論文の内容の要旨

論文題目　On the Helmholtz decomposition of vector fields with bounded mean oscillation in various domains

(諸領域における有界平均振動ベクトル場のヘルムホルツ分解)

氏　　名　顧　仲陽

本論文は第 1 章が全体の導入, 第 2 章から第 6 章が独立した論文からなる全 6 章で構成されている. 本研究の主旨を理解するため, 以下では予め先行研究の状況を説明する.

ヘルムホルツ分解は, ベクトル場の空間を発散なしのベクトル場の空間と勾配場空間との直和分解にするものであり, ナビエ－ストークス方程式の解析に基本的な役割を果たしている. 今まで多くの研究者が L^p ベクトル場 $(1 < p < \infty)$ のヘルムホルツ分解について研究を行ってきた. L^2 ベクトル場のヘルムホルツ分解は任意の領域で成立するが, p が 2 ではない場合, L^p ベクトル場のヘルムホルツ分解が成立するかどうかは領域による. Fujiwara-Morimoto (1977) の結果により, 滑らかな有界領域における L^p ベクトル場のヘルムホルツ分解が成り立つ. Simader-Sohr (1992) が変分的な手法を用いて有界及び外部領域における L^p ベクトル場のヘルムホルツ分解を証明した. 一方, Bogovskiĭ (1986) により L^p ベクトル場のヘルムホルツ分解ができない領域も存在する. p は無限大のとき, 分解に勾配場への射影は一種のリース作用素であり, L^∞ では非有界である. よって, L^∞ ベクトル場のヘルムホルツ分解は全空間でも成り立たないので, 代替えベクトル場の空間として有界平均振動ベクトル場の空間を考える必要がある. 全空間の場合には、Miyakawa (1996) がそのヘルムホルツ分解が可能であることを示した. 本論文の目的は諸領域上のヘルムホルツ分解に適切な有界平均振動ベクトル場の空間を導入し, 半空間, 有界の C^3 領域及び摂動が小さい摂動 C^3 半空間における有界平均振動ベクトル場の空間のヘルムホルツ分解を作ることである.

後の説明のため, 本研究にいつも使われているいくつの概念を先にここで紹介する. $\mu \in (0, \infty]$ に対し, 領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ で定義する関数 f の BMO 型半ノルムを

$$[f]_{BMO^\mu(\Omega)} := \sup_{B_r(x) \subset \Omega, r < \mu} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y) - f_{B_r(x)}| \, dy$$

とする. $f_{B_r(x)}$ は f が球体 $B_r(x)$ での平均を表す. $BMO^\mu(\Omega)$ 半ノルムが有限である $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ の関数全体を空間 $BMO^\mu(\Omega)$ と置く. $\nu \in (0, \infty]$ に対し, f の b^ν 半ノルムを

$$[f]_{b^\nu} := \sup_{x \in \Gamma, r < \nu} \frac{1}{r^n} \int_{B_r(x) \cap \Omega} |f(y)| \, dy$$

とする. Γ は領域 Ω の境界を表す. 空間 $BMO_b^{\mu,\nu}(\Omega)$ は空間 $BMO^\mu(\Omega)$ に属する b^ν 半ノルムが有限であるもの全体と置く. これらの定義は Bolkart-Giga (2016) にストークス半群の解析性を示す研究に始めて導入されたものである. ベクトル場の有界平均振動空間には可能な定義がい

くつかある. 例えば, すべての方向について b^ν 有限である条件を課したものとして, ベクトル場の空間 $(BMO_b^{\mu,\nu}(\Omega))^n$ が考えられる. しかしこのベクトル場の空間では Ω が半空間の場合でもヘルムホルツ分解は成立しない. 何故かというと分解で得られた発散なしのベクトル場が同じ空間 $(BMO_b^{\mu,\nu}(\Omega))^n$ に入るとは限らない. b^ν 有限である条件を全く課さないとすると半空間の場合でも, うまくいかない. よって, 本研究には次のベクトル場の空間を導入する.

$$vBMO^{\mu,\nu}(\Omega) := \{v \in (BMO^\mu(\Omega))^n \mid [\nabla d \cdot v]_{b^\nu} < \infty\}.$$

ここで $d(x) := \inf_{y\in\Gamma} |x-y|$ は点 x が境界 Γ からの距離関数である.

