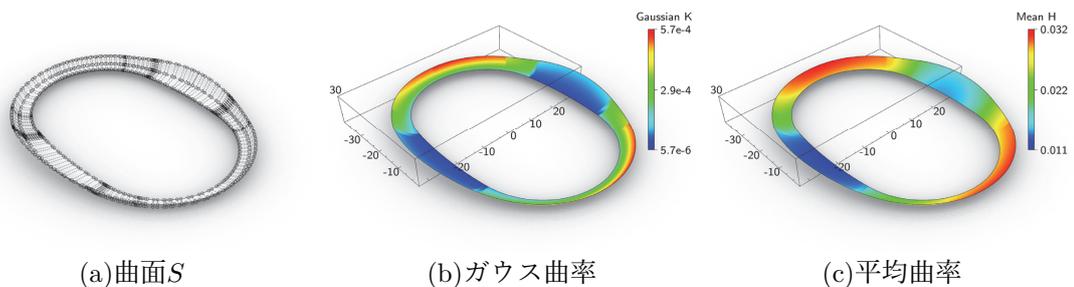


図 5-16 解析モデル b の連続対応曲面  $S$

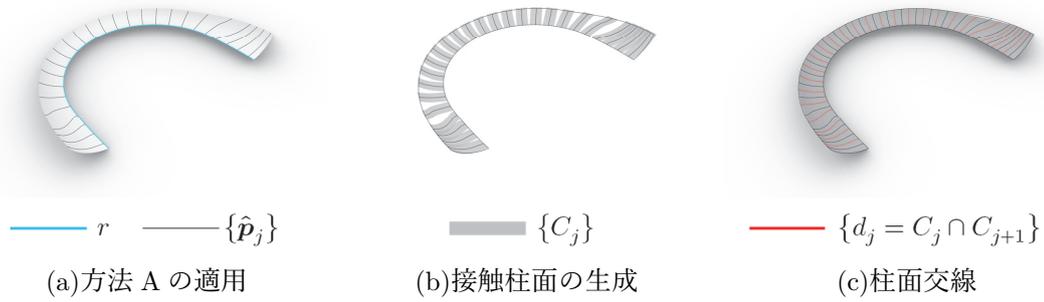


図 5-17 解析モデル b 生成フロー

表 5-3 最適化問題のパラメータ

	b-1	b-2	b-3	b-4
$\lambda_{prox,s}$	1.000	1.000	1.000	0.001
$\lambda_{prox,c}$	0.000	0.000	1.000	1.000
$\lambda_{cont}$	0.000	1.000	1.000	0.001
$\lambda_{fair}$	0.000	0.000	0.010	0.010
$\lambda_{ip}$	0.000	0.000	0.000	0.000
$\lambda_{closed}$	0.000	0.000	0.000	0.000

表 5-4 数値解析の計算コスト比較

	b-1	b-2	b-3	b-4
パネル数 $N$	512	512	512	512
収束回数	201	144	1478	1684
計算時間[m]	1.8	1.3	13.2	14.7

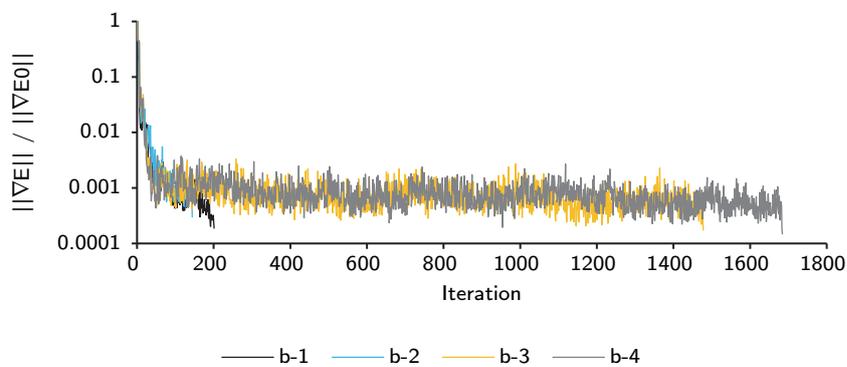


図 5-18 解析モデル b  $\|\nabla E\|_2 / \|\nabla E_0\|_2$  の推移

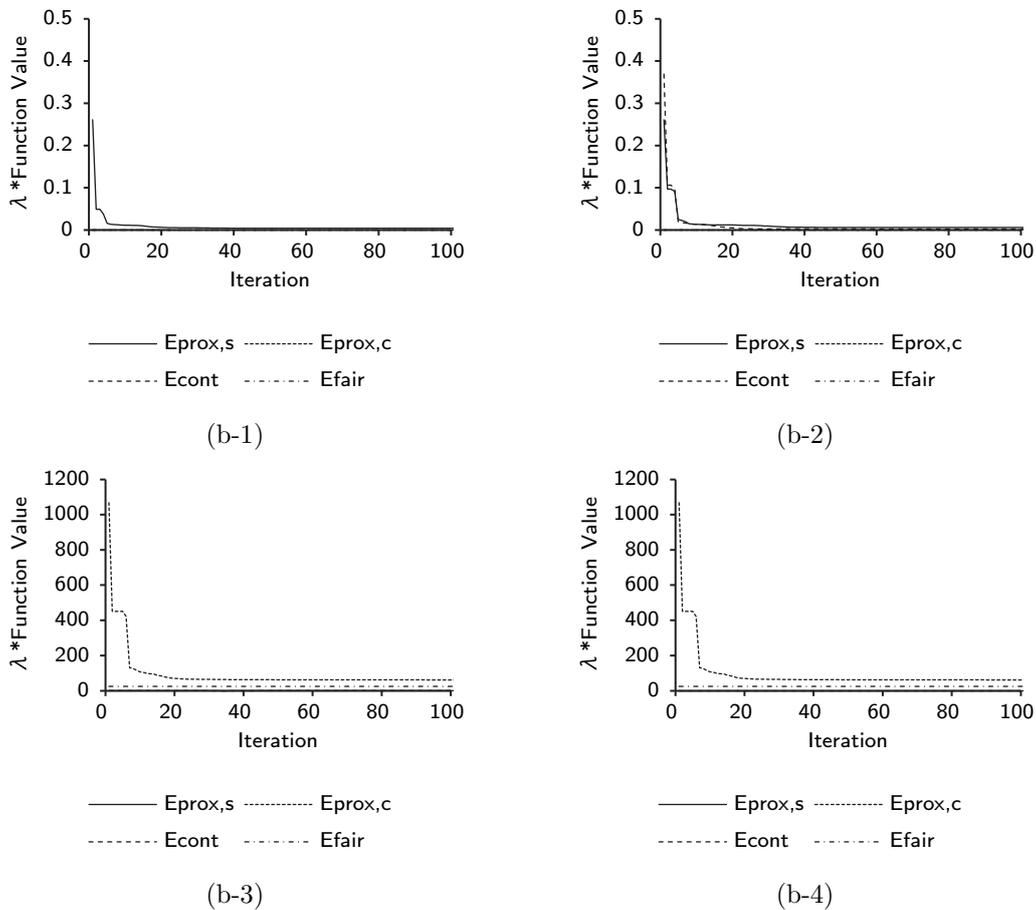


図 5-19 解析モデル b 目的関数の推移内訳(1~100 ステップ)

