論文の内容の要旨

論文題目 Studies on the Bogomolov-Sommese vanishing theorem and Du Val del Pezzo surfaces in positive characteristic
(正標数の Bogomolov-Sommese 消滅定理と Du Val del Pezzo 曲面に関する研究)

氏名 河上　龍郎

本論文では，正標数の Bogomolov-Sommese 消滅定理と Du Val del Pezzo 曲面の病理を考察する．

1. 正標数の Bogomolov-Sommese 消滅定理について

Bogomolov-Sommese 消滅定理は，Bogomolov [1] により提唱された標数 0 の代数多様体の微分形式に関する消滅定理である．

定理 1.1 (Bogomolov-Sommese 消滅定理 [5, Corollary 1.3])**.** (X, B) を標数 0 の代数閉体上定義された対数的標準射影対，D を X 上の $\mathbb{Z}$-因子とする．もし D の飯高次元 $\kappa(X, D)$ が $\kappa(X, D) > i$ を満たせば，

$$H^0(X, (\Omega_X^{[i]}(\log \lfloor B \rfloor) \otimes \mathcal{O}_X(-D))^{**}) = 0$$

が成立する．

飯高次元とは，因子の正値性の大きさを測る不変量であり，代数多様体の分類において不可欠である．また，$(-)^{**}$ は二重双対，$\Omega_X^{[i]}(\log \lfloor B \rfloor)$ は対 $(X, \lfloor B \rfloor)$ の i 次反射的微分形式のなす層を表す．対数的標準対とは，極小モデルプログラムの中で登場する特異点のクラスであり，消滅定理をこのような特異点を許した対に拡張することは応用上有用である．

定理 1.1 は，i 次反射的微分形式層 $\Omega_X^{[i]}(\log \lfloor B \rfloor)$ は，飯高次元が i より大きい階数 1 の反射的層を部分層として含まないと言い換えることができる．

「微分形式の拡張定理 ([7, Theorem 1.5])」とは，標数 0 の対数的標準対の反射的微分形式層の切断が，対数的特異点解消の微分形式層の切断に持ち上がること主張する重要な定理である．n 次元対数的 Calabi-Yau 対に定理 1.1 を適用することで，$(n+1)$ 次元の微分形式の拡張定理が得られること，及び，n 次元の微分形式の拡張定理から，$(n+1)$ 次元の Bogomolov-Sommese 消滅定理が成立することが知られている ([6, Section 9] を参照)．このため，対数的 Calabi-Yau 対上の Bogomolov-Sommese 消滅定理は，微分形式の拡張定理の証明の中で大切な役割を担っている．

また $\dim X = 2$ かつ $-K_X$ が巨大であるとき，定理 1.1 から接層の第 2 コホモロジーの消滅を示すことができ，このような X が局所-大域障害を持たないことがわかる．

この論文の Chapter 3,4 では正標数の Bogomolov-Sommese 消滅定理を考察する．これ以降特に断りがない限り，代数多様体は標数 $p > 0$ の代数閉体 k 上定義されているとする．

1.1. 正標数対数的標準曲面対上の Bogomolov-Sommese 消滅定理.

本論文の Chapter 3 では，正標数の対数的標準曲面対上の Bogomolov-Sommese 消滅定理を考察する．一般に正標数において，Bogomolov-Sommese 消滅定理は標準因子が巨大な曲面上で成立しないことが知られている．例えば，Raynaud 曲面 [17] の第 1 次微分形式層は豊富な因子を含むことがすぐにわかる．さらに，Langer [14, Section 8] は任意の素数 p に対し，標数 p の代数閉体上定義された滑らかな有理曲面 S とその上の正規単純交差な被約因子 F からなる対 (S, F) で，Bogomolov-Sommese 消滅定理が成立しないものが存在することを明らかにした．すなわち，Bogomolov-Sommese 消滅定理は滑らかな有理曲面上でも成立しない．一方で本論文では，上記の例において標数が大きい場合，対数的標準因子 $K_S + F$ が巨大であることに注目する．従ってある程度標数が大きければ，対数的標準因子が巨大でない対数的標準曲面対上で Bogomolov-Sommese 消滅定理が成立するかという問いが生じる．Chapter 3 では，この問いを肯定的に解決する．

