論文の内容の要旨

論文題目　Inverse problems for hyperbolic partial differential equations with time-dependent coefficients
(時間依存する係数を持つ双曲型偏微分方程式の逆問題)

氏　　名　髙 瀬 裕 志

第一部　一階双曲型方程式

第一章　非退化双曲型方程式

主要部に時間依存する係数 $A^0 \in C^1(\overline{Q}) \cap L^\infty(\Omega \times (0,\infty))$, $A \in C^2(\overline{Q};\mathbb{R}^d)$ 及び低階項に時間依存する係数 $p \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega))$ を持つ一階の双曲型偏微分方程式

$$A^0(x,t)\frac{\partial}{\partial t}u + A(x,t)\cdot\nabla u + p(x,t)u = R(x,t)f(x) \tag{1}$$

に対する初期値境界値問題を考察する．但し $d \in \mathbb{N}$, $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ をリプシッツ境界を持つ有界領域，$Q := \Omega \times (0,T)$ とし，$R \in H^1(0,T;L^\infty(\Omega))$, $f \in L^2(\Omega)$ とする．さらに非退化性，すなわち $\min_{(x,t)\in\overline{Q}} |A(x,t)| > 0$ かつ $\min_{(x,t)\in\overline{Q}} A^0(x,t) > 0$ を仮定する．(1) は，時間依存する速度場における保存則を記述する方程式である．これまで (1) に関する逆問題は [5] により係数が時間に依存しない，つまり $A^0 \equiv 1$ かつ $A = A(x)$ かつ $p = p(x)$ の場合に，f を決定する波源項決定逆問題及び p を決定する低階項係数決定逆問題に対して局所ヘルダー型安定性のみならず大域リプシッツ型安定性が証明されている．更に同じ設定で [1] により A を決定する主要部の係数決定逆問題に対して局所ヘルダー型安定性が証明されている．しかしながら，上述の結果はいずれも時間依存しない係数を持つ方程式に対する結果であるため (1) に直接適用することはできない．そこで本章では [2] の内容に基づき，A の時間依存性に対する仮定 (1.5)[1]の下で，(1) に対し Q の片側境界における解のディリクレデータから未知関数 $f \in L^2(\Omega)$ を大域的に決定する波源項決定逆問題及び未知関数 $p \in L^\infty(\Omega)$ を決定する低階項係数決定逆問題，さらに $(A^0, A) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C^2(\overline{\Omega};\mathbb{R}^d)$ を決定する主要部の係数決定逆問題に対し，大域リプシッツ型安定性を証明した．証明では重み付き L^2 エネルギー評価であるカーレマン評価を確立することが重要なステップとなる．そのために (1) の主要部の係数に含まれるベクトル値関数 A に対し，ある程度正則性を持つ距離関数が定義できる積分曲線が存在するような散逸性 (dissipative) という概念を定義し，A が生成する積分曲線を重み付き関数に採用することで大域カーレマン評価を確立した．この積分曲線は A が時間に依存しない場合は特性曲線に一致する．本章では散逸性を有するベクトル値関数 A の例及び散逸性を持たない例についても提示した．ベクトル値関数が考えている領域において，いつ散逸的になるのかについての分類問題は今後の研究課題である．

[1]以下，式番号 (·.·) は論文の式番号と対応

第二章　対称双曲型方程式

$\mathbb{M}^{\ell\times\ell}$ を $\ell\in\mathbb{N}$ 次実正方行列全体の集合とする．ℓ 次実対称行列全体の集合 $\mathrm{Sym}_\ell := \{X\in\mathbb{M}^{\ell\times\ell} \mid X^\mathsf{T} = X\}$ に値をとる関数 $A^\mu = (A^\mu_{ij})_{1\le i,j\le \ell}\in C^1(L;\mathrm{Sym}_\ell)$ 及び $p\in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(M;\mathbb{M}^{\ell\times\ell}))$ を係数に持つ ℓ 元連立対称双曲型偏微分方程式

$$\sum_{\mu=0}^{n} A^\mu(t,x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}u + p(t,x)u = R(t,x)f(x) \tag{2}$$

に対する初期値境界値問題を考察する．但し $n\in\mathbb{N}$, $T>0$, M を滑らかな境界を持つ向き付け可能で滑らかな n 次元コンパクト多様体，$L:=[0,T]\times M$ とし，$R\in H^1(0,T;L^\infty(M;\mathbb{M}^{\ell\times\ell}))$, $f\in L^2(M;\mathbb{R}^\ell)$ とする．一階の連立方程式は弾性体の運動を記述する方程式として知られているのみならず，波動方程式に適切な変数変換を施すことにより導かれ，より広いクラスの双曲型偏微分方程式を解析する上で重要な位置づけにある．一般に低階項が連立する弱連立方程式に対してはカーレマン評価が容易に得られることが知られているが，(2) のように主要部が連立する強連立方程式に対してはカーレマン評価を導出する一般論は知られていない．そこで [4] に基づき，二階の偏微分方程式に用いられる手法である第二パラメーターを，一階の方程式である (2) に対し導入することでこれまで強連立方程式に対して未確立であったカーレマン評価を確立した．さらに本章では [4] で確立したカーレマン評価を応用し，A^μ の時間依存性に対する仮定 (2.3) の下で，L の片側境界における解のディリクレデータから未知ベクトル値関数 $f\in L^2(M;\mathbb{R}^\ell)$ を M 全体で決定する波源項決定逆問題に対し大域リプシッツ型安定性を証明した．$n+1$ 次元多様体 L 上の幾何解析によりユークリッド空間よりさらに統一的な視点から強連立方程式に対する解析を遂行し，微分形式に対するポアンカレの補題を用いて多様体の位相的性質と関連する，カーレマン評価成立のための十分条件を与えた．