表 5-4 に計算コストの比較を示した。解析モデル a と同様に、b-3 および b-4 で計算コストが高くなっている。図 5-18 には最適化過程における最適性の推移を示した。ここでも解析モデル a と同様にすべてのパターンが 100 ステップ程度でおおむね収束状態にあるにもかかわらず閾値までの収束に多くの反復を要している。特に、b-3 および b-4 の 100 ステップ以降における最適性の変化は極めて小さく、設定された閾値(=0.001)が過剰に小さな値である可能性が高い。図 5-19 には 100 ステップまでの目的関数の推移を示した。ここでも、 $E_{prox,c}$  が全体の収束性に大きく影響している。特に、本解析モデルでは、 $E_{prox,c}$  が他の目的関数と比較して非常に大きな値となっている。これは、隣接するストリップ  $C_i, C_{i+1}$  の線織ベクトル  $r_i, r_{i+1}$  が平行に近い場合に、ストリップの近似誤差から生じる交線の誤差が非常に大きくなるためである。本解析モデルでは対称モデルの端部領域(図 5-16(b)で  $K \approx 0$  の領域)で線織ベクトルが平行に近づく。

図 5-20 にはパネルレイアウトを示した。ここでも解析モデル a と同様に、曲面  $S_0$  の法ベクトルを用いたトリムによって得られるパネルング曲面を示した。ここでも最適化で得られた型曲面を準線の曲率の大きさに従って再ナンバリングした結果を示したが、すべてのパターンでパネルレイアウトは等しい。

図 5-21 にはトリムによってストリップ間に生じたギャップ量を示した。ここでは、b-1 および

b-2 と b-3 および b-4 で異なる傾向の結果が得られている。b-3 および b-4 では、きわめて限定的な領域で b-1 および b-2 と比較して大きなギャップを生じているが、全体を見ると b-1 および b-2 と比較して小さなギャップとなっている。これは、解析モデル a と同様の傾向であり、 $E_{prox,c}$  がストリップ間ギャップに効果をもつことがここでも確かめられる。

図 5-21 では、連続する線織間に生じたギャップを示した。ここでも同様に、b-1 および b-2 と b-3 および b-4 で異なる傾向が得られており、解析モデル a と同様の傾向を示している。b-3 および b-4 は、図 5-16(b)  $K \approx 0$  の領域において大きな線織間ギャップを生じているが、これに対応して当該領域においてストリップ間ギャップが解消されている。

図 5-23 ではパネリング対象の C-strip モデルとの離隔距離を示した。b-3 および b-4 では、一部の端部領域で大きな離隔距離を生じているが、全体を見ると十分な精度で対象が近似されている。一方で、b-1 および b-2 ではすべての領域で高い精度で対象が近似されている。また、図 5-24 では連続対応する曲面  $S_b$  との離隔距離を示したが、曲面  $S_b$  との離隔距離に関してはすべてのパターンで同程度の結果が得られている。

最後に、図 5-25 にストリップ間の厳密な交線  $\mathbf{p}_i^{opt} = C_i^{opt} \cap C_{i+1}^{opt}$  を示した。本解析モデルでは、すべてのパターンで良好な交線が得られており、 $\{\mathbf{p}_i^{opt}\}$  は適切な C-strip モデルを導く。 $E_{prox,c}$  を評価しない b-1 および b-2 において一部の交線にわずかなうねりが生じているが、すべてのパターンである程度フェアな曲線が得られている。当該モデルの結果を見ると、交線  $\mathbf{p}_i^{opt}$  の精度が低い領域がストリップの線織方向  $\mathbf{r}_\lambda$  の変化が小さい領域に対応していることがわかる。この関係を考慮すると、各ストリップの線織方向  $\mathbf{r}_\lambda$  を変数として扱うことで交線の近似精度の改善(i.e., C-strip モデルそのものの近似精度の改善)が期待される。

