論文の内容の要旨

論文題目　A stable homotopy version of the monopole contact invariant (安定ホモトピー版モノポールコンタクト不変量)

氏名 飯田暢生

Seiberg-Witten 方程式 [18] は, $Spin^c$ 構造が与えられた 4 次元 Riemann 多様体上定義される非線型偏微分方程式である. この方程式は 1994 年に発見されて以来, 3, 4 次元幾何学への応用が盛んに研究されてきた . Seiberg-Witten 方程式から幾何学的情報を取り出す一つのやり方として, Seiberg-Witten 不変量とよばれる閉 4 次元多様体の可微分構造の整数値不変量がある. より正確には, b^+ が 2 以上である有向閉 4 次元多様体 X に対し, X 上の $Spin^c$ 構造の各同型類に対し, 整数が定まる. ただし, 符号を確定するには X のホモロジー的向きとよばれるデータを選ぶ必要がある. この不変量は, 適切に摂動項を加えた Seiberg-Witten 方程式の解のゲージ同値類の空間 (Seiberg-Witten モジュライ空間とよばれ, 閉多様体の構造を持つ) を考え, その上のコホモロジー類を積分した値として定義される. Seiberg-Witten 方程式は, その微分幾何的な性質により, 3, 4 次元多様体の可微分構造, トポロジーにとどまらず, 多様体上の幾何構造の繊細な情報を持つことが知られている. 本研究の根幹にあるのは, この方程式が持つ 4 次元シンプレクティック構造, 3 次元コンタクト構造の情報である. Seiberg-Witten 方程式が発見された同年には, Taubes が 4 次元シンプレクティック閉多様体に対して, compatible な概複素構造を一つ固定して概 Kähler 構造を与えた上で, Seiberg-Witten 方程式が, 適切な摂動項を加えた下で, カノニカルな解を持つことを見出した [17]. その帰結である, b^+ が 2 以上である 4 次元シンプレクティック閉多様体の Seiberg-Witten 不変量の非消滅は, この不変量の基本性質の一つとみなされている. また, このことの応用として, エキゾチック 4 次元多様体の簡単な例を与えることができる.

1997 年 Kronheimer と Mrowka は, コンタクト構造が与えられた 3 次元多様体を境界に持つ 4 次元多様体に対し, Seiberg-Witten 方程式を用いた, 整数値不変量を構成した [10]. より正確には, 境界にコンタクト構造 ξ が与えられた有向コンパクト 4 次元多様体 W に対し, W 上の $Spin^c$ 構造であって境界で ξ と適合するものの各同型類に対し, 整数が, 全体の符号を除いて定まる. この不変量の構成は, W に, コーン状に広がる端 C を境界に沿って取り付けて得られる非コンパクト多様体 $W^+ = W \cup C$ 上で, 適切に摂動された Seiberg-Witten 方程式を考察することでなされる. ここで, 端 C には, コンタクト構造 ξ を用いて概 Kähler 構造が与えられており, 上述した Taubes のカノニカルな解が定まる. W^+ 上で考察する解のクラスは, 端 C においてこのカノニカルな解に漸近するものである. Kronheimer と Mrowka は, このようなクラスの解を考察する限り, 閉多様体の Seiberg-Witten 不変量の場合と類似した不変量の構成が可能であることを示した.

上述した Kronheimer と Mrowka の不変量は, 閉 4 次元多様体の Seiberg-Witten 不変量の構成を, コンタクト境界を持つ 4 次元多様体という別の幾何学的設定に対して展開したものであるという意味で, Seiberg-Witten 不変量の一つの変種である. 一方, 閉 4 次元多様体の Seiberg-Witten 不変量を精密化するという方向性として, 2000 年ごろ, Bauer-Furuta は Seiberg-Witten 不変量のホモトピー的精密化を構成した [1]. その構成は, それ以前に Furuta が 10/8 不等式とよばれる可微分 Spin 多様体の交叉形式に対する結果の証明 [2] の際に導入した, Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似という手法を用いるものである. 簡単のため, b_1 がゼロである有向閉 4 次元多様体 X を考えるとき, その Bauer-Furuta 不変量は, Seiberg-Witten モジュライ空間の次元より 1 だけ大きい次数の安定ホモトピー群の元である. ただし, ここでいう Seiberg-Witten モジュライ空間の次元は, いわゆる「形式的次元」であり, Seiberg-Witten モジュライ空間が滑らかな多様体の構造を持つとは限らない一般の b^+ に対しても定義される. また, 実際には単なる安定ホモトピー群の元というだけではなく, 十分大きな次元を持つ球面から球面への $U(1)$ 同変な写像が, $U(1)$ 作用込みの意味でのサスペンション, ホモトピーを除いて定まる. 定義域と値域の球面の次元の差が Seiberg-Witten モジュライ空間の次元と 1 ずれていることは, この $U(1)$ 作用に由来する.

