審査の結果の要旨

氏　名　　顧　仲陽

ヘルムホルツ分解は、ベクトル場の空間を、発散なしのベクトル場の空間と勾配場の空間との直和分解であり、流体力学の基礎方程式であるナヴィエ・ストークス方程式の解析をはじめ、さまざまな現象を解析するうえでの基礎となっている。また図形の位相的形状を決めるドラム・コホモロジーを計算するうえでの基礎となる重要な分解である。2 乗可積分ベクトル場の空間については、適当な境界条件等の付帯条件の下で、任意の領域についてヘルムホルツ分解が成立する。しかし p が 2 でない p 乗可積分ベクトル場の空間については、全空間、半空間のほか滑らかな境界を持つ有界領域、外部領域などさまざまな領域について知られているが、境界が滑らかであっても、ヘルムホルツ分解が成立しない非有界領域があることがわかっている。しかし、p が無限大の場合は全空間であってもヘルムホルツ分解は成立しない。なぜならば、各空間への射影作用素はリース作用素型で、これは有界関数の空間上、有界でないからである。一方、有界平均振動関数の空間上では有界であるので、この空間を代わりに用いようとすることは自然であり、実際全空間の場合、宮川 (1990) によりヘルムホルツ分解が与えられている。

しかし、境界のある場合は、全く未知であった。本論文は境界がある場合の有界平均振動型ベクトル場の空間に対して、そのヘルムホルツ分解を与えた初めての結果である。ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 内の領域 Ω に大して、その上の有界平均振動関数全体を $\mathrm{BMO}(\Omega)$ と書く。これは、Ω 内での平均振動が有界である関数全体として定義し、必ずしも Ω での $\mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$ への拡張があるとは限らない。この空間を基にしたベクトル場の空間 $(\mathrm{BMO})^n(\Omega)$ の分解を考えたいが、半空間の場合であっても、法方向の奇拡張が必ずしも $\mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$ に入らないためにうまくいかない。そこで、法方向についてだけ境界中心の球での関数の絶対値の平均が球の位置によらずに有界という付帯条件をつける。このような条件をつけた $(\mathrm{BMO}(\Omega))^n$ の部分空間を導入し、それを $\mathrm{vBMO}(\Omega)$ と書く。

本論文では $\mathrm{vBMO}(\Omega)$ のヘルムホルツ分解を Ω が半空間、滑らかな有界領域で与えた。

また Ω が摂動半空間の場合は、空間無限大での挙動を制御する必要があるので、2 乗可積分空間との共通部分 $\mathrm{vBMO}(\Omega)$ について、ヘルムホルツ分解を与えている。手法はポテンシャル論的である。

序文である第 1 章に続く第 2 章では、半空間上での vBMO のヘルムホルツ分解を与えている。この場合は、境界に垂直な成分を奇関数的に、境界に平行な成分を偶関数的に拡張することにより全空間の問題に帰着でき、それによりヘルムホルツ分解を導出できる。なお、ハーディ空間はその相対空間が、有界平均振動関数全体になるが、ハーディ空間についてもヘルムホルツ分解を与えた。双対性についても説明している。

第 3 章では、$\mathrm{vBMO}(\Omega)$ の要素のベクトル場の法トレースについての評価を導出している。発散なしのベクトル場については、その法成分の最大値ノルムが領域での局所 $\mathrm{vBMO}(\Omega)$ のノルムで評価できることを示した。この結果は p 乗可積分ベクトル場の結果の自然な拡張となっている。方法は局所ハーディ空間と局所有界平均振動動関数の空間との双対関係に基づく。半空間の場合はこれを応用するだけで十分であるが、一般領域の場合は局所化や、正規座標により境界を真直ぐにする必要が生じてくる。

第 4 章は本論文の核心部となっている。Ω が有界領域の場合の $\mathrm{vBMO}(\Omega)$ のヘルムホルツ分解を導出している。境界は C^3 領域としている。証明はポテンシャル論的である。$\mathrm{vBMO}(\Omega)$ のベクトル場に対して $\operatorname{div} v$ の体積ポテンシャル q をうまく作り、$v-\nabla q$ を満たすラプラス方程式のノイマン問題を解くことにより、勾配場を決定する。ここで一番の困難な部分は q をどのように構成するかである。$\operatorname{div} v$ の単なるニュートンポテンシャルではその微分の BMO セミノルムは制御できても、その法トレースの有界性はわからない。vBMO セミノルムを制御しなければならないので工夫を要した。具体的には、v を局所化し、境界の一点の近傍だけに台を持つようにする。境界付近を距離関数を用いた正規座標で表し、その座標で接成分を偶関数、法成分を奇関数に拡張する。これにより構成したポテンシャルも偶奇性を保ちその vBMO ノルムを評価するという手続きである。

第 5 章は、局所有界変動関数の拡張についての考察である。第 6 章は第 3 章の結果を摂動半空間の場合に拡張したものである。申請者の博士論文は極めて先駆的であり、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。