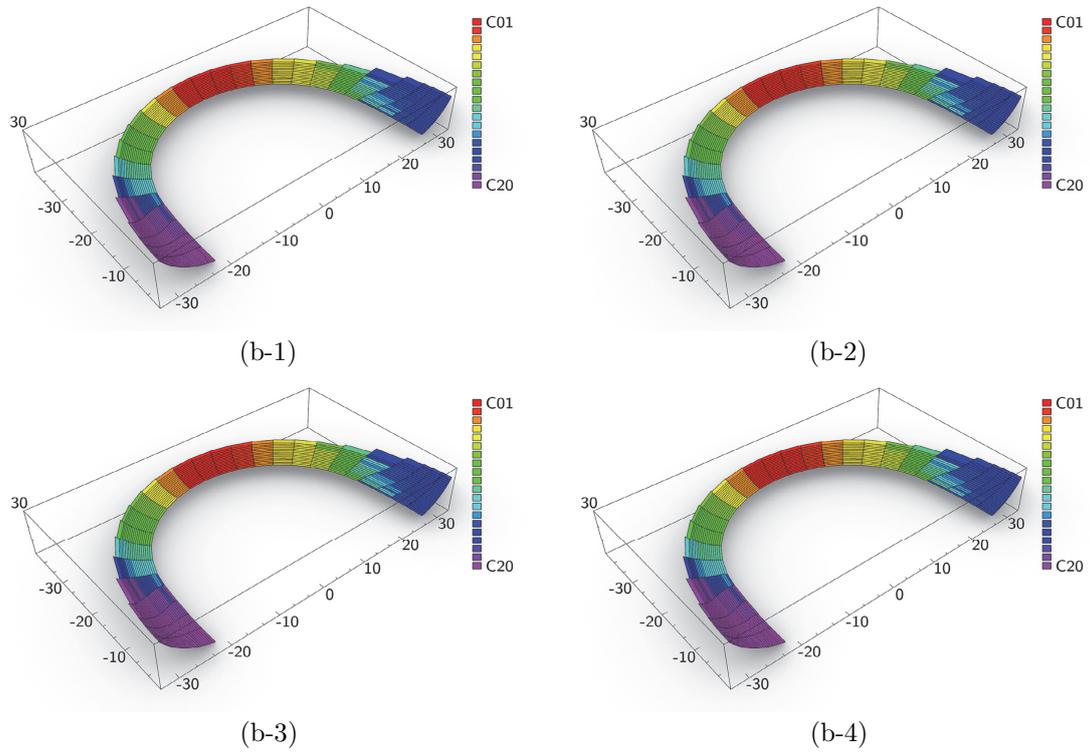


図 5-20 解析モデル b パネリングレイアウト

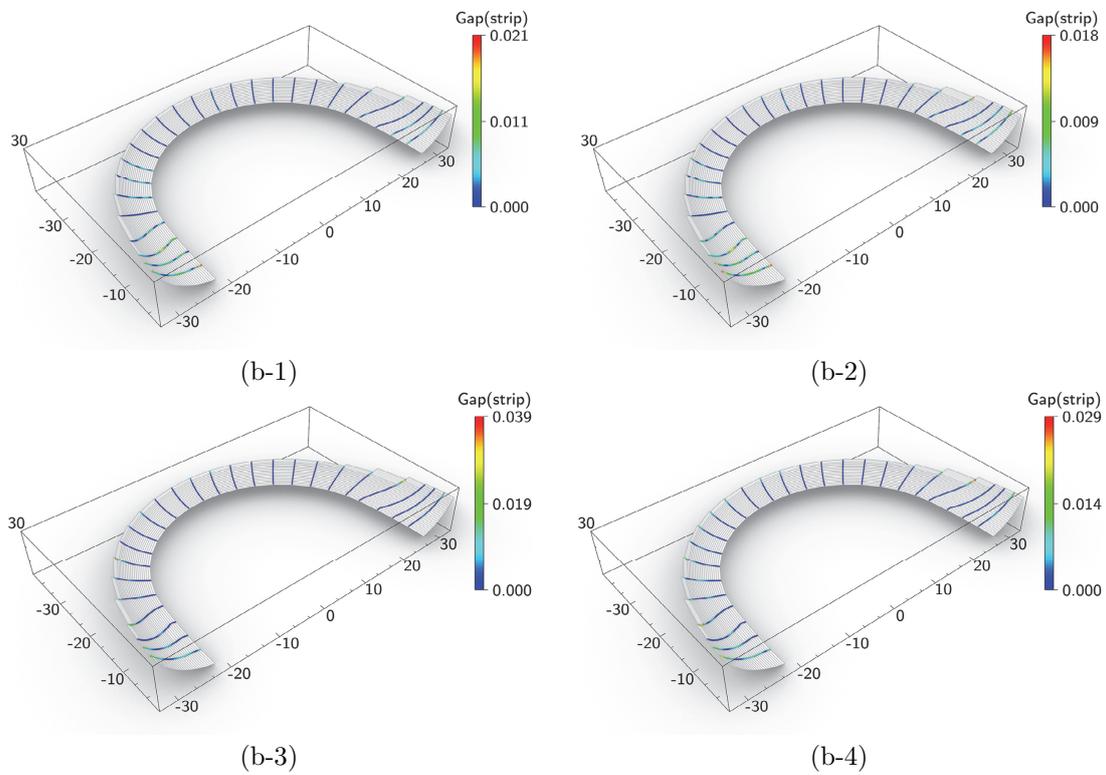


図 5-21 解析モデル b ストリップ間のギャップ

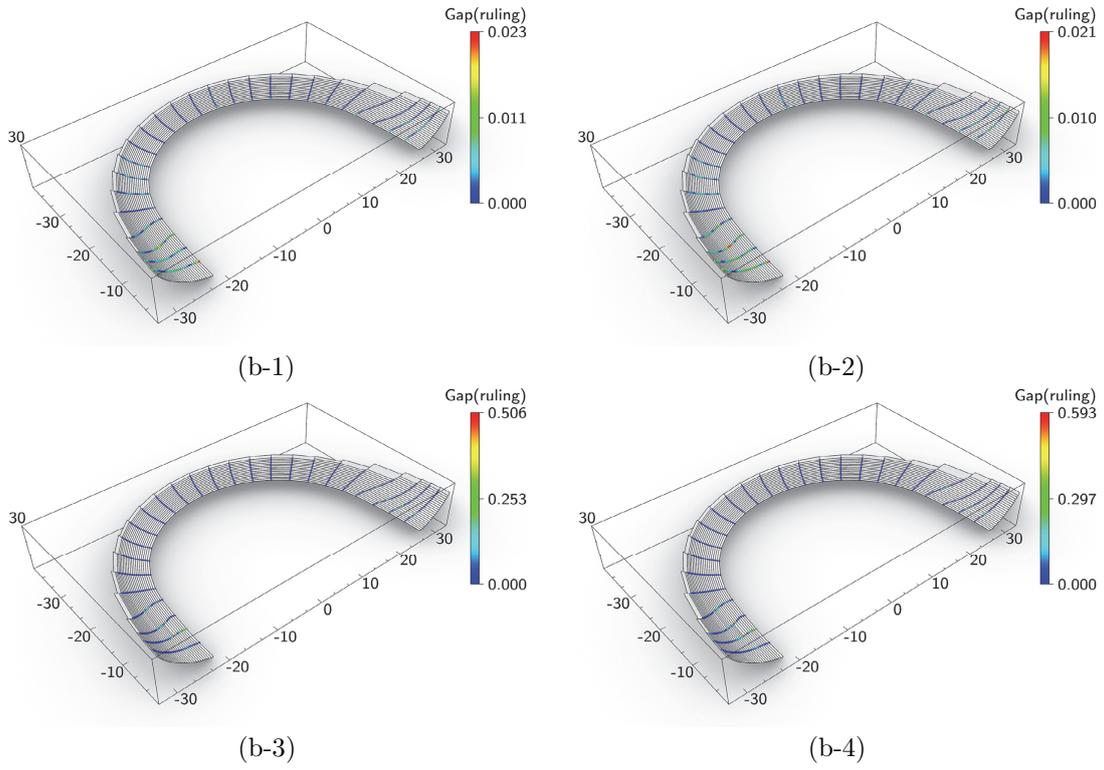


図 5-22 解析モデル b 線織間のギャップ

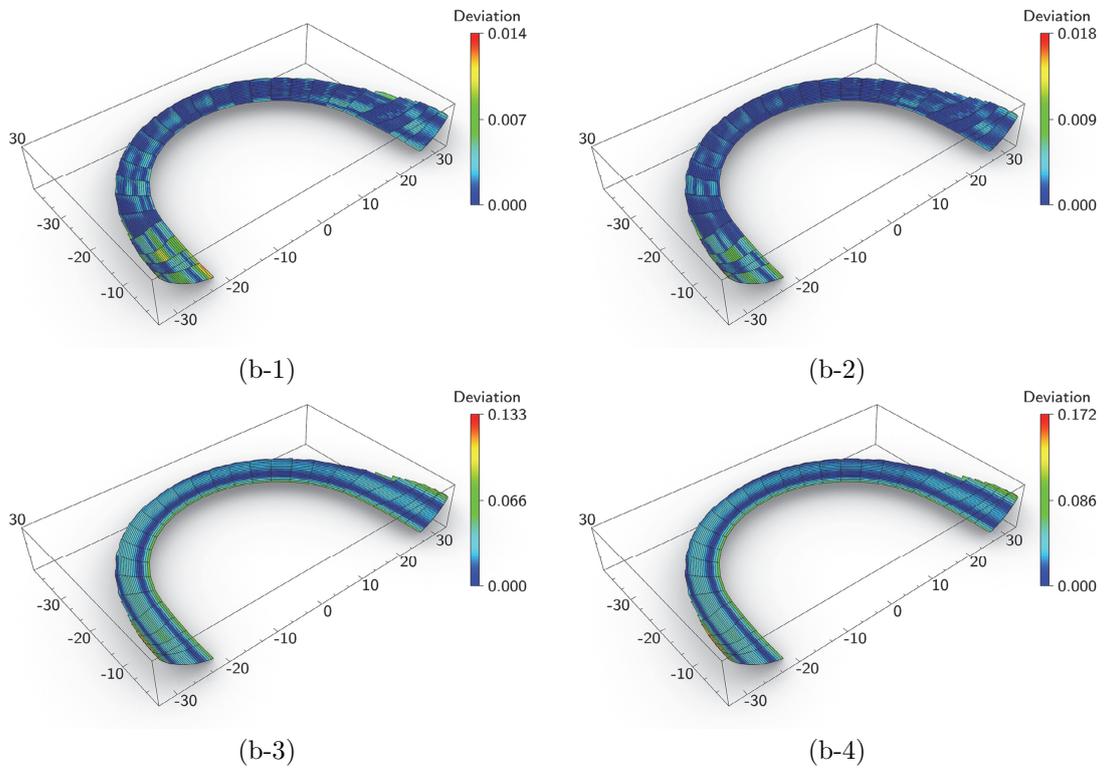


図 5-23 解析モデル b 対象 C-strip との離隔距離

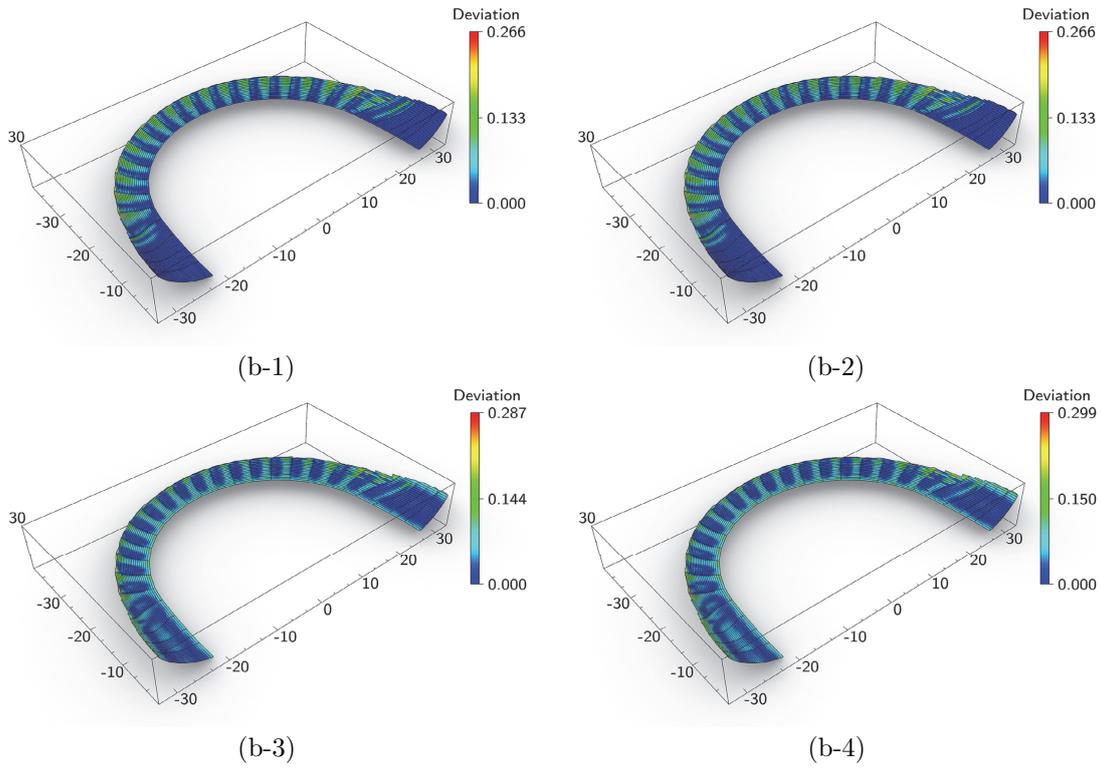


図 5-24 解析モデル b 曲面 $S$ との離隔距離

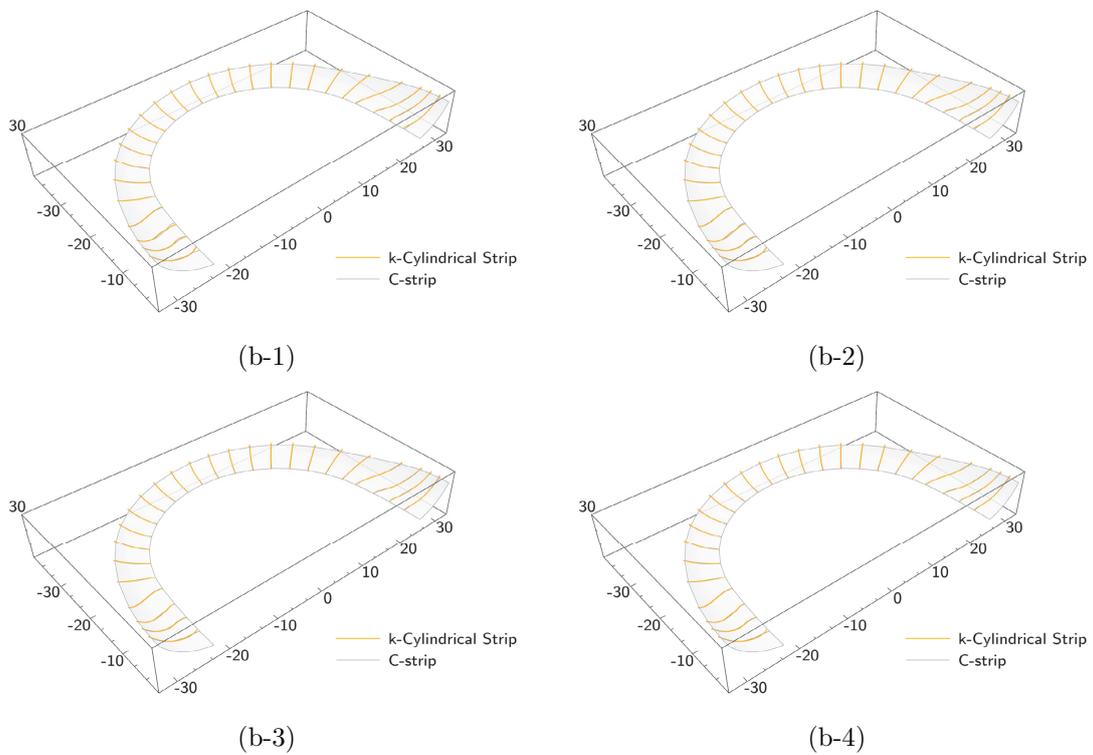


図 5-25 解析モデル b 厳密なストリップ間交線

## 5.5 結言

本章では、滑らかな曲面の特殊な半離散モデルである C-strip モデルに、単一柱面の特殊な離散モデルである  $k$ -離散柱面モデルを組み込んだ  $k$ -cylindrical strip モデルについて述べた。この  $k$ -cylindrical strip モデルは、 $k$ 種類の柱面で構成される C-strip モデルであり、本研究が目的とするパネリング条件(\*)を満たすパネリング曲面である。本章では、この  $k$ -cylindrical strip モデル中で、すべての部分柱面が円筒面のトリムサーフェスとなるモデルを具体的に求めた。5.2 節では、 $k$ -cylindrical strip モデルを定義するために  $k$ -離散柱面モデルの離散幅を緩和した新たな定義を導き、この緩和定義に対応する  $k$ -arc spline 曲線の拡張について示した。