論文の内容の要旨

博士論文題目
Studies on semiclassical analysis and resonance theory
（半古典解析と共鳴理論の研究）

氏名 亀岡健太郎

本論文は３つの研究からなる．１つ目は離散シュレーディンガー作用素の半古典解析とアグモン・フィンスラー計量の研究，２つ目はウィグナー・フォンノイマン型のシュレーディンガー作用素の共鳴の定義と複素吸収ポテンシャル法の研究，そして３つ目はシュタルクハミルトニアンの共鳴に対する複素吸収ポテンシャル法の研究である．

離散シュレーディンガー作用素の研究では連続の半古典シュレーディンガー作用素

$$H^{\mathrm{cont}}(h) = -h^2\Delta + V(x) \quad \text{on} \quad L^2(\mathbb{R}^d)$$

を幅 h で離散化して得られる作用素

$$H(h)u(x) = -\sum_{|x-y|=h}(u(y)-u(x)) + V(x)u(x) \qquad \text{on} \quad \ell^2(h\mathbb{Z}^d)$$

を考察した．フーリエ級数論により変換するとトーラス上の半古典擬微分作用素として書ける．このことから $p(\xi,x)=\sum_{j=1}^d(2-2\cos\xi_j)+V(x)\in C^\infty(T^*\mathbb{T}^d)$ として "$\lim_{h\to 0}H(h)=p(\xi,x)$" が期待される．例えば固有値のワイル則が比較的簡単に証明される．この枠組みにおいて固有関数の指数減衰（アグモン評価）がフィンスラー計量によって記述されることを明らかにした．フィンスラー計量はリーマン計量の一般化であり大まかにいえばリーマン計量が内積で接ベクトルの長さを測るのに対してフィンスラー計量はノルムで接ベクトルの長さを測る．具体的には

$$K_x = \left\{\xi\in\mathbb{R}^d \;\middle|\; \sum_{j=1}^d \sinh^2\frac{\xi_j}{2} \le \frac{(V(x)-E)_+}{4}\right\}$$

の支持関数 $L(x,v)=\sup_{\xi\in K_x}\langle\xi,v\rangle$ が x における接ベクトル v の長さを与える．これをアグモン・フィンスラー計量と名付けた．これは C^1 曲線の長さを定め，そして２点間の（擬）距離 $d_E(x,y)$ も定める．領域 $\mathcal{G}_E=\{x\in\mathbb{R}^d|\,V(x)\le E\}$ までのこの計量での距離 $d_E(x)=d_E(x,\mathcal{G}_E)$ が領域 $\mathcal{G}_E^c$ におけるトンネル効果の指数的小ささを記述する．ポテンシャル $V\in C_b^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ は任意の $\delta>0$ に対して $\inf_{x\in\mathcal{G}_{E,\delta}^c}V(x)>E$ を満たすと仮定する．ここで $\mathcal{G}_{E,\delta}$ は $\mathcal{G}_E$ のユークリッド計量に関する δ-近傍である．この仮定のもとで次の定理が成り立つ．

定理 1. 任意の $C_0>0,\delta_0>0,\varepsilon>0$ に対して $C>0,h_0>0,0<\delta<\delta_0$ と $\chi,\tilde{\chi}\in C_b^\infty(\mathbb{R}^d;[0,1])$ で

$$\mathrm{supp}(1-\chi)\subset\mathcal{G}_{E,\delta},\ \ \mathrm{supp}\,\tilde{\chi}\subset\mathcal{G}_{E,\delta}\setminus\mathcal{G}_{E,\delta/2}$$

を満たすものおよび $\rho\in C^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}_{\ge 0})$ で $|(1-\varepsilon)d_E(x)-\rho(x)|\le\varepsilon$ を満たすものが存在して

$$\|\chi e^{\rho(x)/h}u\|_{\ell^2}\le C\|\tilde{\chi}u\|_{\ell^2}+C\|\chi e^{\rho(x)/h}(H(h)-z)u\|_{\ell^2}$$

が任意の $0<h<h_0$，$u\in\ell^2(h\mathbb{Z}^d)$，$z\in[E-C_0,E+C_0h]+i[-C_0,C_0]$ に対して成り立つ．特に $(H(h)-E)u=0$，$\|u\|_{\ell^2(h\mathbb{Z}^d)}=1$ ならば $|u(x)|\le Ce^{-((1-\varepsilon)d_E(x)-\varepsilon)/h}$．

