

審査の結果の要旨

氏名 飯田 暢 生

論文提出者は提出論文においてコンタクト構造をもつ 3 次元閉コンタクト多様体に対して、Seiberg-Witten Floer ホモトピー型の安定ホモトピー群に値をもつ不変量を構成し、これが既存の不変量の精密化になっていることを示した。

Seiberg-Witten 方程式は、1994 年に見出された 4 次元 Riemann 多様体上定義される非線型偏微分方程式であり、3, 4 次元幾何学への応用が盛んに研究されてきた。Seiberg-Witten 方程式から得られる情報は、トポロジカルには 3+1 次元 TQFT の形式に定式化される。基本的な構成は、境界のある 4 次元多様体の境界に、シリンダー状の端を付け加えて 4 次元の開いた多様体を構成し、端の上でひとつの平行移動に関して不変な解を指定し、漸近挙動を統御しながら方程式の解空間を構成するものである。

論文提出者の研究は、Seiberg-Witten 理論における、次のふたつの方向への進展を背景とする。

第一に、4 次元閉多様体がシンプレクティック構造をもつ場合に、不変量が強い制約をもつことが Taubes によって示された。4 次元シンプレクティック閉多様体に対して、Seiberg-Witten 方程式が、適切な摂動項を加えた考察による。とくに、摂動された方程式が カノニカルな解を持つことを見出した。

第二に、TQFT としての Seiberg-Witten 理論が、Manolescu によって比較的弱い条件の下で精密化された。3 次元閉多様体に対してはある種の安定ホモトピー型 (Seiberg-Witten Floer ホモトピー型)、4 次元コンパクト多様体によるコボルディズムに対しては、ある種の安定ホモトピー圏における射が対応するものである。

論文提出者の研究の先行研究として、第一の方向に関して、境界のある多様体について次のふたつの関連した研究があった。

Kronheimer-Mrowka による整数値不変量 (1997 年): 3 次元閉コンタクト多様体には、それに付随してコーン状に広がる開いた 4 次元シンプレクティック多様体に対応している。境界のある 4 次元多様体の境界にコンタクト構造が与えられているとき、このコーンを付け加えて 4 次元の開いた多様体を構成し、その端の上では、摂動された方程式がカノニカルな解をもつ状況になっている。シリンダー状の端のかわりに、コーン状の

端の上で、このカノニカルな解を用いて、漸近挙動を統御しながら方程式の解空間を構成する。

Kronheimer-Mrowka-Ozsváth-Szabó によるコンタクト不変量：閉 3 次元多様体 Y 上にコンタクト構造 ξ が与えられたとき、 ξ の不変量として $-Y$ のモノポール Floer ホモロジー群の元が構成された。**Kronheimer-Mrowka** の整数値不変量は、**Seiberg-Witten** 理論の **TQFT** 構造によって、このコンタクト不変量と、通常の相対 **Seiberg-Witten** 不変量のカップリングとして得られることが示された。

論文提出者の研究は第一の方向に関するこのふたつの関連した先行研究を、第二の方向によって精密化するものである。4 次元閉多様体の **Seiberg-Witten** 不変量は、 $U(1)$ 作用の元での球面同変安定ホモトピー群の要素に精密化された。論文提出者はすでに修士論文において、**Kronheimer-Mrowka** の整数値不変量を、それと同様に $U(1)$ 作用の元での球面同変安定ホモトピー群の要素として精密化を行っていた。

主定理

$b_1=0$ を満たす閉 3 次元多様体 Y 上にコンタクト構造 ξ が与えられたとき、 ξ の不変量として $-Y$ の **Seiberg-Witten Floer** ホモトピー型の安定ホモトピー群の要素が定まり、論文提出者が修士論文において構成した不変量は、この不変量と、通常の相対 **Seiberg-Witten** 不変量の安定ホモトピー版とのカップリングとして得られる。

上の主定理を得るため具体的に考察するのは、 $Y \times [0,1]$ の片方にコーン状の端を取り付けた開多様体である。テクニカルに解決しなくてはならない第一の課題は、安定ホモトピー的な精密化は、解となっていない対象に対する非線形偏微分作用素の振る舞いを考察が必要となる点である。それと関連した第二の課題は、通常の **Floer** 理論ではシリンダー状の端を扱っていたが、コンタクト境界の状況ではコーン状の端を扱うことが必要となる点である。第三の課題は、端と同時に境界がある状況の扱いである。これらの問題の解決のため、境界つきコンパクト多様体上の **Hodge** 分解をさらにコーン状の端をあわせもつ状況に適切に拡張することが必要となった。コーン状の端をもつ多様体上の **Hodge** 分解については **Lockhart, Marshall** による既存の方法は、**Kronheimer-Mrowka** による整数値不変量の精密化の構成と直接は整合的ではないため、論文提出者は、今回の目標に関して適切な重み付き **Sobolev** 空間を導入した。

論文提出者は幾何学的構成のために、解析的手段を開発しつつ基礎的な理論構成を行っており、提出論文は、低次元トポロジーにおける重要な基盤のひとつを構成すると考えられる。よって、論文提出者 飯田暢生 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。