5.3 節では、与えられた C-strip モデルから  $k$ -cylindrical strip モデルを求める方法を示した。ここでは、3.3.3 項で示した最適化問題を基本とし、線織の連続性や交線の滑らかさなど C-strip モデル特有の幾何学的な関係を考慮した新たな最適化問題を定式化した。この最適化問題が、3.3.2 項で示した独立柱面に対する初期化アルゴリズムの応用で同様に初期化され、準ニュートン法などのアルゴリズムを用いて効率的に最適解が求められることを示した。5.4 節では、2 つの解析モデルを対象とした数値解析例を示した。両モデルともに、関連研究 [11]における型枠数の目安  $k \approx \sqrt{N}$  と同等の条件下で近似精度の高い  $k$ -cylindrical strip モデルが得られた。得られた最適解は、最適化問題の目的関数を構成する評価関数の重み係数に応じて大きく 2 つに分類された。「1.線織の連続性の高い最適解」と「2.ストリップ交線の近似精度の高い最適解」である。最適解の傾向を決める主な要因は 3 つの評価関数  $E_{prox,s}$ ,  $E_{prox,c}$ ,  $E_{cont}$  のバランスであり、 $E_{prox,s}$ ,  $E_{cont}$  は最適解 1 の傾向を強め、 $E_{prox,c}$  は最適解 2 の傾向を強める。特に、最適解 1 に関して、対象とする曲面や設定する型枠数  $k$  によっては、ストリップ間の交線から定まる厳密なストリップモデルの再構成が困難となることを指摘した。この問題に対して、実設計では次の 2 つの設計方針が考えられる。