以下, 第 2 章から第 6 章について個別に説明する.

第 2 章　半空間上の有界平均振動ベクトル場や実ハーディベクトル場のヘルムホルツ分解

第 2 章では Miyakawa (1996) により導入された全空間上の有界平均振動ベクトル場の空間 $(BMO(\mathbf{R}^n))^n$ から対応する発散なしのベクトル場の空間へのヘルムホルツ射影 $\mathbf{P}$ を考え, 半空間から全空間への奇拡張や偶拡張と全空間から半空間への制限を用いて, ベクトル場の空間 $vBMO^{\infty,\infty}(\mathbf{R}^n_+)$ から対応する発散なしのベクトル場の空間への半空間射影 $\mathbf{P}_{\mathbf{R}^n_+}$ を定義する.　この射影 $\mathbf{P}_{\mathbf{R}^n_+}$ は $vBMO^{\infty,\infty}(\mathbf{R}^n_+)$ から自身への有界線形作用素である. また, $vBMO^{\infty,\infty}(\mathbf{R}^n_+)$ は空間 $(L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbf{R}^n_+}))^n$ に入るため, 法トレースは超関数の意味で取れる. De Rahm の定理で $(I-\mathbf{P}_{\mathbf{R}^n_+})vBMO^{\infty,\infty}(\mathbf{R}^n_+)$ が勾配場空間であることを示し, $vBMO^{\infty,\infty}(\mathbf{R}^n_+)$ のヘルムホルツ分解が導かれる.

定理 1. 半空間における有界平均振動ベクトル場 $vBMO^{\infty,\infty}(\mathbf{R}^n_+)$ のヘルムホルツ分解が成り立つ.

ベクトル場の空間 $vBMO^{\infty,\infty}(\mathbf{R}^n_+)$ の定義をまねして, 半空間上の実ハーディベクトル場の空間 $\mathbf{Y}$ を接成分が実ハーディ空間 $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)$ に属する x_n について偶の関数の半空間への制限と置き, 法成分が実ハーディ空間 $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)$ に属する x_n について偶の関数の半空間への制限と置くもので定義する. 射影 $\mathbf{P}$ も実ハーディベクトル場の空間 $(\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n))^n$ のヘルムホルツ射影であるから, 半空間射影 $\mathbf{P}_{\mathbf{R}^n_+}$ も $\mathbf{Y}$ のヘルムホルツ射影になる見込みがある. 確かに, $\mathbf{P}_{\mathbf{R}^n_+}$ は $\mathbf{Y}$ から自身への有界線形作用素でもあり, $(I-\mathbf{P}_{\mathbf{R}^n_+})\mathbf{Y}$ も勾配場空間である. しかし境界で法トレースの取り方がこの段階でわからなかったため, 本章にはただ $\mathbf{Y}$ の部分的なヘルムホルツ分解が得る. 最後にまた半空間から全空間への奇拡張や偶拡張と全空間から半空間への制限を考え, Fefferman-Stein (1972) の双対論法で $vBMO^{\infty,\infty}(\mathbf{R}^n_+)$ が $\mathbf{Y}$ の双対空間であることを証明する.

本章の結果は儀我美一教授 (東京大学) との共同研究に基づくものである.