定理 1.2. ある正整数 $p_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ があり，次が成立する．(X, B) を標数 $p > p_0$ の代数閉体上定義された対数的標準射影曲面対で，$\kappa(X, K_X + \lfloor B \rfloor) \neq 2$ とする．このとき，$\kappa(X, D) > i$ なる全ての $\mathbb{Z}$-因子 D に対して，

$$H^0(X, (\Omega_X^{[i]}(\log \lfloor B \rfloor) \otimes \mathcal{O}_X(-D))^{**}) = 0$$

が成立する．また，$\kappa(X, K_X + \lfloor B \rfloor) = -\infty$ *(resp.* $\kappa(X, K_X + \lfloor B \rfloor) = 1$*)* なら，最適な下限として $p_0 = 5$ *(resp.* $p_0 = 3$*)* とできる．

定理 1.2 を用い障害空間の消滅を示すことで，対数的射影曲面の持ち上げ可能性に関する結果を得る．

定理 1.3. ある正整数 $p_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ があり，次が成立する．X を標数 $p > p_0$ の代数閉体 k 上定義された正規射影曲面，B をその上の被約な $\mathbb{Z}$-因子，$f\colon Y \longrightarrow X$ を (X, B) の対数的特異点解消とする．さらに，次のいずれかを仮定する．

(1) $\kappa(X, K_X + B) = -\infty$.
(2) $K_X + B \equiv 0$ かつ $B \neq 0$.
(3) $\kappa(X, K_X + B) = 0$.

このとき，$(Y, f_*^{-1}B + \mathrm{Exc}(f))$ は *Witt* 環 $W(k)$ に持ち上がる．また，*(1)* か *(2)* が成立する場合は，最適な下限として $p_0 = 5$ とできる．

小平次元が非正な滑らかな射影曲面は標数 5 以上で，$W(k)$ に持ち上がることが知られているが (例えば [11, Proposition 2.6]，[15, Section 11]，[16, Proposition 11.1] などを参照)，定理 1.3 はこの対数版と見なすことができる．

定理 1.2, 1.3 の応用として，標準因子が巨大でない正規射影曲面上の小平型消滅定理を得る．

定理 1.4. ある正整数 $p_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ があり，次が成立する．X を標数 $p > p_0$ の代数閉体上定義された正規射影曲面，D をネフかつ巨大な $\mathbb{Z}$-因子とする．次のいずれかが成立するとする．

(1) $\kappa(X, K_X) \leqslant 0$.
(2) $\kappa(X, K_X) = 1$ かつ X は高々対数的標準特異点のみを持つ．

このとき，全ての $i > 0$ に対し $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + D)) = 0$ が成立する．また，$\kappa(X, K_X) = -\infty$ である *(resp. (2)* が成立する*)* とき，最適な下限として $p_0 = 5$ *(resp.* $p_0 = 3$*)* とできる．

1.2. 3 **次元大域的** F **正則多様体上の Bogomolov-Sommese 消滅定理.** Chapter 4 では，Chapter 3 の高次元化を試みる．定理 1.2 の証明は，局所的な対数的標準曲面対の分類や，高々川又対数的特異点のみを持つ Picard 数 1 の del Pezzo 曲面の分類を使うため，高次元では機能しない．一方で，筆者は [12, Theorem 1.1] の中で，定理 1.1 において，X を標数 $p > 0$ の代数閉体上定義された滑らかな 3 次元 Fano 多様体，$B = 0$，$i = 1$ とすると，同様の主張が成り立つことを証明した．この節では Fano 型の多様体に焦点を当て，弱い形の Bogomolov-Sommese 消滅定理が，Fano 型の Frobenius 分裂多様体の特殊なクラスである，大域的 F 正則多様体上で成立することを証明する．

