

審査の結果の要旨

氏名 岡本 潤

本論文では、幾つかの物理的にも重要な非凸な汎関数の極限問題について考察している。本論文は全3章から成るが、一貫して Γ 収束の意味で汎関数の極限問題を適切な位相の下で考察している。

第1章では、大原エネルギーと呼ばれる結び目に対するエネルギーのランダムな離散エネルギーを与え、連続エネルギーへの局所一様収束性と離散エネルギーのコンパクト性について議論する。3次元空間に埋め込まれた区分的滑らかな弧長パラメータで与えられた結び目に対する汎関数として、大原エネルギーがある。この大原エネルギーは各結び目のクラス(アンビエント・イソトピーについての同値類)に対する標準的な形状を変分的手法により定義する目的で提唱された。さらに大原エネルギーは特別なパラメータの場合、メビウス変換による不変性があることからメビウスエネルギーと呼ばれる。メビウスエネルギーに対する離散化はこれまでに数多く存在するが、従来の離散化では、連続エネルギーへの Γ 収束性までしか示されていない。本章ではメビウスエネルギーのみに限らず、大原エネルギーの確率変数を用いたランダムな離散近似を導入することにより、離散エネルギーの局所一様収束性、さらにはコンパクト性を示す。その際連続エネルギーと離散エネルギーを比較するため、最適輸送理論に基づいた空間である TL^q 空間を導入した。これが新しい点である。

第2章では、1次元領域 Ω における単底型モディカ・モルトラエネルギー、および小林・ワレン・カーターエネルギーの特異極限問題を考察する。単底型モディカ・モルトラエネルギー(以下sMMエネルギー)とは $H^1(\Omega)$ 上で定義されたディリクレ・エネルギーと単底型ポテンシャルエネルギーの和からなる汎関数である。そこには、パラメータ ε があり、 $\varepsilon \rightarrow 0$ でポテンシャルエネルギーが無限になるようになっている。2重底ポテンシャルを持つモディカ・モルトラエネルギーは相転移現象を記述するのに用いられるエネルギーであるが、sMMエネルギーにおけるポテンシャル F は、一点でのみ0となる単

底ポテンシャルである。典型的なものとしてポテンシャルが $F(v) = (v - 1)^2$ として与えられる。本章ではこのエネルギーを $\varepsilon \rightarrow 0$ としたときの特異極限問題を考える。さらに、小林・ワレン・カーターエネルギー (以下 KWC エネルギー) の特異極限問題に応用する。KWC エネルギーとは、sMM エネルギーに重み付き全変動を足し合わせた、二変数からなる (u, v) である。それは重み v^2 がついた u の全変動と v の sMM エネルギーの和として書かれる。KWC エネルギーは多結晶物質の結晶粒界のダイナミクスを記述するモデルとして導入された。KWC エネルギーの最小元の形状は、 u の変動が小さい場合、単底ポテンシャルの効果により v は定数 1 に近くなり、 u の変動が大きい場合、重み v^2 の効果により v はカusp形状の溝が生じる。 ε が 0 に漸近すると、カusp形状が縮まり、 u のジャンプ点でのみ不連続な関数に近づく。

本章では「関数のグラフ収束」というより細かい位相を関数空間に導入し、 Γ 収束の意味で領域 1 次元での sMM エネルギーおよび KWC エネルギーの特異極限を導出する。この特異極限として得られたエネルギー汎関数はアンプロミオ・トルトレリーエネルギーとは違い、 u のジャンプの幅に対して凹である関数を密度とするという顕著な性質を持っていることも示された。

証明のために新たにアンフォールディング法を導入している。アンフォールディング法とは、関数の弧長パラメータを用いて、縮む関数を「ほどく」手法である。その手法により、全変動の評価を与え、 Γ 収束先を得る。

第 3 章では、第 2 章で扱った sMM エネルギーおよび KWC エネルギーの多次元領域 Ω での特異極限問題を考察する。多次元領域におけるこれらのエネルギーの特異極限問題は、現実世界における多結晶構造のモデリングを扱う上では非常に重要な問題である。扱う位相は第 1 章で用いたものとは違い、球面上稠密な方向の切り口において、ほとんど全てグラフ収束する「スライス-グラフ収束」という新しい位相である。本章では、スライス-グラフ収束の意味で、多次元領域における sMM エネルギーおよび、KWC エネルギーの Γ 収束先を導入する。得られた特異極限エネルギーは、1 次元領域の場合と同様に、 u のジャンプの幅に対して凹である重みが付いた界面の曲面積に、 u の全変動エネルギーを足し合わせたものとなっている。証明はスライス法によって 1 次元問題に帰着することによる。

このように申請者の博士論文は極めて先駆的であり、博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。