1. ストリップ間にギャップを許容したパネリング曲面として設計する
2. コストに配慮しながら  $k$  の値を調整しモデルの精度を上げる

アプローチ 1 では、与えられた C-strip モデルや連続対応する曲面の幾何情報を用いて、最適解として得られた  $k$ -cylindrical strip モデルを構成するストリップをトリムすることでパネリング曲面を設計する。このトリム操作によってストリップ間にギャップを生じる(図 5-10 や図 5-21)が、ストリップ間に配置されるサッシュやシールによってこのギャップを吸収すればよい。このとき、パネリング曲面に求められる諸性能(e.g., 水密性 [69]や意匠性)に応じて、重み係数の調整によるギャップ量の制御が必要となる。アプローチ 2 では、 $k$  の値を増加させることで近似精度の高い  $k$ -cylindrical strip モデルを求める。本章で提案する方法は離散モデルに厳密に基づいた方法であり、 $k = 1, 2, 3, \dots$  に従って対象曲面への収束が保証されているので、 $k$  に対する操作は直感的な解を与えてくれる。本方法がもつこの性質は実設計における効率的な設計作業の手助けとなる。

## 第6章 結言

本論文では、建築工学における曲面のパネリング問題において柱面パネルを用いたパネリング曲面に着目し、そこにパネルの繰返し製造とパネリング曲面の連続性に関する指標を導入した新たなパネリング法を提案した。このパネリング法は、与えられた滑らかな曲面から、ユーザーが指定する種類数の柱面パネルのみで構成されるパネリング曲面で、一方の方向に $G^1$ 連続、もう一方の方向に $G^0$ 連続なパネリング曲面を生成する。パネル種類に関する制約は、パネル製造に型枠を要するガラスや GRC などの曲面パネルに対して型枠の繰返し利用による効率的なパネル製造を可能とし、連続性に関する制約は従来手法と同等以上の連続性を有するパネリング曲面の生成を可能とする。

本論文が提案するパネリング法は、「1.Cylindrical strip モデルの生成」と「2.Cylindrical strip モデルの分割・要素制限」の2つのステップで構成される。ステップ1では、与えられた曲面から、その半離散モデルである cylindrical strip モデル(C-strip モデル)を求めるが、本論文では、第4章において、この C-strip モデルについて述べた。C-strip モデルは、H.Pottmann 等によって、一般形の developable strip モデルと併せて提案されたモデルであり、曲面の共役座標系の半離散化によって得られるモデルである。本論文では、C-strip モデルを共役座標系との対応関係の中に厳密に位置付けることにより、特別な共役座標系として柱面共役座標系を定義した。この柱面共役座標系を起点として、半離散モデルおよび離散モデルをそれぞれ C-strip モデルおよび cylindrical メッシュとして改めて定義した。与えられた曲面から C-strip モデルを求めるためには、曲面上に柱面共役座標系を定めその有限個のアイソパラメータ曲線を求める必要があるが、この問題に対して本論文では2つの方法 A・B を提案した。方法 A は、曲面上に任意に与えた曲線から柱面共役座標系を定め、数値積分によりアイソパラメータ曲線を求める方法である。この方法は、与える曲線が C-strip モデルの線織の流れに対応するため直感的で簡易な方法である一方で、与えた曲線が特異点を含む共役座標系を定めた場合に、曲面の極めて限定的な部分のみ被覆する C-strip モデルが得られるなど、その適用範囲には限界がある。方法 B は、C-strip モデルを求める代わりにその離散対応物である cylindrical メッシュを求める方法である。この方法は与えられた曲面を任意に離散化して得られる三角形メッシュ上に柱面共役場を生成し、柱面共役場に沿うメッシュの径数付けを求めることで cylindrical メッシュを求める方法である。離散系における柱面共役条件を制約条件とする最適化問題によりメッシュ上の滑らかな柱面共役場を求める。この方法は、特異点を含む柱面共役場も生成することが可能であり適用範囲が広いが、自己共役性から生じる特異点の定義やその扱いに関して課題が残る。

ステップ2では、ステップ1で求まる C-strip モデルを、限られた種類の部分柱面で構成される特殊な C-strip モデル(=  $k$ -cylindrical strip モデル)に変換する。ここでは、単一の柱面(または独立した複数の柱面)を限られた種類の柱面パネルで $G^1$ 連続にパネリングする方法(第3章)を cylindrical strip モデルに拡張した方法を用いる。本方法は、第3章の最適化問題に、線織の連続性や交線の滑らかさなど C-strip モデル特有の幾何学的な関係を組み込んだ最適化問題による

方法である。この最適化問題は、複数の評価関数(e.g., 線織の連続性、交線の滑らかさ、ストリップ準線の近似精度)の線形結合で定められる関数を目的関数とする無制約最適化問題であり、ユーザーは評価関数の重み径数の調整により得られるパネリング曲面を直感的に制御することができる。パネリング曲面の要求性能が満たされるよう重み径数を調整すればよい。

本論文が提案したパネリング法は、建築工学における自由曲面の設計に新たな可能性を与える。型枠の製造効率とパネリング曲面の連続性を両立する本方法は、曲面パネルを用いた滑らかで美しい自由曲面を合理的なコストの範囲内で実現することを可能とする。これにより、これまで具現化することが困難であった曲面ガラスや曲面 GRC パネルによる新たな自由曲面の実現が期待される。また、本方法は、型枠の繰返し利用を可能とするとともに、柱面パネルの利用によって切削加工によらないパネル製造を可能とするため、任意の曲面パネルを用いる方法と比較して、パネル製造過程で生じる材料ロスを大幅に削減することができる。本方法がもたらすパネル製造における合理性は、持続可能な社会における曲面建築の設計において大きな役割を果たすだろう。

最後に、第1章～第5章で述べた内容を要約して結論とする。

第1章では、建築工学における曲面のパネリング問題の背景や目的について述べた。まず、曲面のパネリング問題の背景として建築のスケールに関わる問題をあげ、曲面を建築形態として実現するとき曲面のパネリングが必須となることについて述べた。曲面のパネリングでは、パネル材料やその製造方法に応じて、要求される諸制約を満たすパネリング曲面を求める必要があり、自由曲面に対しては特に何らかの数理問題を解く必要があることを指摘した。さらに、本研究で具体的に定めるパネリング条件とその目的について述べた。本研究では、与えられた曲面を限られた種類の柱面パネルのみを用いてパネリングするとともに、隣接する柱面パネルが一方の方向に $G^1$ 連続、もう一方の方向に $G^0$ 連続であるパネリング曲面を求めることを目的とした。パネル種類に制約を設け型枠の繰返し利用による効率的なパネル製造を可能とすることで、特にガラスや GRC の曲面パネルによる合理的なパネリングを可能とする方法の確立を目指した。