定理 1.5. X を標数 $p > 3$ の代数閉体上定義された滑らかな 3 次元大域的 F 正則射影多様体とする．このとき $\kappa(X, D) > 1$ なる全ての $\mathbb{Z}$-因子 D に対し，

$$H^0(X, \Omega_X \otimes \mathcal{O}_X(-D)) = 0$$

が成立する．また，$p > 7$ では $\kappa(X, D) > 0$ なる $\mathbb{Z}$-因子 D で同様の消滅が成立する．

定理 1.5 の証明では，D をネフかつ巨大な場合に帰着させるため，極小モデルプログラムを使う．$p > 3$ という仮定は，この極小モデルプログラムのためのみに必要である ([8] を参照).

定理 1.6. X を標数 $p > 0$ の代数閉体上定義された大域的 F 正則射影多様体，B を X 上の被約な $\mathbb{Z}$-因子とする．また，$\dim X \geqslant 2$，(X, B) の対数的滑らかな領域の補集合が余次元 3 以上であるとする．このとき，ネフかつ巨大な全ての $\mathbb{Q}$-*Cartier* $\mathbb{Z}$-因子 D に対し，

$$H^0(X, (\Omega_X^{[1]}(\log \lfloor B \rfloor) \otimes \mathcal{O}_X(-D))^{**}) = 0$$

が成立する．

X が滑らかな場合は，Cartier 同型と Frobenius 分裂性から定理 1.6 は証明される．一般に，滑らかな多様体から極小モデルプログラムを始めても，その出力は滑らかであるとは限らない．そのため，定理 1.6 では特異点を持った多様体を扱う必要がある．X の大域的 F 正則性は，特異点を処理するために用いられる．

2. 正標数の Du Val del Pezzo 曲面の病理

Chapter 5 では，正標数の Du Val del Pezzo 曲面の病理について研究する．これは長岡大氏との共同研究である．定理 1.3, 1.4 から，$\kappa(X, K_X) = -\infty$ なる曲面 X で，小平型の消滅定理や定理 1.3 のような持ち上げ可能性を満たさないものがあることがわかる．Chapter 5 では，高々Du Val 特異点のみを持つ del Pezzo 曲面に焦点を当て，それらの病理的現象を調べる．

Du Val del Pezzo 曲面の Dynkin 型とは，その曲面の特異点の Dynkin 図形を表す．例えば，Du Val del Pezzo 曲面 X が 3 つの A_1 特異点と 1 つの D_4 特異点のみを持つとき，X の Dynkin 型は，$3A_1 + D_4$ であると言い，$\mathrm{Dyn}(X) = 3A_1 + D_4$ や $X = X(3A_1 + D_4)$ などと表す．また，定理 1.3 のような持ち上げ可能性を対数的持ち上げ可能性と呼ぶ．

定義 2.1. X を正標数の代数閉体 k 上定義された正規射影曲面とする．ある対数的特異点解消 $f\colon Y \longrightarrow X$ が存在し，$(Y, \mathrm{Exc}(f))$ が $W(k)$ に持ち上がるとき，X は対数的持ち上げ可能という．

Chapter 5 では，以下の病理的条件を研究する．

定義 2.2. 標数 $p > 0$ の代数閉体上定義された Du Val del Pezzo 曲面 X に対し，病理的条件を次のように名付ける．

- (ND) 複素数体上定義された Du Val del Pezzo 曲面であり，X と同じ Dynkin 図形，Picard 数を持つものが存在しない．
- (NB) 反標準線形系 $|-K_X|$ の全ての元が特異点を持つ．
- (NK) ある豊富な $\mathbb{Z}$-因子 A が存在し，$H^1(X, \mathcal{O}_X(K_X + A)) \neq 0$ を満たす．
- (NL) X が対数的持ち上げ可能でない．