第 3 章　有界平均振動ベクトル場の法トレース

第 3 章では領域における局所有界平均振動空間を導入し, 境界で局所有界平均振動ベク

トル場の法トレースの取り方を調べる． 領域における局所有界平均振動空間 $bmo^{\mu}_{\delta}(\Omega)$ を $BMO^{\mu}(\Omega)\cap L^1_{\mathrm{ul}}(\Gamma_\delta)$ と定義する．$L^1_{\mathrm{ul}}(\Gamma_\delta)$ は境界の δ 近傍 $\Gamma_\delta := \{x\in\Omega \,|\, d(x)<\delta\}$ 上の一様局所 L^1 空間である．Jones (1980) による一様領域 Ω 上の有界平均振動空間 $BMO^{\infty}(\Omega)$ の拡張を考え, 任意の $\epsilon>0$ に対し一様領域 Ω における局所有界平均振動空間 $bmo^{\infty}_{\infty}(\Omega)$ に属する関数を台が領域 Ω の ϵ 近傍 $\Omega_\epsilon := \Omega\cup\{x\in\mathbf{R}^n \,|\, d(x)<\epsilon\}$ に入るように拡張することができる．

境界が一様 $C^{2+\beta}$ の領域 Ω における局所有界平均振動ベクトル場の空間 $vbmo^{\mu,\nu}_{\delta}(\Omega)$ を $vBMO^{\mu,\nu}(\Omega)\cap(L^1_{\mathrm{ul}}(\Gamma_\delta))^n$ と定義する．境界で各点の近傍に正規座標を用いて, 局所的に境界を平のようにすることができる．座標変換後の近傍上の局所有界平均振動空間の拡張を考え, 局所有界平均振動空間 $bmo(\mathbf{R}^n)$ と局所実ハーディ空間 $h^1(\mathbf{R}^n)$ の双対関係により $vbmo^{\mu,\nu}_{\delta}(\Omega)$ に属するベクトル場の法トレースが取れる．

定理 2. $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ $(n\geq 2)$ を境界が一様 $C^{2+\beta}$ の領域とする．$\mu,\nu,\delta\in(0,\infty]$ とする．とある定数 $C=C(\mu,\nu,\delta,\Omega)$ が存在し, すべての $v\in vbmo^{\mu,\nu}_{\delta}(\Omega)$ に対して

$$\|v\cdot\mathbf{n}\|_{L^\infty(\Gamma)}\leq C\big(\|v\|_{vbmo^{\mu,\nu}_{\delta}(\Omega)}+\|\operatorname{div}v\|_{L^n_{\mathrm{ul}}(\Gamma_\delta)}\big)$$

が成り立つ．

本章の結果は儀我美一教授 (東京大学) との共同研究に基づくものである．

第 4 章　有界領域における有界平均振動ベクトル場のヘルムホルツ分解

第 4 章では Ω が有界 C^3 の領域の場合に有界平均振動ベクトル場の空間 $vBMO^{\mu,\nu}(\Omega)$ のヘルムホルツ分解が可能であることを証明する．第 3 章の結果により, Ω は有界 C^2 の領域のとき, ベクトル場の空間 $vBMO^{\mu,\nu}(\Omega)$ が μ,ν によらないであり, $(L^1(\Omega))^n$ に含まれることでもある．よって, 局所有界平均振動に仮定しなくても, ベクトル場の空間 $vBMO^{\mu,\nu}(\Omega)$ にはヘルダー関数を掛ける掛け算は有界線形作用素である．Ω が有界 C^2 の領域の場合, $vBMO^{\mu,\nu}(\Omega)$ に μ,ν を省略して $vBMO(\Omega)$ と表示する．

半空間の場合と異なって, 本章の手法はまず $v\in vBMO(\Omega)$ に対し $\operatorname{div}v$ が対応する体ポテンシャル q を直接作って, そして $v-\nabla q$ が満たすノイマン問題を解くということである．v に台が Ω に入る滑らかな関数 φ を掛けることにより, v を台が境界から離れる部分 $v_1=\varphi v$ と台が境界の近傍に入る部分 $v_2=(1-\varphi)v$ に分解する．$\operatorname{div}v_1$ が対応する体ポテンシャル q_1 を $\operatorname{div}v_1$ に負のラプラシアンの逆を掛けたものと置く．この q_1 は Ω で有界であり, ∇q の $vBMO$ ノルムが v の $vBMO$ ノルムで評価することができる．v_2 の拡張 $\overline{v_2}$ に, 接成分が境界について偶であり, 法成分が境界について奇である条件を課す．1 の分解を用いて拡張した $\overline{v_2}$ を有限個の台が境界のとある点 x_i の近傍に入る $v_{2,i}$ に分解する．それらの x_i の近傍に正規座標で負のラプラシアンを書き直し, $\operatorname{div}v_{2,i}$ にその逆を掛ける．$\operatorname{div}v_{2,i}$ が対応する体ポテンシャル $q_{2,i}$ をノイマン級数で作れる．$\overline{v_2}$ の接成分と法成分の奇偶性により, $\nabla q_{2,i}$ の $vBMO$ ノルムが v の $vBMO$ ノルムで評価することができる．最後にすべての $q_{2,i}$ と q_1 を合わせて $\operatorname{div}v$ が対応する体ポテ