第2章では、曲面のパネリング問題に関連する基本的な事項について整理した。まず、滑らかな曲面を対象とする微分幾何学について整理し、基本形式や曲率など基本的な事項について整理したのち、本研究で特に重要な役割を果たす曲面上の座標系と方向場について整理した。次に、離散曲面を対象とする微分幾何学について整理し、ここでも同様に、基本的な幾何量について整理したのち、本研究で特に重要な役割を果たすメッシュの径数付けやメッシュ上の方向場について整理した。最後に、建築工学におけるパネリング曲面について整理した。ここでは、パネリング曲面を2つの指標(外形線・曲率)で分類しそれぞれの性質を整理した。まず、パネル外形線の形状により、パネリング曲面を(A)三角形モデル(B)四角形モデル(C)任意多角形モデルの3モデルに分類した。3モデルの中で基本的なモデルである(A)三角形モデルと(B)四角形モデルについて、それぞれの性質を整理・比較することで、(B)四角形モデルの工学的な優位性について述べた。次に、パネルの曲率によりパネリング曲面を(a)平面モデル(b)単曲率モデル(c)複曲率モデルの3モデルに分類した。ここでも3モデルの性質を整理・比較することで、それぞれのモデルのメリット・デメリットについて述べた。最後に、(B)四角形モデルを前提としたパネリング曲面に関して、(a)～(c)のそれぞれのモデルごとに既往のパネリング方法を整理した。

第3章では、本論文で提案するパネリング法のステップ2の基本となる、独立した柱面を対象

としたパネリング法を提案した。本方法は、線織に沿った分割レイアウトを前提とし、対象とする柱面を限られた種類の柱面パネルのみを用いて $G^1$ 連続にパネリングする方法である。ここでは、柱面のパネリング問題を準線の離散化問題として考え、求めるパネリング柱面の準線を、対与えられた滑らかな柱面の準線の特殊な離散モデルとして考えた。この離散モデルは、平面曲線の離散モデルの中で、限られた種類の部分曲線で $G^1$ 補間可能な離散モデルであり、本論文ではこのモデルを $k$ -離散モデルとして定義した。さらに、この $k$ -離散モデルの中で補間曲線が arc spline 曲線となる離散モデルが、滑らかな曲線の曲率の離散化とそのクラスタリングにより得られることを示し、この離散モデルがもつ補間曲線を特に $k$ -arc spline 曲線として定義するとともに、その制御式を与えた。次に、与えられた柱面準線の $k$ -離散モデルの中で、準線を最良近似する離散モデルを求めるために、準線を $k$ -arc spline 曲線により近似する最適化問題を定式化した。 $k$ -arc spline 曲線の離散変数を与えられた準線の曲率の離散化とそのクラスタリングから定めることで、最適化問題を連続最適化問題として定式化した。単一の柱面を基本として定式化された最適化問題およびその初期化手法を、独立した複数の柱面を対象とする問題に拡張し、実設計における本パネリング法の適用範囲の広さを示した。また、複数の解析例を示し、本方法の近似精度の高さや計算効率の高さを具体的に示した。

第4章では、本論文で提案するパネリング法のステップ1にあたる、滑らかな曲面の半離散モデルとして C-strip モデルを求める方法を提案した。C-strip モデルは、滑らかな曲面の特定の共役座標系の半離散化によって得られるモデルである。本章では、C-strip モデルを導く共役座標系を特に柱面共役座標系として定義しその特徴付けを示すとともに、柱面共役座標系に対応する共役場の条件を導きその共役場を柱面共役場として定義した。与えられた曲面から C-strip モデルを求めるためには、曲面上に柱面共役座標系を定めその有限個のアイソパラメータ曲線を求める必要があるが、この問題に対して本章では2つの方法 A・B を提案した。方法 A は、曲面上に任意に与えた曲線から柱面共役座標系を定め、数値積分によりアイソパラメータ曲線を求める方法である。この方法は、与える曲線が C-strip モデルの線織の流れに対応するため直感的で簡易な方法である一方で、与えた曲線が特異点を含む共役座標系を定めた場合に、曲面の極めて限定的な部分のみ被覆する C-strip モデルが得られるなど、その適用範囲には限界がある。方法 A の適用範囲を広げるためには、大域的に矛盾のない柱面共役座標系を導く数値積分の境界条件を明らかにすることが重要であろう。方法 B は、C-strip モデルに半離散 - 離散対応する PQ メッシュを求める方法である。本章ではこの PQ メッシュを特に cylindrical メッシュとして定義し、三角形メッシュ上の柱面共役場から cylindrical メッシュを求める方法を提案した。ここでは、連続系における柱面共役条件から導かれた離散系における柱面共役条件を制約とする最適化問題を定式化した。この最適化問題は、整数変数とバイナリ変数を含む混合整数計画問題であるが、貪欲法を用いた解法で最適解が得られることを数値解析例により示した。一方で、自己共役性から生じる特異点に関して、一般の共役場の特異点とは異なる特別な扱いが必要であることについて指摘した。複数の座標系に対応する柱面共役場を大域的に矛盾なく扱うためには、このような特異点に対する適切な処理が必要であり、方法 B の今後の大きな課題である。

第5章では、本論文で提案するパネリング手法のステップ2にあたる、与えられた C-strip モデルを限られた種類の柱面パネルのみでパネリングする方法を提案した。このパネリング曲面は、第4章で示した C-strip モデルに、第3章で示した $k$ -離散柱面モデルを組み込むことでモデ

ル化され、 $k$ -cylindrical strip モデルとして定義された。この  $k$ -cylindrical strip モデルは、 $k$  種類の柱面を  $G^1$  連続に接続した柱面で構成される C-strip モデルであり、本研究が目的とするパネリング条件(\*)を満たすパネリング曲面である。 $k$ -離散柱面モデルを C-strip モデルに組み込むために、第 3 章で定義した  $k$ -離散柱面モデルに対して、離散幅に関する制約を緩和した新たな定義を導いた。与えられた C-strip モデルから、具体的に  $k$ -cylindrical strip モデルを求める問題は、第 3 章と同様に、与えられた柱面の準線を  $k$ -arc spline 曲線により近似する最適化問題として定式化された。ここでは、独立した柱面を対象とした第 3 章とは異なり、隣接する柱面間に生じる幾何学的な関係が最適化問題に組み込まれ、線織の連続性やストリップ間交線の滑らかさを考慮した最適化問題が新たに定式化された。新たに定式化された最適化問題に対して、2 つの解析モデルを用いた数値解析例を示し、関連研究で示されている型枠数の目安  $k \approx \sqrt{N}$  と同等の条件下で、近似精度の高い  $k$ -cylindrical strip モデルが得られることを示した。さらに、目的関数を構成する評価関数の重み係数に応じて、得られた最適解に 2 つのパターンが存在することを指摘した。両パターンは近似精度に関してトレードオフの関係(i.e., 面内方向の近似精度 vs. 面外方向の近似精度)にあり、設計者は重み係数の調整によりパネリング曲面に要求される性能に応じた柔軟な設計を行うことができる。また、対象とする曲面と  $k$  の値によっては、得られた  $k$ -cylindrical strip モデルからギャップのない厳密なモデルを構成できない可能性があることも指摘した。ここでは、この問題に対して 2 つの具体的な設計方針を示した。

