博士論文 (要約)

論文題目　**On functoriality and spatial refinements of Khovanov homology and its variants**

(Khovanov ホモロジーとその変種の関手性および空間的精密化について)

氏名　　佐野 岳人

序文

本紙は，博士論文 “On functoriality and spatial refinements of Khovanov homology and its variants” (和訳：Khovanov ホモロジーとその変種の関手性および空間的精密化について) の要約である．論文は二つの章からなり，第一章の内容は論文 “Fixing the functoriality of Khovanov homology: A simple approach” として，2022 年 1 月 22 日に Journal of Knot Theory and Its Ramifications から出版されている [1]．第二章の内容も論文として投稿済みであり，現在は査読中である．プレプリントは [2] にある．

背景

本論文の主題は Khovanov ホモロジー理論 とその 空間的精密化 である．図 1 に Khovanov ホモロジー理論の発展と本論文究の位置付けを示す．

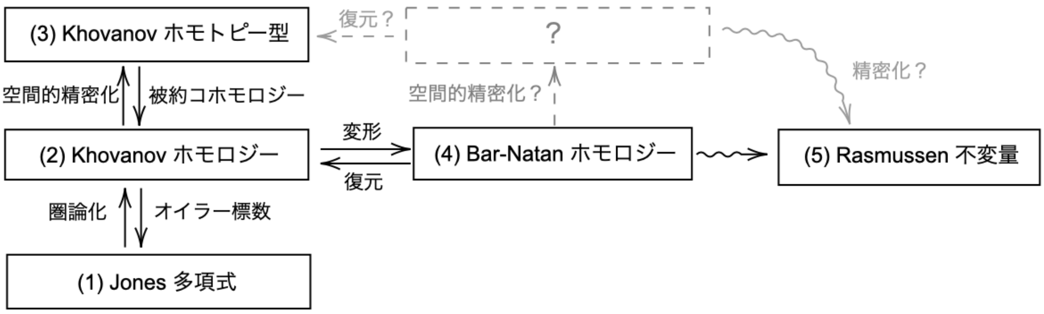

図 1　Khovanov ホモロジー理論の発展と当研究の位置づけ

(1) Jones 多項式 は 1984 年に Jones [3] が発見した結び目（絡み目）の不変量である．2000 年 に Khovanov [4] は Jones 多項式の圏論化である (2) Khovanov ホモロジー を構成した．「圏論化」とは，「集合の間の写像」として定義された不変量を「圏の間の関手」として再定式化する数学的指針のことであり，Khovanov ホモロジーはその二重次数付きオイラー標数を取ることで Jones 多項式が復元されるという意味で圏論化を与える．Khovanov ホモロジーは Jones 多項式よりも不変量として真に強く，特に Jones 多項式に対しては未解決な「結び目の自明性の判定」ができることも知られている [5, 6]．

2014 年，Lipshitz-Sarkar [7] は Khovanov ホモロジーの空間的精密化である (3) Khovanov ホモトピー型 を構成した．Khovanov ホモトピー型は CW-スペクトラムで，その被約コホモロジーが Khovanov ホモロジーを復元するもので，不変量として Khovanov ホモロジーよりも真に強い [8, 9]．Khovanov ホモロジーは Jones 多項式の代数的な圏論化，Khovanov ホモトピー型は空間的（ホモトピー論的）な圏論化と言える．

Khovanov ホモロジーにはいくつかの変種がある．(4) Bar-Natan ホモロジー はその一つであり，それを用いて整数値の結び目不変量である (5) Rasmussen 不変量 s を取り出すことができる [10, 11, 12]．s は Milnor 予想の別証明を与えたり [13]，Conway 結び目の非スライス性の判定に用いられる [14] など，従来の不変量ではアプローチが難しかった低次元トポロジーの難問への解決を与える重要な不変量である．以上 (1) - (5) を踏まえると，次の問いが自然に浮かぶ：

問 1. Khovanov ホモロジーの変種 についても空間的精密化は構成できるか？

問 2. 変種のホモトピー型を用いて s-不変量も空間的に精密化 できるか？

本論文はこれらの問いを中心に添え，二つの章を通してその解決に臨む.