2019 年, 執筆者は修士論文において, 境界にコンタクト構造を持つ, b_3 がゼロである 4 次元多様体に対し, Kronheimer-Mrowka の不変量を Bauer-Furuta の手法により精密化した不変量を構成した [3]. この不変量は, Kronheimer-Mrowka の不変量の設定における Seiberg-Witten モジュライ空間の形式的次元を次数とする安定ホモトピー群の元であり, 符号を除いて定まる. また, この設定では, 元々の Bauer-Furuta 不変量の場合と異なり, $U(1)$ 作用は存在しない. これが 0 次の安定ホモトピー群に値を持つ場合には, その写像度が Kronheimer-Mrowka の不変量を与える. この不変量の幾何学的応用として, 4 次元多様体の余次元 0 埋め込みや結び目のスライス性に関するものが執筆者と Anubhav-Mukherjee 氏, 谷口正樹氏との共同研究において与えられた [4].

Kronheimer-Mrowka の不変量は, コンタクト構造が与えられた 3 次元多様体を境界に持つ 4 次元多様体であった. この不変量は, 境界つき 4 次元多様体の情報と, 境界のコンタクト構造の情報のいわば混合物である. Seiberg-Witten モノポール Floer ホモロジー [11] は両者の情報を単離する枠組みを与える. Seiberg-Witten モノポール Floer ホモロジーは, 端的に言えば, Seiberg-Witten 不変量の (3+1)-TQFT という形式として, 境界つき 4 次元多様体に拡張したものである. 有向閉 3 次元多様体に対しては, 無限次元版 Morse ホモロジーという描像に基づき, モノポール Floer ホモロジー群とよばれる加群が定義される. 二つの有向閉 3 次元多様体の間のコボルディズムに対しては, 両者のモノポール Floer ホモロジー群の間の準同型 (コボルディズム写像) が定まり, コボルディズムの合成に対する Seiberg-Witten 不変量の振る舞いは, コボルディズム写像の合成により記述される. Kronheimer-Mrowka-Ozsváth-Szabó は, 閉 3 次元多様体 Y 上にコンタクト構造 ξ が与えられているという設定の下で, ξ の不変量として $-Y$ のモノポール Floer ホモロジー群の元を構成した [9]. これを Kronheimer-Mrowka-Ozsváth-Szabó のコンタクト不変量とよぶ. これは Kronheimer-Mrowka の不変量からコンタクト構造の情報を単離したものとみなせるものである.

一方, Seiberg-Witten モノポール Floer ホモロジーのホモトピカルな精密化が, Kronheimer-Mrowka による Seiberg-Witten モノポール Floer ホモロジーの完成に先んじて, Manolescu により与えられた [14]. これは Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型とよばれる. この枠組みは, $Spin^c$ 構造が与えられた有向閉 3 次元多様体 $(Y, \mathfrak{s})$ の不変量として, ある「空間」$SWF(Y, \mathfrak{s})$ であって, その適切なホモロジーをとるとモノポール Floer ホモロジー群を与えるようなものを与える. より正確には, ここで「空間」とよんでいるものは, ($U(1)$ 作用が与えられた基点付き空間と, 整数, 有理数) という三つ組を適切に同一視したものである. しばしばこの「空間」を単に Seiberg-Witten Floer ホモトピー型とよぶ.

また, (3+1)$Spin^c$ コボルディズム $(W, \mathfrak{s}_W) : (Y_0, \mathfrak{s}_0) \to (Y_1, \mathfrak{s}_1)$ に対しては, 境界 $(Y_0, \mathfrak{s}_0)$, $(Y_1, \mathfrak{s}_1)$ それぞれに対して定まる「空間」の間の写像がホモトピーとサスペンションを除いて定まる. 正確にはここでも $U(1)$ 作用および基点をリスペクトしたものを考えている.

特に, $(Y_0, \mathfrak{s}_0)$ として S^3 とその上の唯一つの $Spin^c$ 構造の同型類を考えることで, 境界付き 4 次元多様体の不変量が定まる. これを相対 Bauer-Furuta 不変量とよぶ. $Spin^c$ 構造が与えられた境界付き 4 次元多様体 $(W, \mathfrak{s}_W)$ に対し, その相対 Bauer-Furuta 不変量は, $U(1)$ 作用を忘れたとき, $SWF(\partial W, \mathfrak{s}_W|_{\partial W})$ の安定ホモトピー群の元である. これを,

$$BF(W, \mathfrak{s}_W) : S^0 \to SWF(\partial W, \mathfrak{s}_W|_{\partial W})$$

と書く. 定義域, 値域には適切な次元の球面のサスペンションが省略されている.