例えば，Keel-M$^{\mathrm{c}}$Kernan [13, end of Section 9] は，7 つの A_1 特異点を持つ標数 $p = 2$ の Picard 数 1 の Du Val del Pezzo 曲面 $X(7A_1)$ を構成したが，これは (ND) を満たすことがわかる ([4, Theorem 2, Table (II)] を参照)．また，Cascini-Tanaka は [2, Proposition 4.3 (iii)] と [3, Theorem 4.2(6)] の中で，$X(7A_1)$ は (NB) と (NK) も満たすことを明らかにした．$X(7A_1)$ の反標準線形系は自由であるため，この曲面は正標数の Bertini の定理の反例である．加えて上記の Cascini-Tanaka の結果により，$X(7A_1)$ は (NL) を満たさないことも容易にわかる．

Chapter 5 では，まず次の定理を示す．

定理 2.3. *(NK)* $\Rightarrow$ *(NL)* 及び *(ND)* $\Rightarrow$ *(NL)* $\Rightarrow$ *(NB)* が成立する．

次に，定義 2.2 の条件の中で最も弱い (NB) を調べる．これには，Ito [9],[10] による有理的準楕円ファイブレーションの分類を用いる．

定理 2.4. X を標数 $p > 0$ の代数閉体上定義された *Du Val del Pezzo* 曲面であって，*(NB)* を満たすとする．このとき，以下が成立する．

(0) $K_X^2 \leqslant 2$ かつ $p = 2, 3$.
(1) $K_X^2 = 1$ かつ $p = 2$ *(resp.* $p = 3$*)* のとき，X の *Dynkin* 型は E_8, D_8, $A_1 + E_7$, $2D_4$, $2A_1 + D_6$, $4A_1 + D_4$, $8A_1$ *(resp.* E_8, $A_2 + E_6$, $4A_2$*)* のいずれかである．特に，X の *Picard* 数は 1 である．
(2) $K_X^2 = 2$ のとき，$p = 2$ となり，X の *Dynkin* 型は E_7, $A_1 + D_6$, $3A_1 + D_4$, $7A_1$ のいずれかである． 特に，X の *Picard* 数は 1 である．加えて，反標準線形系に付随する射 $\varphi_{|-K_X|}\colon X \longrightarrow \mathbb{P}_k^2$ は純非分離となる．
(3) *Dynkin* 型が $2D_4, 4A_1 + D_4$, $8A_1$ のいずれかである場合を除いて，X は同型類を除いて一意である．

まとめると，表 *1* を得る．

定理 2.3, 2.4 を元に，(ND),(NK),(NL) を満たす Du Val del Pezzo 曲面を決定する．

定理 2.5. X を標数 $p > 0$ の代数閉体上定義された *Du Val del Pezzo* 曲面とする．このとき以下が成立する．

(1) X が *(NL)* を満たすことと，$(p, \mathrm{Dyn}(X)) = (3, 4A_2)$, $(2, 4A_1 + D_4)$, $(2, 8A_1)$, $(2, 7A_1)$ となることは同値.
(2) X が *(ND)* を満たすことと，$(p, \mathrm{Dyn}(X)) = (2, 4A_1 + D_4)$, $(2, 8A_1)$, $(2, 7A_1)$ となることは同値.