1 Khovanov ホモロジーの関手性について

Khovanov ホモロジーおよびその変種は，結び目（絡み目）のコボルディズムに関して関手的に振る舞うが，そこには 符号の不定性 がある [15]．すなわち，二つの絡み目 L, L' とその間の曲面 S に対して，Khovanov ホモロジー間の写像

$$H_{Kh}(S) : H_{Kh}(L) \to H_{Kh}(L')$$

が誘導されるが，曲面のアイソトピーに関して符号が一定でない．昨年，Lipshitz-Lawson-Sarkar [16] は Khovanov ホモトピー型に対して空間レベルでも関手性が成り立つことを示したが，やはり符号の不定性がある．符号の不定性の解消については多くの先行研究があるが，いずれもオリジナルのホモロジー理論を概念的・代数的に拡張する必要がある ([17, 18, 19] など)．本論文の第一章では，従来の構成のまま 符号の不定性が解消できることを示す．この方法は空間レベルにおいてもそのまま適応可能なものである．

まず Khovanov ホモロジーおよびその変種は，Bar-Natan 関手

$$BN : Cob^4(\emptyset) \to Kob(\emptyset),$$

を用いて統一的に記述できる [20]．Khovanov ホモロジー関手 H_{Kh} は，Frobenius 代数 $A = \mathbb{Z}[X]/(X^2)$ から定まる TQFT $\mathcal{F}$ とホモロジー関手 H を用いて，$H_{Kh} = H \circ \mathcal{F} \circ BN$ と書ける．他の変種も Frobenius 代数を $A_{h,t} = \mathbb{Z}[X]/(X^2 - hX - t)$ と置き換えれば同様に得られる．従って関手 BN に対して符号の不定性が解消できれば，全ての変種に対して一様に不定性が解消できる．実際，

定理 1.1. Bar-Natan 関手 BN はコボルディズム写像の符号を適切に調整することで，アイソトピーに関して（符号の不定性なく）不変にできる．従って Khovanov ホモロジーおよびその変種も同様にアイソトピー不変にできる．

この定理の証明の鍵となるのは， 標準ホモロジー類 (canonical classes) のコボルディズムに関する振る舞いである．これを記述するためには Khovanov ホモロジーではなく，その変種である Bar-Natan ホモロジーに注目する必要がある．Bar-Natan ホモロジー関手 H_{BN} は，上記の構成の元で Frobenius 代数 $A_{1,0} = \mathbb{Z}[X]/(X^2 - X)$ によって与えられる（$H_{BN} = H \circ \mathcal{F}_{1,0} \circ BN$）．結び目 K に対して標準ホモロジー類 $\alpha(K), \beta(K)$ が存在し，Bar-Natan ホモロジーはそれを基底として

$$H_{BN}(K) \cong \mathbb{Z}\alpha(K) \oplus \mathbb{Z}\beta(K) \tag{1.1}$$

と書ける．（ℓ-成分絡み目 L の場合は 2^ℓ 個の標準ホモロジー類 $\alpha(L, o)$ が存在し，$H_{BN}(L)$ の基底となる.）

著者は過去の論文 [21] において，標準ホモロジー類のコボルディズムに関する振る舞いを詳しく調べた．特に $\alpha(K), \beta(K)$ の符号の変化の積は，結び目の図式から定まる量を用いて具体的に記述できることを示した．その記述を用いれば，片方の $\alpha(K)$ の符号が不変となるように写像の符号を調整することができる．この調整は関手 BN に対しても行えるので，こうして一様に不定性が解消されるのである．

2　Bar-Natan ホモロジーの空間的精密化について

Lipshitz-Sarkar は Cohen-Jones-Segal [22] により提唱された「フロー圏を用いた Floer ホモトピー型の構成方法」に従って Khovanov ホモトピー型を構成した．より正確には，結び目の図式 D に対して CW-スペクトラム $\mathcal{X}_{Kh}(D)$ を構成し，(i) その被約胞体複体が Khovanov 複体を与えること，(ii) その安定ホモトピー型が Reidemeister 変形に関して不変であることを示した．この構成を他の変種に対しても適用するために Frobenius 代数を $A_{0,0} = \mathbb{Z}[X]/(X^2)$ から $A_{h,t} = \mathbb{Z}[X]/(X^2 - hX - t)$ に置き換えると，生成系の間の関係が複雑になり元の議論が通らなくなる．このため 問 1 は未解決であった [23, Question 9].

さて，前節で Bar-Natan ホモロジーは 標準ホモロジー類 を用いて具体的に記述できることを述べた．その証明には，Frobenius 代数 $A_{1,0}$ の ($\mathbb{Z}$ 上の) 基底として $\{1, X\}$ の代わりに $\{X,\ Y = X - 1\}$ を取ることで $A_{1,0}$ の演算（積と余積）が対角化されることを用いる．本論文の第二章のアイディアは，この議論を空間レベルで行うことで Bar-Natan ホモロジーの空間的精密化を構成することである．