この枠組みは閉 4 次元多様体に対する Bauer-Furuta 不変量の (3+1)TQFT 化を与える. Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型の構成は, Conley 指数とよばれる, 力学系とそのある性質を満たす不変集合に対して, 空間 (正確には基点付きホモトピー型) を付随させる理論を, Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似と組み合わせることによりなされる. Manolescu が元々考察したのは b_1 がゼロである有向閉 3 次元多様体の場合であり, 後に Kronheimer-Manolescu[12] Khandhawit-Sasahira-Lin[7], [8], Sasahira-Stoffregen[16] により様々な拡張がなされた.

本博士論文では, 執筆者の修士論文の内容を発展させ, 谷口正樹氏との共同研究 [5] として, Kronheimer-Mrowka-Ozsváth-Szabó のコンタクト不変量のホモトピー版を構成した. ただし, Manolescu の元々の Seiberg-Witten Floer 安定ホモトピー型の設定の場合を考察しているため, 3 次元多様体には b_1 がゼロという仮定がつく.

この不変量の構成は, Kronheimer-Mrowka の不変量および 執筆者の修士論文の不変量の構成で用いられた, コーン状の端を持つ概 Kähler 多様体上の解析と, Manolescu により創始され, Khandhawit により精密化, 拡張がなされた相対 Bauer-Furuta 不変量の構成を組み合わせるというものである.

また, この不変量が持つべき基本性質として, この不変量と $U(1)$ 作用を忘れた相対 Bauer-Furuta 不変量の合成として, 執筆者の修士論文の不変量が再現されることを証明した. ここでは, Manolescu および Khandhawit-Sasahira-Lin の不変量の, コボルディズムの貼り合わせに対する, 不変量の合成則の議論を用いた.

定理 1. (Y, ξ) をコンタクト構造が与えられた閉 3 次元多様体であって, $b_1(Y) = 0$ であるものとする. このとき, 連続写像

$$\Psi(\xi) : S^0 \to \Sigma^{d_3(\xi,Y)+\frac{1}{2}} SWF(-Y, \mathfrak{s}_\xi)$$

が符号, ホモトピー, サスペンションを除いて定まる. また, この不変量は次の性質を持つ. W を上のような (Y, ξ) を境界に持つコンパクト有向 4 次元多様体であって, $b_1(W) = 0$ であるものとし, $\mathfrak{s}_W$ を W 上の $Spin^c$ 構造であって境界で ξ と適合するものとする. このとき, Manolescu の双対射

$$\eta : SWF(Y, \mathfrak{s}_\xi) \wedge SWF(-Y, \mathfrak{s}_\xi) \to S^0$$

について,

$$\eta \circ (BF(W, \mathfrak{s}_W) \wedge \Psi(\xi))$$

は, 符号を除いて定まる安定ホモトピー群の元として, 執筆者の修士論文の不変量 [3] に一致する.

$\diamondsuit$

ここで, $d_3(\xi, Y) \in \mathbb{Q}$ は Gompf により導入された, 平面場のホモトピー類の有理数値不変量である. これは $c_1(\xi)$ がトージョンであるときに定義される. その定義は以下である. 一般に, Y を境界にもち, ξ を complex tangency とするコンパクト概複素多様体 (X, J) がとれる. このとき,

$$d_3(\xi, Y) = \frac{1}{4}(c_1(\mathfrak{s}_J)^2 - 2\chi(X) - 3\sigma(X))$$

と定義すると, これは ξ の平面場のホモトピー類のみによる有理数となる.

この不変量の構成においては, コーン状の端を持つことによることに起因する困難と, 境界を持つことに起因する困難の二つに同時に対処する必要があった. 前者だけの場合は, Kronheimer-Mrowka[10] と執筆者の修士論文 [3] において, 後者だけの場合は Manolescuc[14], Khandhawit [6] において扱われていたが, この両者を組み合わせるには, 解析的議論を要する. 後者で用いられていた境界つきコンパクト多様体上の Hodge 分解の道具は, そのままでは今の非コンパクトな多様体には適用できないからである. コーン状の端を持つ多様体に対する Hodge 分解の理論には, Lockhart[13] や Marshall[15] によるものがあるが, 考えるべき Fredholm 性の成立/不成立の問題が多項式的な重みに依存しており, 不変量の不変性の確立や, 執筆者の修士論文の不変量との整合性の観点からは, この方法は適していないと考えられた. この困難は, 執筆者の修士論文の議論を引き継げるように重み付き Sobolev 空間を導入した上で, 境界つきコンパクト多様体上の Hodge 分解の道具を, 指数の切除公式を利用して今の状況に適用できるようにするという形で解決された.