ンシャル q が得られる.

有界領域の場合に, ノイマン問題の解はグリーン関数と境界で定義するノイマンデータの境界での畳み込み積分で表す. 境界がコンパクトであるから, この解の $vBMO$ ノルムが境界上のノイマンデータの L^∞ ノルムで評価することができる.

定理 3. $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ を有界 C^3 の領域とする. Ω における有界平均振動ベクトル場の空間 $vBMO(\Omega)$ のヘルムホルツ分解が成り立つ.

本章の結果は儀我美一教授 (東京大学) との共同研究に基づくものである.

第 5 章　領域における局所有界平均振動空間の拡張定理

第 5 章では任意の境界が一様 C^2 の領域 Ω における局所有界平均振動空間 $bmo^\infty_\infty(\Omega)$ の拡張問題を考える. Jones (1980) により, Ω における有界平均振動空間 $BMO^\infty(\Omega)$ を全体の $BMO(\mathbf{R}^n)$ に拡張できるための必要十分条件として Ω は一様領域であることが必要となる. 従って, もし Ω が柱状領域や aperture 領域みたいに無限遠方での挙動が悪い領域であると一様領域ではないため $BMO^\infty(\Omega)$ の拡張ができません. しかし局所有界平均振動空間 $bmo^\infty_\infty(\Omega)$ の場合には, Ω の境界が一様 C^2 であれば Ω が一様領域でなくても $bmo^\infty_\infty(\Omega)$ の全体 $bmo(\mathbf{R}^n)$ への拡張ができる. 本章には第 4 章に導入された境界について偶であるようにする拡張を用いて, 第 3 章にある局所有界平均振動空間 $bmo^\infty_\infty(\Omega)$ の拡張定理の結論を任意の境界が一様 C^2 の領域 Ω に一般化する. 境界について偶拡張をするためには境界の近傍に正規座標を導入する必要があるから, この論法を実現するために領域の境界に対し一様 C^2 の条件を課す.

証明のアイデアも第 4 章にあるように, $f \in bmo^\infty_\infty(\Omega)$ に対し台が領域 Ω に入る滑らかな関数 φ を掛けて, f を台が境界から離れた部分 f_1 と台が境界の近傍に入る部分 f_2 に分ける. f_2 の Ω に入る半径が十分小さいの $\rho > 0$ 以下の球体での平均振動を考える. もし球体が境界から離れたところにあるとき, f_2 はこの球体でゼロであり, 球体での平均振動もゼロである. もし球体が境界の近傍に入るとき, この球体がとある境界の正則性が球体の位置によらない有界 C^2 の領域に入る, しかもこの有界 C^2 の領域は Ω に入る. f_2 がこの球体での平均振動は第 3 章にある有界 C^2 の領域上の局所有界平均振動空間の掛け算定理で評価する. よって, f_2 は $bmo^\rho_\infty(\Omega)$ に属する. f_2 を境界について偶であるように拡張し, 拡張した $\overline{f_2}$ が $bmo^\rho_\infty(\mathbf{R}^n)$ に属する. 第 3 章により任意の領域 Ω に対して $bmo^\rho_\infty(\mathbf{R}^n) = bmo(\mathbf{R}^n)$ であるから, $\overline{f_2}$ が $bmo(\mathbf{R}^n)$ に属することが言える. f_1 のゼロ拡張が自然に $bmo(\mathbf{R}^n)$ に属するから, $\overline{f}$ を f_1 と $\overline{f_2}$ の和と置くと f の $bmo(\mathbf{R}^n)$ への拡張が得る. 更に, この拡張の台が Ω の近傍に入る.

