論文の内容の要旨

論文題目：Convergence of some non-convex energies under various topology
(様々な位相による非凸エネルギーの収束)

氏 名：岡本　潤

本論文では，幾つかの非凸な汎関数の極限問題について考察する。本論文は全 3 章から成るが，一貫して Γ 収束の意味で汎関数の極限問題を考察している。Γ 収束を考える上では，汎関数の定義域である関数空間にどのような位相を定めて考察するのかが重要であり，汎関数に応じた適切な位相を選んで特異極限を考えることで，離散的な汎関数と連続的な汎関数の最小元のつながり，あるいは最小元の細部の形状について知ることが出来る。

第 1 章

本章では，大原エネルギーと呼ばれる結び目に対するエネルギーのランダムな離散エネルギーを与え，連続エネルギーへの局所一様収束性と離散エネルギーのコンパクト性について議論する。3 次元空間に埋め込まれた区分的滑らかな弧長 $\mathcal{L}$ の弧長パラメータで与えられた結び目 $\gamma:\mathbb{R}/\mathcal{L}\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^3$ に対する汎関数として，以下の大原エネルギーがある。

$$\mathcal{E}^{\alpha,p}(\gamma)=\int_{(\mathbb{R}/\mathcal{L}\mathbb{Z})^2}\left(\frac{1}{|\gamma(x)-\gamma(y)|^{\alpha}}-\frac{1}{\mathcal{D}(\gamma(x),\gamma(y))^{\alpha}}\right)^p dxdy.$$

ただし，$\alpha,p\in(0,\infty)$ であり，$\mathcal{D}$ は結び目の内在的距離，すなわち $\mathcal{D}(\gamma(x),\gamma(y))=\min\{\mathcal{L}-|x-y|,|x-y|\}$ である。大原エネルギーは各結び目のクラス (アンビエント・イソトピーについての同値類) に対する標準的な形状を変分的手法により定義する目的で提唱された。さらに大原エネルギーは $\alpha=2,p=1$ の場合，メビウス変換による不変性があることからメビウスエネルギーと呼ばれる。メビウスエネルギーに対する離散化はこれまでに数多く存在するが，従来の離散化では，連続エネルギーへの Γ 収束性までしか示されていない。本章ではメビウスエネルギーのみに限らず，大原エネルギーの確率変数を用いたランダムな離散近似を導入することにより，離散エネルギーの局所一様収束性，さらにはコンパクト性を示す。本章では大原エネルギーに重み ρ を付けた以下のエネルギーを導入する。

$$\mathcal{E}^{\alpha,p}_{\rho}(\gamma)=\int_{(\mathbb{R}/\mathcal{L}\mathbb{Z})^2}\left(\frac{1}{|\gamma(x)-\gamma(y)|^{\alpha}}-\frac{1}{\mathcal{D}(\gamma(x),\gamma(y))^{\alpha}}\right)^p \rho(x)\rho(y)dxdy. \tag{1}$$

さらに，$\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を確率密度関数 ρ を持つ独立同分布な $\mathbb{R}/\mathcal{L}\mathbb{Z}$ 値の確率変数列として，(1) の離散化である，ランダム大原エネルギーを以下で与える。

$$R_{n,\rho}\mathcal{E}^{\alpha,p}(\gamma)=\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\frac{1}{|\gamma(X_i)-\gamma(X_j)|^{\alpha}}-\frac{1}{\mathcal{D}(\gamma(X_i),\gamma(X_j))^{\alpha}}\right)^p.$$

本章では，連続エネルギーと離散エネルギーを比較するため，最適輸送理論に基づいた空間である TL^q 空間を導入する。本章の主結果として，ランダム大原エネルギーが通常の大原エネルギーに TL^q 空間の意味で Γ 収束すること，さらには TL^q の意味での局所一様収束，また，ランダム大原エネルギーのコンパク

ト性を示す。以下証明の概略を述べる。局所一様収束性に関しては，ランダム大原エネルギーを経験測度によるルベーグ積分と思い，経験測度 ν_n から分布測度 ν への最適輸送計画を用いて，分布測度によるルベーグ積分に変数変換をして，輸送計画写像の収束について議論する。コンパクト性に関しては，同様に最適輸送計画を用いて，連続エネルギーのコンパクト性の問題に帰着させる。　連続モデルの大原エネルギーは，分数階ソボレフノルムによる評価が知られているため，補間不等式を用いて，ソボレフノルムの一様有界性を示し，埋め込み定理によりコンパクト性を示す。

第 2 章

本章では，1 次元領域 Ω における単底型モディカ・モルトラエネルギー，および小林・ワレン・カーターエネルギーの特異極限問題を考察する。単底型モディカ・モルトラエネルギー (以下 sMM エネルギー) とは $H^1(\Omega)$ 上の汎関数で以下で与えられる。

$$\mathcal{E}^{\varepsilon}_{\mathrm{sMM}}(v) := \int_{\Omega} \left\{ \frac{\varepsilon}{2}|\nabla v|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}F(v) \right\} dx.$$