またポテンシャルの非退化極小点における WKB 解をフィンスラー計量を用いて構成した．ポテ

ンシャル $V \in C^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ は

$$V(0)=0,\ \ \partial V(0)=0,\ \ \partial^2 V(0)>0$$

を満たすとする．実数 $E_0>0$ は $E_0=\sum_{j=1}^d \lambda_j(\alpha_j+1/2)$ を満たす $\alpha\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0}$ がただ一つ存在するようなものであると仮定する．ここで $\lambda_1,\dots,\lambda_d$ は $\frac{1}{2}\partial^2 V(0)$ の固有値の正の平方根である．$d(x)=d_0(x,0)$ をこのポテンシャルについてのエネルギー 0 における $0\in\mathbb{R}^d$ へのアグモン・フィンスラー距離とする．この設定の下で次が成り立つ．

定理 2. $E_j\in\mathbb{R}$，$j\geq 1$ と $a_j(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$，$j\geq 0$ で次を満たすものが存在する．$E(h)\sim\sum_{j=0}^\infty h^j E_j$ および $a\sim\sum_{j=0}^\infty h^j a_j$ ならば

$$(H(h)-hE(h))(a(x)e^{-d(x)/h})=r(x)e^{-d(x)/h},\ \ r(x)=\mathcal{O}(h^\infty)$$

が $0\in\mathbb{R}^d$ の近くで成り立つ．

さらに半古典でない離散シュレーディンガー作用素の固有関数の空間遠方での最良な指数減衰をフィンスラー計量的発想に基づいて証明した．$H=H(1)$ とおき $E<0$ をとる．ポテンシャル $V:\mathbb{Z}^d\to\mathbb{R}$ は $\widetilde{V}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ で

$$|\partial^\alpha \widetilde{V}(x)|\leq C_\alpha(1+|x|)^{-\theta|\alpha|},\ 0<\theta\leq 1$$

および $\underline{\lim}_{|x|\to\infty}\widetilde{V}(x)\geq 0$ を満たすものに拡張されると仮定する．$K^E=\{\xi\in\mathbb{R}^d|\,4\sum_{j=1}^d\sinh^2\frac{\xi_j}{2}\leq |E|\}$ とおき

$$\rho_E(x)=\sup_{\xi\in K^E}\langle x,\xi\rangle$$

と定める．すると次が成り立つ．

定理 3. もし $u\in\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ が $(H-E)u=0$ を満たせば任意の $\varepsilon>0$ に対して次が成り立つ．

$$|u(x)|\leq C_\varepsilon e^{-(1-\varepsilon)\rho_E(x)},\quad x\in\mathbb{Z}^d.$$

また $u_E(x)=(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d}\big(4\sum_{j=1}^d\sin^2\frac{\xi_j}{2}+|E|\big)^{-1}e^{-i\langle x,\xi\rangle}d\xi$ は $V(x)=-u_E(0)^{-1}\delta_0(x)$ の場合の固有値 E の固有関数であり上記定理が最良となる例を与える．

ウィグナー・フォンノイマン型のシュレーディンガー作用素の研究は中村周氏との共同研究に基づく．

$$P=-\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\quad\text{on}\quad L^2(\mathbb{R})$$

において $V(x)$ は振動しながら緩やかに減衰するポテンシャルで次のような形を持つとする．

仮定 1. $V(x)=\sum_{j=1}^J s_j(x)W_j(x)$，$J\in\mathbb{Z}_{>0}$．ここで $s_j\in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ は絶対収束するフーリエ級数で書ける周期 π の関数で $W_j\in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ は適当な $R_0>0$，$K>0$ に対して領域 $\{z=x+iy\mid |x|>R_0,|y|<K|x|\}$ に解析接続されそこで $|W_j(z)|\leq C|z|^{-\mu}$，$\mu>0$ を満たす．

例えば $V(x)=\frac{\sin 2x}{x}$ は上記仮定を満たす（$J=2$）．このとき $[0,\infty)\setminus\{n^2\mid n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ の適当な複素近傍 Ω が存在して次が成り立つ．

定理 4. 任意の $f,g\in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R})$ に対して行列要素 $(f,(z-P)^{-1}g)$，$\operatorname{Im}z>0$ は Ω に有理型接続される．

これにより P の共鳴の集合 $\operatorname{Res}(P)$ が重複度こみで定義される．証明はフーリエ空間における周期的な作用素の変形を導入することによりなされる．具体的にはフーリエ空間において

$\theta \in (-\pi^{-1}, \pi^{-1})$ に対して

$$\Phi_\theta(\xi) = \xi + \theta \sin(\pi\xi), \quad U_\theta f(\xi) = \Phi'_\theta(\xi)^{\frac{1}{2}} f(\Phi_\theta(\xi))$$

