論文の内容の要旨

論文題目　Multidimensional continued fractions and Fujiki-Oka resolutions of cyclic quotient singularities
(多次元連分数と巡回商特異点に対する藤木岡特異点解消)

氏　　名　佐藤　悠介

この論文では巡回商特異点に対して藤木岡特異点解消と呼ばれる特殊な特異点解消と多次元連分数の関係について述べる. 主な結果は以下の二点である.

- $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ の有限巡回部分群 G に対して, 商特異点 $\mathbb{C}^n/G$ の藤木岡特異点解消のクレパント性の判定.
- $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の有限巡回部分群 G に対して, $\mathbb{C}^n/G$ の完全既約な藤木岡特異点解消の例外因子と多次元連分数の一対一対応, 及びマッカイ対応の具体例の構成.

巡回商特異点と連分数のよく知られている古典的な対応は, Hirzebruch-Jung 連分数と呼ばれる負型の連分数の係数によって二次元巡回商特異点に対する極小特異点解消の例外曲線の自己交点数が与えられるというものである. この関係を足利が一般次元の巡回商特異点に拡張したものが本論文で扱う多次元連分数である. 高次元の商特異点は必ずしも極小特異点解消を持たないため, 代わりに藤木岡特異点解消を考える. これは藤木が 1974 年に定義し [4], 1984 年に岡がトーリック幾何の言葉を用いて再提唱した巡回商特異点に対する特異点解消である [5]. 特に 2 次元巡回商特異点に対する藤木岡特異点解消は極小特異点解消と一致する. 足利 [1] が導入した多次元連分数は剰余多項式と切り下げ多項式の二つから構成され, 前者が藤木岡特異点解消を統制しており後者が例外集合の交点形式の一部を与える.

一方, 二次元巡回商特異点の極小特異点解消の例外曲線と有限群 G の既約表現にはマッカイ対応と呼ばれる一対一対応がある. これはもともと $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群に対して発見されたものであるが, その後特別な既約表現との一対一対応として $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ に拡張された. 現在では商特異点の幾何と群の表現論の対応として, マッカイ対応の高次元化は様々な方法で研究されている. その一つに次の Batyrev[2] の結果がある.

命題 1. ([2]) $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ の有限部分群 G に対し商多様体 $\mathbb{C}^n/G$ がクレパント特異点解消 $Y\to\mathbb{C}^n/G$ を持つとき, Y のオイラー標数と G の共役類の個数は等しい.

したがってクレパント特異点解消の存在性は Batyrev の結果が成り立つために重要である. これに対して, 本論文では巡回商特異点に対して次の結果を与える. この結果は佐藤宏平氏との共同研究の結果である.

定理 2. 巡回商特異点の藤木岡特異点解消がクレパントになる必要十分条件は, 藤木岡特異点解消から定まる剰余多項式のすべての係数の age が 1 になることである.

これは巡回商特異点がクレパント特異点解消を持つための十分条件を与えている. また本論文では剰余多項式を使ったクレパント特異点解消を持つための必要条件も与えている.

本論文の二つ目の結果は完全既約な藤木岡特異点解消に関する結果である. 完全既約な藤木岡特異点解消は本論文で新しく定義する概念であり, 次のように定義する.

定義 3. 剰余多項式 $\mathcal{R}_*$ が任意の $i \neq j$ に対して係数 $(b_1, \ldots, b_n)/b_0$ に対して $\mathrm{GCD}(b_i, b_j) = 1$ を満たすとき, 完全既約であるという. 加えて, 藤木岡特異点解消が完全既約であるとは, 対応する剰余多項式 $\mathcal{R}_*$ が完全既約であるときをいう.

特に二次元の巡回商特異点に対する藤木岡特異点解消は必ず完全既約である. 完全既約な藤木岡特異点解消を考えるメリットは次の定理に示される.

定理 4. 上記の記号の元, $\mathbb{C}^n/G$ の藤木岡特異点解消が完全既約と仮定する. このとき剰余多項式の各係数と藤木岡特異点解消の例外因子は一対一に対応する. さらに藤木岡特異点解消は Hilbert basis 特異点解消である.

この定理から, 完全既約な藤木岡特異点解消と多次元連分数の関係が古典的な Hirzebruch-Jung 連分数と極小特異点解消の関係に類似することがわかる. 定理中の Hilbert basis 特異点解消とは Bourvier と Gonzalez-Sprinberg [3] が定義したトーリック特異点解消である. トーリック多様体 X に対し任意の特異点解消上に現れる例外因子 E を本質的因子と呼び, その例外因子が本質的因子のみであるトーリック特異点解消を Hilbert basis 特異点解消と呼ぶ. 特に 2 次元巡回商特異点の極小特異点解消及び, 一般次元の商特異点のクレパントなトーリック特異点解消は Hilbert basis 特異点解消である. したがって Hilbert basis 特異点解消はクレパント特異点解消を持たない商特異点に対してマッカイ対応を構成する上で重要である. 本論文では巡回商特異点に対して完全既約な藤木岡特異点解消のオイラー標数が群 G の共役類と一致する巡回群の構成方法を示した. これは Batyrev の結果をクレパント特異点解消以外の特異点解消に拡張したものである.

定理 5. 巡回群 $H = \frac{1}{r}(1, r-n+1)$ を $r = (n-1)k+1$ を満たすようにとる. 群 H の生成元 $h = \frac{1}{r}(a, b)$ で剰余多項式 $\mathcal{R}_*(\frac{1}{r}(a, b))$ が完全既約であると仮定する. このとき $G = \frac{1}{r}(a, b, 1, \ldots, 1) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ を採れば, $\mathbb{C}^n/G$ の藤木岡特異点解消のオイラー標数は群 G の共役類の個数すなわち r に等しい.

この定理を用いて構成できる巡回群の系列として $\frac{1}{6k+1}(1, 3, 6k-5)$-type や $\frac{1}{6k-1}(1, 3, 3k-2)$-type などがある. これらの巡回群は $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ の部分群ではないためクレパント特異点解消を持たないため Batyrev の結果に含まれない例である.

参考文献

[1] T. Ashikaga, *Multidimensional continued fractions for cyclic quotient singularities and Dedekind sums*, Kyoto J. Math. **59** (2019), no. 4, 993–1039.

[2] Victor V. Batyrev. Non-Archimedean integrals and stringy Euler numbers of log-terminal pairs. J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 1(1):5–33, 1999.

[3] C. Bouvier and G.Gonzalez-Sprinberg, *Système générateur minimal, diviseurs essentiels et G-désingularisations de variétés toriques*, Tohoku Math. J. (2) **47** (1995), no.1, 125–149.

[4] A. Fujiki, *On resolutions of cyclic quotient singularities*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **10** (1974/75), no. 1, 293–328.

[5] M. Oka, *On the resolution of hypersurface singularities*, Complex analytic singularities, 405–436, Adv. Stud. Pure Math., **8**, North-Holland, Amsterdam, 1987.