表 1

次数	$K_X^2 = 1$				
Dynkin 型	E_8	$A_2 + E_6$	$4A_2$	D_8	$A_1 + E_7$
標数	$p = 2, 3$	$p = 3$		$p = 2$	
同型類の個数	1	1	1	1	1

$K_X^2 = 1$				$K_X^2 = 2$			
$2D_4$	$2A_1 + D_6$	$4A_1 + D_4$	$8A_1$	E_7	$A_1 + D_6$	$3A_1 + D_4$	$7A_1$
$p = 2$				$p = 2$			
∞	1	∞	∞	1	1	1	1

(3) X が *(NK)* を満たすことと，$(p, \mathrm{Dyn}(X)) = (2, 8A_1)$, $(2, 7A_1)$ となることは同値．

最後に，Frobenius 分裂な Du Val del Pezzo 曲面は，定義 2.2 のどの条件も満たさないことがわかる．

定理 2.6. *X を標数 $p > 0$ の代数閉体上定義された Du Val del Pezzo 曲面とする．さらに，X が Frobenius 分裂であると仮定する．このとき，$|-K_X|$ の一般元は滑らかである．さらに，$p = 2$ であれば，$|-K_X|$ の一般元は通常楕円曲線である．*

参考文献

[1] F. A. Bogomolov. Holomorphic tensors and vector bundles on projective manifolds. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 42(6):1227–1287, 1439, 1978.

[2] Paolo Cascini and Hiromu Tanaka. Smooth rational surfaces violating Kawamata-Viehweg vanishing. *Eur. J. Math.*, 4(1):162–176, 2018.

[3] Paolo Cascini and Hiromu Tanaka. Purely log terminal threefolds with non-normal centres in characteristic two. *Amer. J. Math.*, 141(4):941–979, 2019.

[4] Mikio Furushima. Singular del Pezzo surfaces and analytic compactifications of 3-dimensional complex affine space $\mathbf{C}^3$. *Nagoya Math. J.*, 104:1–28, 1986.

[5] Patrick Graf. Bogomolov-Sommese vanishing on log canonical pairs. *J. Reine Angew. Math.*, 702:109–142, 2015.

[6] Patrick Graf. Differential forms on log canonical spaces in positive characteristic. *arXiv preprint arXiv:1905.01968*, 2019.

[7] Daniel Greb, Stefan Kebekus, Sándor J. Kovács, and Thomas Peternell. Differential forms on log canonical spaces. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (114):87–169, 2011.

[8] Christopher Hacon and Jakub Witaszek. The minimal model program for threefolds in characteristic five. *arXiv preprint arXiv:1911.12895*, 2019.

[9] Hiroyuki Ito. The Mordell-Weil groups of unirational quasi-elliptic surfaces in characteristic 3. *Math. Z.*, 211(1):1–39, 1992.

[10] Hiroyuki Ito. The Mordell-Weil groups of unirational quasi-elliptic surfaces in characteristic 2. *Tohoku Math. J. (2)*, 46(2):221–251, 1994.

[11] Kazuhiro Ito. Finiteness of Brauer groups of $K3$ surfaces in characteristic 2. *Int. J. Number Theory*, 14(6):1813–1825, 2018.

[12] Tatsuro Kawakami. On Kawamata-Viehweg type vanishing for three dimensional Mori fiber spaces in positive characteristic. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 374(8):5697–5717, 2021.

[13] Seán Keel and James McKernan. Rational curves on quasi-projective surfaces. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 140(669):viii+153, 1999.

[14] Adrian Langer. The Bogomolov-Miyaoka-Yau inequality for logarithmic surfaces in positive characteristic. *Duke Math. J.*, 165(14):2737–2769, 2016.

[15] Christian Liedtke. Algebraic surfaces in positive characteristic. In *Birational geometry, rational curves, and arithmetic*, pages 229–292. Springer, 2013.

[16] Frans Oort. Lifting algebraic curves, abelian varieties, and their endomorphisms to characteristic zero. In *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, volume 46 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 165–195. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[17] M. Raynaud. Contre-exemple au “vanishing theorem” en caractéristique $p > 0$. In *C. P. Ramanujam—a tribute*, volume 8 of *Tata Inst. Fund. Res. Studies in Math.*, pages 273–278. Springer, Berlin-New York, 1978.