と定める．フーリエ変換によりフーリエ空間で考えた P を $\widetilde{P}$ と書き

$$\widetilde{P}_\theta := U_\theta \widetilde{P} U_\theta^{-1} = (\xi + \theta \sin(\pi\xi))^2 + \widetilde{V}_\theta, \quad \widetilde{V}_\theta = U_\theta \widetilde{V} U_\theta^{-1}$$

と定める．$\widetilde{V}_\theta$ が θ に関して解析接続できることを示すことが技術的に困難な部分である．ただし $V(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ の場合にはそのフーリエ変換の具体形により簡明な証明がある．

複素吸収ポテンシャル法は $P_\varepsilon = P - i\varepsilon x^2$ として次のようになる．

定理 5. Ω において重複度を込めて次が成り立つ．

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \sigma_d(P_\varepsilon) = \mathrm{Res}(P).$$

ここで $\sigma_d(P_\varepsilon)$ は P_ε の（複素）離散固有値全体である．収束の正確な意味は任意の $z \in \Omega$ に対してある $\rho_0 > 0$ が存在して任意の $0 < \rho < \rho_0$ に対してある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して任意の $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ に対して $\#\big(\sigma_d(P_\varepsilon) \cap B(z,\rho)\big) = m_z$ が成り立つというものである．ここで m_z は共鳴 z の重複度である．ただし z が共鳴でなければ $m_z = 0$ とおく．また $B(z,\rho) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| \le \rho\}$ である．複素吸収ポテンシャル法は物理化学で導入され $V \in L^\infty_{\mathrm{comp}}$ の場合に Zworski(2018) により数学的正当化がなされていた．Zworski(2018) はまた $\lim_{\varepsilon \to 0+} \sigma_d(P_\varepsilon)$ が離散的とならないようなポテンシャルを見つける問題を提起し $V(x) = \frac{\sin x}{x}$ を候補としてあげていた．その（$\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}\}$ の外での）否定的解決が定理 5 から従う．

シュタルク作用素の研究では私の修士論文の手法を使うことによりこの場合にも複素吸収ポテンシャル法を正当化できることを証明した．クーロンポテンシャルを含む自然な設定で証明できた．ここでは以下のシュタルクハミルトニアンを研究する．

$$P = -\Delta + x_1 + V(x) \;\; \text{on} \;\; L^2(\mathbb{R}^n).$$

錐を $C(K,r) = \{x \in \mathbb{R}^n | |x'| \le K(x_1 + r)\}$ と定め，補集合を $C(K,r)^c$ とかく．ここで $x' = (x_2, \ldots, x_n)$．ポテンシャルの仮定は次のものとする．

仮定 2. ポテンシャル $V(x)$ は $V = V_1 + V_{\mathrm{sing}}$ とかけ次を満たす．$V_1 \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ はある $\rho_0 \in \mathbb{R}$, $K_0 > 0$，$\delta_0 > 0$ に対して $\{x \in \mathbb{C}^n | \mathrm{Re}\, x \in C(K_0,\rho_0)^c, |\mathrm{Im}\, x| < \delta_0\}$ に解析接続されそこで $|\mathrm{Re}\, x| \to \infty$ のとき $\partial V(x) \to 0$ となる．また $\lim_{|x| \to \infty} V_1(x) = 0$．そして $V_{\mathrm{sing}} \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ は $-\Delta$-コンパクトである．

このとき $\mathrm{Im}\, z > 0$ で定義されたレゾルベントの行列要素 $(f, (z-P)^{-1} g)$, $f, g \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ は $\{z | \mathrm{Im}\, z > -\delta_0\}$ まで有理型接続される．この領域で P の共鳴の集合 $\mathrm{Res}(P)$ が重複度込みで定義される．そして $P_\varepsilon = P - i\varepsilon x^2$ として以下の定理が成り立つ．

定理 6. $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}\, z > -\delta_0\}$ において重複度を込めて次が成り立つ．

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \sigma_d(P_\varepsilon) = \mathrm{Res}(P).$$

例 1. クーロンポテンシャル $V(x) = \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{|x - R_i|}$ を考える．ここで $e_i \in \mathbb{R}$, $R_i \in \mathbb{R}^n$．ただし空間次元は $n \ge 3$ とする．このポテンシャルは仮定 2 を任意の δ_0 に対して満たす．したがって複素平面全体で

$$\mathrm{Res}(-\Delta + x_1 + \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{|x - R_i|}) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sigma_d(-\Delta + x_1 + \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{|x - R_i|} - i\varepsilon x^2)$$

が成り立つ．