第三章　退化双曲型方程式

主要部に時間依存し退化する係数 $H\in C([0,T];\mathbb{R}^d)$ を持つ一階の双曲型偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u + H(t)\cdot\nabla u = 0 \tag{3}$$

に対するコーシー問題を考察する．退化型方程式として特に $H(0)=0$ を仮定する．コーシーデータは $\partial\Omega\times(0,T)$ 上で与えるものとし，$d\in\mathbb{N}$ として $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ は滑らかな境界を持つ有界領域，$T>0$ は与えられた定数とする．$\min_{t\in[0,T]}|H(t)|>0$ を満たす非退化型方程式に対しては [1] によりカーレマン評価を基盤として $\partial\Omega\times(0,T)$ におけるコーシーデータから $u(\cdot,t)$ を $[0,T]$ 上で決定する可観測性評価が証明されている．[1] におけるカーレマン評価の証明ではこの非退化性が本質的であり，さらに本論文第一章においては非退化型方程式を対象としているため，これらの手法は (3) に直接は適用できない．そこで本章では [3] に基づき，H の退化性を利用し時間負方向への奇拡張を行い u を偶拡張することで解及び係数の正則性を保ったままコーシー問題を時間負方向へ拡張し，時間局所的なカーレマン評価を確立した．さらにエネルギー評価とカーレマン評価を組み合わせることでこの時間局所性を延長し，[1] で提示された $[0,T]$ を分割する手法を用いることなく時間大域的な可観測性評価を証明した．本手法が退化型方程式だけでなく [1] で扱われている非退化型方程式に対しても有効であることも証明した．

第二部　二階双曲型方程式

第四章　ローレンツ多様体上の波動方程式

低階項に行列値をとる係数 $a \in W^{2,\infty}(-T,T;L^\infty(M;\mathbb{M}^{\ell\times\ell}))$ を持つローレンツ多様体上の $\ell \in \mathbb{N}$ 元連立波動方程式

$$\Box_g h + a(t,x)h = S(t,x)f(x) \tag{4}$$

に対する中間値境界値問題を考察する．但し $T > 0$, M を滑らかな境界を持つ向き付け可能で滑らかな $n \in \mathbb{N}$ 次元コンパクト多様体，$L := [-T,T]\times M$ とし，$\Box_g = \sum_{\mu,\nu=0}^n g^{\mu\nu}(t,x)(\partial_\mu\partial_\nu - \sum_{\rho=0}^n \Gamma^\rho_{\mu\nu}(t,x)\partial_\rho)$ は滑らかなローレンツ計量 $g = \sum_{\mu,\nu=0}^n g_{\mu\nu}(t,x)dx^\mu \otimes dx^\nu$ に対するラプラス–ベルトラミ作用素, $S \in W^{2,\infty}(-T,T;L^\infty(M;\mathbb{M}^{\ell\times\ell}))$, $f \in L^2(M;\mathbb{R}^\ell)$ とする．ここで $(g^{\mu\nu})_{0\le\mu,\nu\le n} = (g_{\mu\nu})^{-1}_{0\le\mu,\nu\le n}$ とする．したがって (4) は低階項だけでなく主要部の係数 $g^{\mu\nu}$ も時間に依存する方程式である．(4) は一般相対性理論におけるアインシュタイン方程式を線型化することで得られる重力波の伝搬を記述する連立方程式として知られている．さらに場の理論におけるヤン–ミルズ方程式にローレンツゲージを固定することで，接続形式に対する (4) のような連立波動方程式が得られることが知られている．本章では [9] に基づき L の片側境界における解のノイマンデータから未知関数 $f \in L^2(M;\mathbb{R}^\ell)$ を決定する波源項決定逆問題に対し局所ヘルダー型安定性を証明した．主要部の係数が時間に依存する二階双曲型偏微分方程式に対する逆問題は，ユークリッド空間上において [6] により考察されてきたが，逆問題理論の基盤となるカーレマン評価の確立のための主要部の係数に関する仮定が完全には解明されていない状況であった．そこで本章では関数に作用する作用素 $\Box_g = \sum_{\mu=0}^n \nabla^\mu\nabla_\mu$ の構造に着目しローレンツ多様体上の幾何解析を遂行することで，多様体の断面曲率に関する幾何学的性質を仮定し局所カーレマン評価を確立した．この幾何学的な仮定は座標の取り方に依らず，二階双曲型偏微分方程式に対する逆問題のみならず一意接続性をはじめとした重要な解析学的性質を保証する十分条件である．この十分条件が成り立たない場合を第六章で考察する．