執筆者の修士論文の不変量を再現するという上の結果, および, 執筆者の修士論文の不変量の性質の一つの応用として, 次の計算例が与えられる. S^3 はただ一つの $Spin^c$ 構造の同型類を持つ. この $Spin^c$ 構造に対し, Manolescu は

$$SWF(S^3) = S^0$$

を示した. S^3 の標準的コンタクト構造 ξ_{st} に対し,

$$d_3(\xi_{st}, S^3) = -\frac{1}{2}$$

であるから, 本論文のコンタクト不変量は

$$\Psi(\xi_{st}) : S^0 \to \Sigma^{d_3(\xi_{st}, S^3)+\frac{1}{2}} SWF(-S^3) = S^0,$$

すなわち, 0 次の安定ホモトピー群 $\pi_0^{st}(S^0) \cong \mathbb{Z}$ の元と (符号を除いて) 見なすことができる.

例 2. S^3 上の標準的コンタクト構造 ξ_{st} に対し, $\Psi(\xi_{st})$ は 0 次の安定ホモトピー群 $\pi_0^{st}(S^0) \cong \mathbb{Z}$ の生成元である.

$\diamondsuit$

計算のポイントは, D^4 上のシンプレクティック構造で, 境界 S^3 上 ξ_{st} と適合するものが存在し, それによって執筆者の修士論文の不変量が決定されることである.

同様の議論は Poincaré ホモロジー球面 $\Sigma(2,3,5)$ とその上の標準的コンタクト構造 ξ_{std} にも適用できる. 先ほどの D^4 の代わりにここでは Milnor ファイバー $-E_8$ を用いる. $\Sigma(2,3,5)$ 上の $Spin^c$ 構造の同型類もただ一つであり, Manolescu は

$$SWF(-\Sigma(2,3,5)) = S^{-2}$$

を示した. $d_3(\xi_{std}, \Sigma(2,3,5)) = 3/2$ であり, 本論文のコンタクト不変量はここでも 0 次の安定ホモトピー群 $\pi_0^{st}(S^0) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を与える.

参考文献

[1] Stefan Bauer and Mikio Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I*, Invent. Math. **155** (2004), no. 1, 1–19. MR2025298

[2] M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$-conjecture*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 3, 279–291. MR1839478

[3] Nobuo Iida, *A Bauer-Furuta type refinement of Kronheimer-Mrowka's invariant for 4-manifolds with contact boundary* (2019), available at `arXiv:1906.07938`.

[4] Nobuo Iida, Anubhav Mukherjee, and Masaki Taniguchi, *An adjunction inequality for the bauer-furuta type invariants, with applications to sliceness and 4-manifold topology* (2021), available at `arXiv:2102.02076`.

[5] Nobuo Iida and Masaki Taniguchi, *Seiberg-Witten Floer homotopy contact invariant*, Combinatrics, Geometry and Topology (2021).

[6] Tirasan Khandhawit, *A new gauge slice for the relative Bauer-Furuta invariants*, Geom. Topol. **19** (2015), no. 3, 1631–1655. MR3352245

[7] Tirasan Khandhawit, Jianfeng Lin, and Hirofumi Sasahira, *Unfolded Seiberg-Witten Floer spectra, I: Definition and invariance*, Geom. Topol. **22** (2018), no. 4, 2027–2114. MR3784516

[8] ———, *Unfolded seiberg-witten floer spectra, ii: Relative invariants and the gluing theorem* (2018), available at `arXiv:1809.09151`.

[9] P. Kronheimer, T. Mrowka, P. Ozsváth, and Z. Szabó, *Monopoles and lens space surgeries*, Ann. of Math. (2) **165** (2007), no. 2, 457–546. MR2299739

[10] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *Monopoles and contact structures*, Invent. Math. **130** (1997), no. 2, 209–255. MR1474156

[11] Peter Kronheimer and Tomasz Mrowka, *Monopoles and three-manifolds*, New Mathematical Monographs, vol. 10, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. MR2388043

[12] Peter B. Kronheimer and Ciprian Manolescu, *Periodic floer pro-spectra from the seiberg-witten equations* (2002), available at `arXiv:math/0203243`.

[13] Robert Lockhart, *Fredholm, Hodge and Liouville theorems on noncompact manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **301** (1987), no. 1, 1–35. MR879560

[14] Ciprian Manolescu, *Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type of three-manifolds with $b_1 = 0$*, Geom. Topol. **7** (2003), 889–932. MR2026550

[15] Stephen P. Marshall, *Deformations of special lagrangian submanifolds*, D.Phil. thesis (2002).

[16] Hirofumi Sasahira and Matthew Stoffregen, *Seiberg-witten floer spectra for $b_1 > 0$* (2021), available at `arXiv:2103.16536`.

[17] Clifford Henry Taubes, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 809–822. MR1306023

[18] Edward Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 769–796. MR1306021