2 重底ポテンシャルを持つモディカ・モルトラエネルギーは相転移現象を記述するのに用いられるエネルギーであるが，sMM エネルギーにおけるポテンシャル F は，一点でのみ 0 となる単底ポテンシャルである。典型的なものとして $F(v) = (v-1)^2$ として与えられる。本章ではこのエネルギーを $\varepsilon \to 0$ としたときの特異極限問題を考える。sMM エネルギー単体の最小元は，自明な定数解 $v = 1$ のみしか出現しないが，このエネルギーにさらに別の積分項を足し合わせることによって，意味のある変分問題となる。本章では 1 次元領域における小林・ワレン・カーターエネルギー (以下 KWC エネルギー) の特異極限問題に応用する。KWC エネルギーとは，sMM エネルギーに重み付き全変動を足し合わせた，二変数からなる以下の汎関数

$$\mathcal{E}^{\varepsilon}_{\mathrm{KWC}}(v,u) := \mathcal{E}^{\varepsilon}_{\mathrm{sMM}}(v) + \int_{\Omega} \alpha(v)\ d\|Du\|$$

であり，$\|Du\|$ は u の全変動測度を表し，α は，与えられた非負連続関数とする。典型的なものとしては，$\alpha(v) = v^2$ で与えられる。KWC エネルギーは多結晶物質の結晶粒界のダイナミクスを記述するモデルとして導入された。KWC エネルギーの最小元の形状は，u の変動が小さい場合，単底ポテンシャルの効果により v_ε は定数 1 に近くなり，u の変動が大きい場合，α の効果により v はカスプ形状の溝が生じる。ε が 0 に漸近すると，カスプ形状が縮まり，u のジャンプ点でのみ不連続な関数に近づく。

sMM エネルギーを用いた類似の研究として，アンブロシオとトルトレーリによって与えられた，マンフォード・シャッハ型汎関数の近似汎関数 (以下 AT エネルギー) の研究がある。AT エネルギーは，KWC エネルギーと違い，u の重み付き全変動の項が，u の重み付きディリクレエネルギーとなっている。その違いにより，AT エネルギーの最小元である v_ε の最小値は 0 に漸近することが分かり，不連続点の場所の情報が分かれば，特異極限を得ることが出来る。そのため AT エネルギーの研究においては，関数空間としてルベーグ空間での収束により特異極限を捉えている。しかし，KWC エネルギーの最小元は，u の全変動エネルギーの効果により，v_ε の最小値が 0 に漸近するとは限らず，不連続点の場所の情報に加えて，さらに不連続点における値の情報が必要となる。したがって低次元の測度 0 の集合を無視してしまうようなルベーグ空間などの位相で特異極限を考察することは不十分である。

本章では「関数のグラフ収束」というより細かい位相を関数空間に導入し，Γ 収束の意味で領域 1 次元での sMM エネルギーおよび KWC エネルギーの特異極限を導出する。この特異極限として得られたエネルギー汎関数は AT エネルギーとは違い，u のジャンプの幅に対して凹である関数を最小化するという顕著な性質を持っていることも示された。

基本的な証明方針として，アンフォールディング法を用いる。アンフォールディング法とは，関数の弧長パラメータを用いて，縮む関数を「ほどく」手法である。その手法により，全変動の評価を与え，Γ 収束先を得る。

第 3 章

本章では，第 2 章で扱った sMM エネルギーおよび KWC エネルギーの多次元領域 Ω での特異極限問題を考察する。多次元領域におけるこれらのエネルギーの特異極限問題は，現実世界における多結晶構造のモデリングを扱う上では非常に重要な問題である。扱う位相は第 1 章で用いたものとは違い，球面上稠密な方向の切り口において，ほとんど全てグラフ収束する「スライス-グラフ収束」という新しい位相を導入して考察する。本章では，スライス-グラフ収束の意味で，多次元領域における sMM エネルギーおよび，KWC エネルギーの Γ 収束先を導入する。得られた特異極限エネルギーは，1 次元領域の場合と同様に，u のジャンプの幅に対して凹である重みが付いた界面の曲面積に，u の全変動エネルギーを足し合わせたものとなっている。

基本的な証明方針として，スライス法を用いる。スライス法とは，多次元領域を 1 次元領域のスライスで分解し，フビニの定理より，1 次元の問題に帰着させる方法である。多次元問題における難点として，AT エネルギーと違い，KWC エネルギーが有界であっても u のジャンプ集合と界面集合が一致するとは限らない。したがって，界面集合は一般の修正可能集合で扱う必要がある。そのため，まずは界面集合を有限個の C^1 多様体と測度ゼロ集合に近似して，さらに C^1 多様体を勾配の小さい集合に分割をする。その上で切り口が一点で交わるようにスライスする方向を選び，Γ 収束を示すための鍵となる下半不等式をスライス法により得る。また，鍵となる上半不等式を得る上での難点は，界面での v_ε の極限の値が，一般の可測関数となっている点である。そこで，可測関数を区分的定数関数に近似をし，対角線論法により上半不等式を満たす関数列を構成する。