第五章　一次元サン-ブナン方程式

一次元サン-ブナン方程式と呼ばれる浅水波に関する方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u + a\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u = R(x,t)f(x) \tag{5}$$

に対する初期値境界値問題を考察する．ここで $a > 0$ は定数とする．一般に本論文第四章で考察した (4) の型を持つ二階双曲型偏微分方程式に対しては，係数の時間依存性のため未知関数 f を領域全体で決定する波源項決定逆問題に対し大域リプシッツ型安定性は確立されていない．これは逆問題理論の根幹を担うカーレマン評価を証明する上で必要となる重み関数の取り方が，(4) のような一般的な方程式に対しては確立されていないことが理由の一つであると考えられる．本章ではその第一歩として，[8] に基づきこの重み関数を具体的に選択することでカーレマン評価を確立した．さらに境界における解のノイマンデータから波源項 f を決定する波源項決定逆問題に対し，時間負方向で解の正則性を保つ軸対称な拡張を施すことで大域リプシッツ型安定性を証明した．この結果は，係数が部分的であれ解析的であれば逆問題の大域リプシッツ型安定性が従うことを示唆している．より一般的な (4) のような型を持つ双曲型偏微分方程式に対する逆問題の大域リプシッツ型安定性を証明することは今後の課題である．

第六章　非一意解の構成

低階項に時間依存する係数 V を持つ二次元波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \Delta u + V(x,t)u = 0 \tag{6}$$

に対するコーシー問題を考察する．もし V が時間方向に対して解析的であれば，任意の非特性曲面においてコーシーデータを与えたとき，その近傍で一意接続性が成り立つことが [11] により知られている．しかし V に解析性がなく単に滑らかな場合，コーシーデータを $\partial B_1 \times \mathbb{R}$ で与え外部方向にコーシー問題を考えたとき，解の一意接続性が成り立つことは保証されていない．但し $r > 0$ に対し $B_r := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < r\}$ とする．さらに本コーシー問題の設定は，第四章で提示したカーレマン評価を保証する十分条件を満たさない．実際に V が滑らかなとき一意接続性が成り立たないことが [7] において具体的な非一意解を一つ構成することにより明らかにされている．そこで本章では [10] に基づきコーシー問題を満たし遠方で波数の異なる無限個の滑らかな非一意解 u と滑らかな V で $\operatorname{supp} u = (\mathbb{R}^2 \setminus B_1) \times \mathbb{R}$ かつ $\operatorname{supp} V \subset (B_2 \setminus B_1) \times \mathbb{R}$ を満たす組を，ベッセル関数の漸近解析を用い具体的に構成した．この構成は二次元シュレディンガー方程式 $-i\partial_t u - \Delta u + V(x,t)u = 0$ のコーシー問題に対する非一意解の構成にも適用可能であることも示した．

参考文献

[1] P. Cannarsa, G. Floridia, F. Gölgeleyen, and M. Yamamoto. Inverse coefficient problems for a transport equation by local Carleman estimate. *Inverse Problems*, 35(10):22pp, 2019.

[2] G. Floridia and H. Takase. Inverse problems for first-order hyperbolic equations with time-dependent coefficients. *Journal of Differential Equations*, 305:45–71, 2021.

[3] G. Floridia and H. Takase. Observability inequalities for degenerate transport equations. *Journal of Evolution Equations*, 21(4):5037–5053, 2021.

[4] G. Floridia, H. Takase, and M. Yamamoto. A Carleman estimate and an energy method for a first-order symmetric hyperbolic system. *arXiv:2110.12465*.

[5] F. Gölgeleyen and M. Yamamoto. Stability for some inverse problems for transport equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 48(4):2319–2344, 2016.

[6] D. Jiang, Y. Liu, and M. Yamamoto. Inverse source problem for the hyperbolic equation with a time-dependent principal part. *Journal of Differential Equations*, 262(1):653–681, 2017.

[7] H. Kumano-go. On an example of non-uniqueness of solutions of the Cauchy problem for the wave equation. *Proc. Japan Acad.*, 39:578–582, 1963.

[8] H. Takase. Inverse source problem related to one-dimensional Saint-Venant equation. *to appear in Applicable Analysis*, page DOI:10.1080/00036811.2020.1727893.

[9] H. Takase. Inverse source problem for a system of wave equations on a Lorentzian manifold. *Communications in Partial Differential Equations*, 45(10):1414–1434, 2020.

[10] H. Takase. Infinitely many non-uniqueness examples for Cauchy problems of the two-dimensional wave and Schrödinger equations. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 97(7):45–50, 2021.

[11] D. Tataru. Unique continuation for solutions to pde's; between Hörmander's theorem and Holmgren's theorem. *Communications in Partial Differential Equations*, 20(5-6):855–884, 1995.