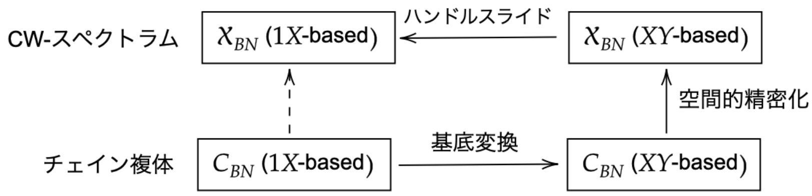

図 2　Bar-Natan スペクトラム構成の手順

構成の概略は 図 2 に示す通り，(i) Bar-Natan 複体 C_{BN} の XY-based な生成系を取り，(ii) Cohen-Jones-Segal 構成を用いてフロー圏に持ち上げ，(iii) そのフロー圏に対して「ハンドルスライド」を行い $1X$-based な生成系を復元する．こうして得られた CW-スペクトラム $\mathcal{X}_{BN}$ に対して，次が成り立つ：

定理 2.1. 絡み目の図式 D に対して，CW-スペクトラム $\mathcal{X}_{BN}(D)$ の被約コチェイン複体は Bar-Natan 複体 $C_{BN}(D)$ を与える．特に $\mathcal{X}_{BN}(D)$ のセルの集合は $C_{BN}(D)$ の標準的な生成系と一対一に対応する．

定理 2.2. 結び目図式 D に対して，$\mathcal{X}_{BN}(D)$ は二つの標準セル $\sigma_\alpha(D), \sigma_\beta(D)$ を用いて，

$$\mathcal{X}_{BN}(D) \simeq \sigma_\alpha(D) \vee \sigma_\beta(D) \tag{2.1}$$

と表せる．特に $\mathcal{X}_{BN}(D)$ の安定ホモトピー型は結び目の不変量である．（D が ℓ-成分絡み目図式の場合 $\mathcal{X}_{BN}(D)$ は 2^ℓ 個の標準セルのウェッジ和となり，同様の主張が成り立つ.）

ここで (2.1) の両辺に被約コホモロジー関手 $\widetilde{H}$ を適用すれば直ちに Bar-Natan ホモロジーの構造定理 (1.1) が復元される．こうして Bar-Natan ホモロジーの空間的精密化は得られたが，(2.1) は $\mathcal{X}_{BN}$ 自体からは結び目（絡み目）に対する新しい情報は何も得られないことも示している．このことは代数レベルでも同様であり， Bar-Natan ホモロジーから s-不変量などの情報を取り出すには 量子フィルトレーション が必要となる．本研究の今後の課題は，量子フィルトレーションを空間レベルにも持ち上げる ことである：

予想 1. $\mathcal{X}_{BN}$ はフィルター付き CW-スペクトラムとホモトピー同値であり，定理 2.1 の対応の元で C_{BN} の量子フィルトレーションの持ち上げとなっている．

$\mathcal{X}_{BN}$ にフィルトレーションを定める上で障碍となるものは何か．複体レベルでの定義と同様に $\mathcal{X}_{BN}$ の各セルに対して量子次数を割り当てることはできるが，ハンドルスライドの影響で量子次数を増加させるようなセルの貼り合わせが多く生じてしまい，これがフィルトレーションの導入を阻むのである．現在，部分的には次のことが分かっている：

命題 2.3. $\mathcal{X}_{BN}$ はある変形（ホモトピー同値写像）によって，定理 2.1 の関係を保ったまま，次元の差が 1 のセルの間では量子次数を増加させるような貼り合わせが存在しないようにできる．

予想 1 を肯定的に解決するには，この障碍を全ての次元のセル間で解消することが必要となる．最後に，問 2 に対する答えの可能性として，予想 1 が正しければ s-不変量の コホモトピー的精密化 も得られることを述べる．まず結び目 K に対して $s(K)$ は標準ホモロジー類 $\alpha(K)$ を用いて，

$$s(K) = \mathrm{gr}_q(\alpha(K)) + 1$$

と定義される．ただし gr_q は $\mathbb{Q}$-上の Bar-Natan ホモロジー $H_{BN}(K;\mathbb{Q})$ に誘導される量子次数である．もし 予想 1 が正しければ，$\mathcal{X}_{BN}$ の安定コホモトピー群 $\pi^*(\mathcal{X}_{BN})$ にも量子次数が誘導され，標準セルに対応する 標準コホモトピー類 $p_\alpha(K)$ を用いて，

$$\bar{s}(K) = \mathrm{gr}_q(p_\alpha(K)) + 1$$

と定義できる．代数レベルの議論を辿ることで，$\bar{s}$ は s が持つ重要な性質を満たすことが示せる：

命題 2.4. 予想 1 が成り立つと仮定して，$\bar{s}(K)$ は次の性質を満たす：

1. $\bar{s}$ は結び目コンコーダンスに関して不変である．
2. $|\bar{s}(K)| \leq 2g_4(K)$.
3. K が正の結び目の場合，$\bar{s}(K) = 2g(K) = 2g_4(K)$.

