論文審査の結果の要旨

氏　名　河上　龍郎

正標数では小平型のコホモロジーの消滅定理は一般には成り立たたず，どのような多様体上で消滅定理が成り立つか調べることは，正標数の代数幾何学における重要な研究課題である．河上龍郎は，本論文の前半で Bogomolov-Sommese 消滅定理の成立条件について調べた．Bogomolov-Sommese 消滅定理は微分形式のベクトル束に関する消滅定理で，多様体とその上の因子の対に対して定式化される．この消滅定理は微分形式を扱う上で重要なものであるが，その成立条件は正標数ではほとんどわかっていなかった．河上はまず，3 次元大域 F 正則多様体上で Bogomolov-Sommese 消滅定理の弱形が成り立つことを証明した．大域 F 正則多様体は正標数特有の写像である Frobenius 写像の分裂を用いて定義され，消滅定理が成り立ちやすい多様体だと期待されているが，このようなベクトル束に関する消滅定理はほとんど知られておらず，大変興味深い結果である．また河上は，基礎体の標数が十分大きければ，任意の対数一般型でない対数標準曲面対上で，Bogomolov-Sommese 消滅定理が成り立つことを証明した．対数小平次元*1 が負であれば，標数は 7 以上であることが必要かつ十分であることも示した．この結果は，2 次元の場合の Bogomolov-Sommese 消滅定理がほぼ満足すべき形で得られたと評価できる．

上記の結果の応用として河上は，Witt 環への持ち上げについても研究した．Raynaud は，長さ 2 の Witt 環に持ち上げ可能な非特異曲面上で小平消滅定理が成り立つことを証明した．しかし，曲面が特異点を持つ場合には類似の主張は成り立たない．そこで河上は，正規曲面 X の対数特異点解消 $f: Y \to X$ を考え，Y と f の例外集合 $\mathrm{Exc}(f)$ の対 $(Y, \mathrm{Exc}(f))$ が Witt 環に持ち上げ可能であるとき，X は Witt 環に対数持ち上げ可能であると定義した．そしてこの概念を用いて，「正標数の非特異曲面は，小平次元が非正で標数が十分大きければ，Witt 環に持ち上げ可能である」というよく知られた事実の「対数化」に成功した．これは単なる形式的な拡張ではなく，その証明には上述の Bogomolov-Sommese 消滅定理が必要になる．この結果を使って，小平次元が負で標数が 7 以上であるような任意の正規曲面上で小平消滅定理の拡張が成り立つことも証明した．今までに知られている小平型の消滅定理はマイルドな特異点のみを許すものがほとんどだが，河上の結果は特異点に関する仮定が（正規性以外）なく，幅広い応用が期待される．

本論文の後半では，Du Val 特異点しか持たない del Pezzo 曲面（略して Du Val del Pezzo 曲面という）の正標数特有の現象が体系的に調べられている．具体的には，(ND) 複素数体上では同じ Dynkin 図形，同じ Picard 数を持つ Du Val del Pezzo 曲面は存在しない，(NL) Witt 環に対数持ち上げ不可能である，(NK) 小平型の消滅定理が成り立たない，(NB) 反標準線形系の元がすべて特異点を持つ，という Du Val del Pezzo 曲面に関する 4 つの条件に着目している．これらの条件はすべて，低標数の場合にしか起こり得ない「病的な」現象である．河上は，長岡大氏（九州大学）との共同研究において，(NK) $\Longrightarrow$ (NL)，(ND) $\Longrightarrow$ (NL) $\Longrightarrow$ (NB) という関係が成り立つことを証明した．そして，この関係を用いて，それぞれの条件を満たす Du Val del Pezzo 曲面を完全に分類した．このような体系だった病的現象の研究は今まで行われておらず，正標数特有の現象を理解する上で大変重要だと思われる．

---

*1 この要旨では，（対数）小平次元は（対数）標準因子の飯高次元を意味する．

以上の結果は，正標数のコホモロジーの消滅定理の研究，正標数特有の病的現象の研究の発展に大きく貢献する優れた業績である．共同研究者である長岡大氏からは，共同研究における河上の貢献が十分大きく，河上の博士論文の一部として提出するにふさわしいものである旨の承諾が得られている．よって，論文提出者河上龍郎は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．