## 謝辞

本論文は、筆者が東京大学大学院工学系研究科建築学専攻博士課程に在籍中に行った自由曲面離散化手法に関する研究成果をまとめたものである。

本論文を執筆するに当たり、多くの方々からご指導とご助言、ご協力をいただいたことに対し、ここに深く感謝の意を表す。指導教員の川口健一教授には、研究内容のみならず、建築構造に関わる多くのご指導をいただいた。川口健一教授には修士号取得の際にもご指導いただき、約7年の長い間にわたって常に貴重なご指導をいただいた。ここに深謝の意を表す。本論文の審査に際しては伊山潤准教授、寒野善博教授、館知宏准教授、横須賀洋平准教授に多くのご助言をいただくとともに本論文の細部にわたりご指導をいただいた。ここに深謝の意を表す。

筆者が博士課程在籍中に勤務した川口衛構造設計事務所の皆様には、建築構造設計に関する多くのご指導をいただいた。構造エンジニアとしての貴重な経験は本研究に少なからず影響を与えた。ここに感謝の意を表す。川口研究室の皆様には、研究室の活動を通して本研究に多くのご意見・ご助言をいただいた。ここに感謝の意を表す。

株式会社久米設計には、設計プロジェクトを通して本研究のきっかけとなる問題提起をいただいた。貴重なプロジェクトに携わる機会を与えていただいたことに感謝の意を表す。

筆者の前所属先である高松伸建築設計事務所の代表である高松伸先生には、筆者の新たな挑戦を快く承諾してくださり力強く後押ししていただいた。筆者の幾何学への深い探訪は、1本の鉛筆と1枚のトレーシングペーパーから始まったと言っても過言ではない。ここに深謝の意を表す。

最後に、筆者の挑戦を支えてくれた家族に感謝いたします。

## 文献目録

- [1] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer and A. Kilian, *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, 2007.
- [2] P. Schumacher, "The Progress Of Geometry as Design Resource," *Log*, vol. 43, pp. 105-118, 2018.
- [3] 三浦憲二郎, "3次元形状表現の基礎 -細分割曲面による形状表現-, " *設計工学*, 第 卷 39, 第 12, 2004.
- [4] 内山美之, "ザハ・ハデイド・アーキテクトの仕事 1 複雑な形状でも設計を容易に," *日経アーキテクチャー*, pp. 80-82, 2014.
- [5] 日本建築学会 シェル・空間構造運営委員会, *空間構造デザインのデジタル化とアーキテクト/エンジニアの関係*, 2016.
- [6] H. Pottmann, M. Eigensatz, A. Vaxman and J. Wallner, "Architectural Geometry," *Computer and Graphics*, vol. 47, pp. 145-164, 2015.
- [7] H. Schober, S. Plieninger, S. Justiz, D. Gebreiter and H. Tamai, *Transparent Shells: Form, Topology, Structure*, Ernst & Sohn, 2015.
- [8] M. Eigensatz, M. Deuss, A. Schiftner, M. Kilian, N. J. Mitra, H. Pottmann and M. Pauly, "Case Studies in Cost-Optimized Paneling of Architectural Freeform Surfaces," *Advances in Architectural Geometry*, pp. 49-72, 2010.
- [9] N. Baldassini, "Glazing Technology : the Hidden Side of Free-form design," *Advances in Architectural Geometry*, pp. 41-44, 2008.
- [10] M. Eigensatz, M. Kilian, A. Schiftner, N. J. Mitra and H. Pottmann, "Paneling architectural freeform surfaces," *ACM Transaction on Graphics*, vol. 29, no. 4, pp. 1-10, 2010.
- [11] D. Pellis, M. Kilian, H. Wang, C. Jiang, C. Müller and H. Pottmann, "Architectural freeform surfaces designed for cost-effective paneling through mold re-use," *Advances in Architectural Geometry*, 2020.
- [12] H. Pottmann, A. Schiftner, P. Bo, H. Schmiedhofer, W. Wang, N. Baldassini and J. Wallner, "Freeform surfaces from single curved panels," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 27, no. 3/76, pp. 1-10, 2008.
- [13] 小林昭七, *曲線と曲面の微分幾何*, 裳華房, 1995.
- [14] 梅原雅顕, 山田光太郎, *曲線と曲面-微分幾何学のアプローチ-*, 裳華房, 2015.
- [15] 宮岡礼子, *曲線と曲面の現代幾何学*, 岩波書店, 2019.
- [16] M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition*, Dover Publications, 2016.
- [17] J. Bærentzen, J. Gravesen, F. Anton and H. Aanæs, *Guide to Computational Geometry Processing*, Springer, 2012.

- [18] N. Ray, B. Vallet, W. C. Li, B. Lévy, "N-Symmetry Direction Field Design," *ACM Transactions on Graphics*, 第 卷 27, 第 2, pp. 1-13, 2008.
- [19] M. Botsch, L. Kobbelt, M. Pauly, P. Alliez and B. Levy, *Polygon Mesh Processing*, CRC Press, 2010.
- [20] K. Hormann, B. Lévy and A. Sheffer, "Mesh parameterization: theory and practice," *SIGGRAPH ASIA*, pp. 1-87, 2008.
- [21] D. Cohen-Steiner, J.-M. Morvan, "Restricted delaunay triangulations and normal cycle," *Proceedings of the nineteenth annual symposium on Computational geometry*, pp. 312-321, 2003.
- [22] B. Lévy, S. Petitjean, N. Ray and J. Maillot, "Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 21, no. 3, pp. 362-371, 2002.
- [23] K. Hormann and G. Greiner, "MIPS: An Efficient Global Parametrization Method," in *Curve and Surface Design: Saint-Malo 1999*, Vanderbilt University Press, 2000, pp. 153-162.
- [24] D. Bommers, H. Zimmer and L. kobbelt, "Mixed-Integer Quadrangulation," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 28, no. 3, pp. 1-10, 2009.
- [25] W.-C. Li, B. Vallet, N. Ray and B. Lévy, "Representing Higher-Order Singularities in Vector Fields on Piecewise Linear Surfaces," *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 12, no. 5, pp. 1315-1322, 2006.
- [26] F. De Does, M. Desbrun and Y. Tong, "Vector Field Processing on Triangle Meshes," *SIGGRAPH 2016 Course Notes*, 2016.
- [27] J. Glymph, D. Shelden, C. Ceccato, J. Mussel and H. Schober, "A parametric strategy for free-form glass structures using quadrilateral planar facets," *Automation in Construction*, vol. 13, no. 2, pp. 187-202, 2004.
- [28] H. Pottmann, A. Schiftner and J. Wallner, "Geometry of Architectural Freeform Structures," *Internationale Mathematische Nachrichten*, vol. 209, pp. 15-28, 2008.
- [29] Y. Liu, H. Pottmann, J. Wallner, Y.-L. Yang and W. Wang, "Geometric Modeling with Conical Meshes and Developable Surfaces," *ACM Transaction on Graphics*, vol. 25, no. 3, pp. 681-689, 2006.
- [30] H. Schmiedhofer, S. B. Cokcan, A. Schiftner and R. Ziegler, "Design and Panelization of Architectural Freeform-Surfaces by Planar Quadrilateral Meshes," *Advances in Architectural Geometry*, pp. 115-118, 2008.
- [31] Y. Liu, w. Xu, J. Wang, L. Zhu, B. Guo, F. Chen and G. Wang, "General planar quadrilateral mesh design using conjugate direction field," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 30, no. 6, pp. 1-10, 2011.
- [32] P. Alliez, D. Cohen-Steiner, O. Devillers, B. Lévy and M. Desbrun, "Anisotropic polygonal remeshing," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 22, no. 3, pp. 485-493, 2003.
- [33] M. Zadavec, A. Schiftner and J. Wallner, "Designing Quad-dominant Meshes with Planar Faces," *Computer Graphics Forum*, vol. 29, no. 5, pp. 1671-1679, 2010.
- [34] C. Jiang, C. Wang, E. Schling and H. Pottmann, "Computational design and optimization of quad meshes based on diagonal meshes," *Advances in Architectural Geometry*, 2020.
- [35] R. Mesnil, C. Douthe, O. Baverel and B. Leger, "Marionette Meshes: Modelling free-form architecture with planar facets," *International Journal of SPACE STRUCTURES*, pp. 1-15,

