審査の結果の要旨

氏　名　佐　野　岳　人

申請者は提出論文において Khovanov ホモロジー理論とその空間的精密化を扱っている。Khovanov ホモロジーは結び目の不変量であり、Jones 多項式の「カテゴリー化」として、 Khovanov によって 2000 年に定義された二重次数付き加群である。Khovanov ホモロジーは、ゲージ理論的に構成される一種の Floer ホモロジーと、スペクトル系列によって関係することがその後の研究によって知られている。この関係の帰結として、Khovanov ホモロジーが結び目の自明化の組み合わせ的な判定を与えるほど強力であることが確立している。
Floer ホモロジーに対しては、ある制約の下で、空間的精密化が Manolescu によって構成されている。Khovanov ホモロジーに対する空間的精密化は 2014 年，Lipshitz-Sarkar によって Khovanov ホモトピー型として構成された。すなわち、Khovanov ホモトピー型は，ホモロジーを取ることで Khovanov ホモロジーを与える不変量であり、また Khovanov ホモロジーよりも真に強い不変量であることも知られている。
Khovanov ホモロジーには、連続パラメータで記述される変種が存在し、Bar-Natan ホモロジーはその一つである。Bar-Natan ホモロジーは、加群としては単純な構造をしている。しかし、フィルトレーション構造が存在し、それを用いて定義される Rasmussen 不変量 s は、結び目の交叉数に関連した深い情報を担っている。

申請者の研究は Ban-Natan ホモロジーに注目し次のふたつの方向の考察を行ったものである。

第一に、Khovanov ホモロジーの関手性の不定性の問題に、ひとつの簡明な解決を与えた。
ふたつの絡み目間のコボルディズムを与える曲面に対して，両者の Khovanov ホモロジー間の写像が組み合わせ的に構成され、その写像は曲面をアイソトピーで動かしても符号を除いて一意的に定まる。この符号の不定性を取り除き、完全に関手的な構成として改良する方法は複数しられている。申請者の研究は、この改良の新しい方法を、Ban-Natan ホモロジーの考察を利用して以下のようなアイディアによって与えた。
Khovanov ホモロジーおよびその変種は，Bar-Natan 関手によって用いて統一的に記述されることが知られている。申請者はその変種のひとつである Ban-Natan ホモロジ

一の標準ホモロジー類に関して、コボルディズムに関する振る舞いを詳しく調べ、ふたつの標準ホモロジーの符号の変化の積を結び目の図式から定まる量を用いて具体的に記述した。その記述を利用して，コボルディズムに伴う写像の符号を調整し、標準ホモロジー類の特定の一方の符号が保つようにすることが可能である。この調整は Ban-Natan ホモロジーの関手性を与えるとともに、Bar-Natan 関手に対して適用することができ，翻って、本来の Khovanov ホモロジーを含むすべての変種に対して不定性が一挙に解消される.

定理
Khovanov ホモロジーとその変種の関手の符号の不定性は、族として一様に解消される。

申請者の方法は簡明であるため普遍性をもち、この符号調整法は Khovanov ホモトピー型に対しても適用可能である。

第二に、 Khovanov ホモロジーの変種である Ban-Natan ホモロジーについて空間的精密化を構成した。
Lipshitz-Sarkar による Khovanov ホモトピー型の構成は Cohen-Jones-Segal により提唱されたフロー圏を用いる方法を用いる。本来の Khovanov ホモロジーに対応する Frobenius 代数は、生成元の間の関係式が極めて単純であり、この関係式の具体的な形が、フロー圏を用いた議論を行う上で本質的に用いられる。したがって、Khovanov ホモロジーの一般の変種に対して、この議論を拡張することはそのままでは難しい。申請者のアイディアは、変種の中のひとつである Ban-Natan ホモロジーにおいては、生成元を適切に座標変換すると、新しい生成元の間の関係式が、やはり極めて単純な形となり、積と余積がいずれも対角化されることに注目したことでさる。新しい生成元を用いると、フロー圏を用いたホモトピー型の構成が可能となる。 ハンドルスライドにより、CW スペクトラムとしてのセル構造をはじめの生成元に対応したものとする。このようにして絡み目の図式 D に対して構成される CW スペクトラム XBN (D)と書く。

定理
（１） XBN(D)の安定ホモトピー型は D の Reidemeister 変形に関して不変である
（２）. XBN (D)を構成 の被約コチェイン複体は Bar-Natan 複体 CBN (D) を与える.
特に XBN (D) のセルは CBN (D) の標準的な生成系と一対一に対応する.
（３）ℓ-成分絡み目図式 D に対して XBN (D) 2ℓ 個の標準セルのウェッジ和と同じホモトピー型をもつ。
結び目あるいは絡み目の不変量として Ban-Natan ホモロジーの加群構造に加えて、フィルトレーションが深い情報を担っていた。Ban-Natan ホモトピー型においても類似

の性格が期待される。申請者は、Ban-Natan ホモトピー型 XBN(D)の上の適切なフィルトレーションの性質を定式化し、その存在を予想として提出した。予想は未解決であるが、申請者はフィルトレーションの一部の構造の構成を与えている。

上のふたつの研究はいずれも Ban-Natan ホモロジーの研究を深めることによって Khovanov 理論に本質的な寄与を与えるものである。よって、論文提出者 佐野岳人 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。