第 6 章　摂動が小さい摂動半空間における有界平均振動ベクトル場のヘルムホルツ分解

第 6 章では第 4 章の手法を用いて, 摂動が小さい摂動 C^3 半空間における有界平均振動ベクトル場の空間のヘルムホルツ分解を考える. 有界の C^3 領域の場合とは異なって, 摂動 C^3 半空間 Ω 上の有界平均振動ベクトル場の空間 $vBMO^{\mu,\nu}(\Omega)$ は μ, ν の値により必ずしもノルム空間とは

限らない．一方, このベクトル場の空間には cut-off ができない．従って, 非有界の一様 C^3 の領域でヘルムホルツ分解に適切な有界平均振動ベクトル場の空間として $vBMO^{\mu,\nu}(\Omega) \cap (L^2(\Omega))^n$ が考えられる． このベクトル場の空間は μ, ν によらないため, μ, ν を省略してこの空間を $vBMOL^2(\Omega)$ で表す．

今しばらくは Ω を任意の境界が一様 C^3 の領域とする．Ω の境界にある任意の点 x を考え, 第 5 章により x のとある近傍 U_x に正規座標変換 F の勾配 ∇F の L^∞ ノルムは x によらずに評価できる．更に, 境界の近傍に関してとある局所有界の 1 の分解が存在して, 各分解関数 φ_i の C^1 ノルムは i によらずに評価できる．第 4 章にある体ポテンシャルを作る論法は $v \in vBMOL^2(\Omega)$ に対しそのまま使える．$\operatorname{div} v$ が対応する体ポテンシャル q は $L^\infty(\Omega)$ に属し, q の勾配が $vBMOL^2(\Omega)$ に属する．

次に Ω を摂動 C^2 の半空間と仮定する．最後に $v - \nabla q$ が満たすノイマン問題をとければ $vBMOL^2(\Omega)$ のヘルムホルツ分解が得る．境界のデータ $g \in L^\infty(\Gamma) \cap H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ に対して, g が対応する二重層ポテンシャル Pg を考える．Pg が境界上のトレースは $\frac{1}{2}g - Sg$ となる．ここの S は $L^\infty(\Gamma)$ から自身への有界線形作用素である．もし S の作用素ノルムが十分小さいとなれば, ノイマン級数 $2(I-2S)^{-1}g$ が収束し, ノイマン問題の解は $2(I-2S)^{-1}g$ が対応する一重層ポテンシャル u で作れる．摂動半空間の摂動を十分小さく取れば S の作用素ノルムは十分小さくなる．この解 u は領域 Ω で有界であり, u の勾配の $vBMO^{\infty,\infty}$ ノルムは g の L^∞ ノルムで評価する．∇u の L^2 評価を得るため境界を平らな部分と曲がっている部分に分けて考える．境界が平らな部分は半空間の境界と見なす．半空間におけるノイマン問題の解の L^2 評価が使える．境界が曲がっている部分はコンパクトであるから, この部分の L^2 評価は直接計算できる．合わせて ∇u の L^2 ノルムは g の $L^\infty \cap H^{-\frac{1}{2}}$ ノルムで評価する．

定理 4. $h \in C_0^3(\mathbf{R}^{n-1})$ とする．定数 $R_h > 0$ を選び, h の台が $n-1$ 次元の球体 $B_{R_h}(0')$ に入るようにする．固定の定数 $C_* > 0$ に対して, h は条件

$$(R_h^{n-1} + 1) \cdot \|h\|_{C^2(\mathbf{R}^{n-1})} < \frac{1}{2C_*}$$

を満たすと仮定する．摂動半空間 $\mathbf{R}_h^n$ における有界平均振動ベクトル場の空間 $vBMOL^2(\mathbf{R}_h^n)$ のヘルムホルツ分解が成り立つ．