- 2017.
- [36] 貞廣渉, 横須賀洋平, 本間俊雄, "Kirchhoff シェル要素を用いた初期曲げによる木質シェル構造の形状最適化," 第60回日本建築学会九州支部研究発表会, 2021.
- [37] J. Mitani and H. Suzuki, "Making Papercraft Toys from Meshes using Strip-based Approximate Unfolding," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 23, no. 3, pp. 259-263, 2004.
- [38] I. Shatz, A. Tal and G. Leifman, "Paper Craft Models from Meshes," *The Visual Computer*, vol. 22, p. 825-834, 2006.
- [39] C. Tang, P. Bo, J. Wallner and H. Pottmann, "Interactive design of developable surfaces," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 35, no. 2, pp. 1-12, 2016.
- [40] M. Rabinovich, T. Hoffmann and O. Sorkine-hornung, "Discrete Geodesic Nets for Modeling Developable Surfaces," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 37, no. 2, pp. 1-17, 2018.
- [41] O. Stein, E. Grinspun and K. Crane, "Developability of triangle meshes," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 37, no. 4, pp. 1-14, 2018.
- [42] C. Jiang, C. Wang, F. Rist, J. Wallner and H. Pottmann, "Quad-mesh based isometric mappings and developable surfaces," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 39, no. 4, pp. 1-13, 2020.
- [43] K. Gavriil, A. Schiftner and H. Pottmann, "Optimizing B-spline surfaces for developability and paneling architectural freeform surfaces," *Computer-Aided Design*, vol. 111, pp. 29-43, 2019.
- [44] 箕三郎, "離散可積分系入門," 著: 離散可積分系・離散微分幾何学チュートリアル, 2012, pp. 27-49.
- [45] D. S. Meek and D. J. Walton, "Approximation of discrete data by G1 arc splines," *Computer-Aided Design*, vol. 24, no. 6, pp. 301-306, 1992.
- [46] 松浦望, "曲線の差分幾何," 数理解析研究所講究録別冊, 第巻 B30, pp. 053-075, 2012.
- [47] D. S. Meek and D. J. Walton, "Approximating quadratic NURBS curves by arc splines," *Computer-Aided Design*, vol. 25, no. 6, pp. 371-376, 1993.
- [48] M. K. Yeung and D. J. Walton, "Curve fitting with arc splines for NC toolpath generation," *Computer-Aided Design*, vol. 26, no. 11, pp. 845-849, 1994.
- [49] J. Hoscheck, "Circular splines," *Computer-Aided Design*, vol. 24, no. 11, pp. 611-618, 1992.
- [50] D. B. Parkinson and D. N. Moreton, "Optimal biarc-curve fitting," *Computer-Aided Design*, vol. 23, no. 6, pp. 411-419, 1991.
- [51] J. Schonherr, "Smooth biarc curves," *Computer-Aided Design*, vol. 25, no. 6, pp. 365-370, 1993.
- [52] J.-H. Yong, S.-M. Hu and J.-G. Sun, "A note on approximation of discrete data by G1 arc splines," *Computer-Aided Design*, vol. 31, pp. 911-915, 1999.
- [53] X.-D. Chen, J.-H. Yong, Q.-Q. Zheng and J.-G. Sun, "Automatic G1 arc spline interpolation for closed point set," *Computer-Aided Design*, vol. 36, pp. 1205-1218, 2004.
- [54] Y. J. Ahn, H. O. Kim and K.-Y. Lee, "G1 arc spline approximation of quadratic Bézier curves," *Computer-Aided Design*, vol. 30, no. 8, pp. 615-620, 1998.
- [55] G. Maier, "Optimal arc spline approximation," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 31, pp. 211-216, 2014.

- 
- [56] D. S. Meek and D. J. Walton, "Approximating smooth planar curves by arc splines," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 59, pp. 221-231, 1995.
- [57] C. J. Ong, Y. S. Wong, H. T. Loh and X. G. Hong, "An optimization approach for biarc curve-fitting of B-spline curves," *Computer-Aided Design*, vol. 28, no. 12, pp. 951-959, 1996.
- [58] L. A. Peigl and W. Tiller, "Biarc approximation of NURBS curves," *Computer-Aided Design*, vol. 34, pp. 807-814, 2002.
- [59] D. J. Walton and D. S. Meek, "Approximation of quadratic Bézier curves by arc splines," *Journal of Computational and applied mathematics*, vol. 54, pp. 107-120, 1994.
- [60] K. M. Bolton, "biarc curves," *Computer-Aided Design*, vol. 7, no. 2, pp. 89-92, 1975.
- [61] 田村明久 , 松村正和, 最適化法, 共立出版株式会社, 2002.
- [62] 寒野善博 , 土谷隆, 最適化と変分法, 丸善出版, 2014.
- [63] H. Yamashita, H. Yabe and t. Tanabe, "A globally and superlinearly convergent primal-dual interior point trust region method for large scale constrained optimization," *Mathematical Programming*, vol. 102, pp. 111-151, 2005.
- [64] D. Arthur and S. Vassilvitskii, "k-means++: the advantages of careful seeding," *Proceedings of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 1027-1035, 2007.
- [65] 川口健一, 一般逆行列と構造工学への応用, コロナ社, 2011.
- [66] O. Azencot, M. Ovsjanikov, F. Chazal and M. Ben-Chen, "Discrete Derivatives of Vector Fields on Surfaces - An Operator Approach," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 34, no. 3, pp. 1-13, 2015.
- [67] 柴田明德, 最新耐震構造解析(第3版), 森北出版株式会社, 2014.
- [68] J. Nocedal and S. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, 2006.
- [69] 日本建築学会, 外壁接合部の水密設計および施工に関する技術指針・同解説, 日本建築学会, 2008.
- [70] A. I. Bobenko and Y. B. Suris, *Discrete Differential Geometry*, Amer Mathematical Society, 2009.
- [71] H. Pottmann and J. Wallner, *Computational Line Geometry*, Springer, 2001.