ここで $g(K), g_4(K)$ はそれぞれ K の種数，スライス種数である．

特に性質 3. から Milnor 予想の再証明が得られる．ここで $\bar{s}(K)$ の定義をさらに一般化して，一般コホモロジー理論 h^* を与えるごとに不変量 $s(K;h^*)$ を定義することもできる（特に $h^* = \widetilde{H}(-;\mathbb{Q})$ の場合が従来の s となる）．この拡張によって，s よりも良いスライス種数の評価が得られたり，s では捉えられなかった結び目の非スライス性を判定できる可能性も期待できる．

参考文献

[1] Taketo Sano. "Fixing the functoriality of Khovanov homology: A simple approach". In: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* (Jan. 2022).

[2] Taketo Sano. *A Bar-Natan homotopy type.* 2021. arXiv: `2102.07529 [math.GT]`.

[3] V. F. R. Jones. "Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials". In: *Ann. of Math. (2)* 126.2 (1987), pp. 335–388.

[4] Mikhail Khovanov. "A categorification of the Jones polynomial". In: *Duke Math. J.* 101.3 (2000), pp. 359–426.

[5] Dror Bar-Natan. "On Khovanov's categorification of the Jones polynomial". In: *Algebr. Geom. Topol.* 2 (2002), pp. 337–370.

[6] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. "Khovanov homology is an unknot-detector". In: *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 113 (2011), pp. 97–208.

[7] Robert Lipshitz and Sucharit Sarkar. "A Khovanov stable homotopy type". In: *J. Amer. Math. Soc.* 27.4 (2014), pp. 983–1042.

[8] Robert Lipshitz and Sucharit Sarkar. "A Steenrod square on Khovanov homology". en. In: *J. Topol.* 7.3 (Mar. 2014), pp. 817–848.

[9] Cotton Seed. "Computations of the Lipshitz-Sarkar Steenrod Square on Khovanov Homology". In: (Oct. 2012). arXiv: `1210.1882 [math.GT]`.

[10] Jacob Rasmussen. "Khovanov's invariant for closed surfaces". In: *arXiv Mathematics e-prints*, math/0502527 (Feb. 2005), math/0502527. arXiv: `math/0502527 [math.GT]`.

[11] Marco Mackaay, Paul Turner, and Pedro Vaz. "A remark on Rasmussen's invariant of knots". In: *J. Knot Theory Ramifications* 16.3 (2007), pp. 333–344.

[12] Robert Lipshitz and Sucharit Sarkar. "A refinement of Rasmussen's S-invariant". In: *Duke Math. J.* 163.5 (2014), pp. 923–952.

[13] Jacob Rasmussen. "Khovanov homology and the slice genus". In: *Invent. Math.* 182.2 (Nov. 2010), pp. 419–447.

[14] Lisa Piccirillo. "The Conway knot is not slice". In: *Ann. Math.* 191.2 (2020), pp. 581–591.

[15] Magnus Jacobsson. "An invariant of link cobordisms from Khovanov homology". In: *Algebr. Geom. Topol.* 4.2 (Dec. 2004), pp. 1211–1251.

[16] Tyler Lawson, Robert Lipshitz, and Sucharit Sarkar. *Homotopy functoriality for Khovanov spectra*. 2021. arXiv: `2104.12907 [math.GT]`.

[17] David Clark, Scott Morrison, and Kevin Walker. "Fixing the functoriality of Khovanov homology". In: *Geom. Topol.* 13.3 (2009), pp. 1499–1582.

[18] Christian Blanchet. "An oriented model for Khovanov homology". In: *J. Knot Theory Ramifications* 19.2 (2010), pp. 291–312.

[19] Pierre Vogel. "Functoriality of Khovanov homology". In: *J. Knot Theory Ramifications* 29.4 (2020), pp. 2050020, 66.

[20] Dror Bar-Natan. "Khovanov's homology for tangles and cobordisms". In: *Geom. Topol.* 9 (2005), pp. 1443–1499.

[21] Taketo Sano. "A description of Rasmussen's invariant from the divisibility of Lee's canonical class". en. In: *J. Knot Theory Ramif.* 29.06 (May 2020), p. 2050037.

[22] Ralph L Cohen, John D S Jones, and Graeme B Segal. "Floer's infinite dimensional Morse theory and homotopy theory". In: *The Floer memorial volume*. Springer, 1995, pp. 297–325.

[23] Robert Lipshitz and Sucharit Sarkar. "Spatial refinements and Khovanov homology". In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. II. Invited lectures*. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018, pp. 1153–1173.