審査の結果の要旨

Inverse problems for hyperbolic partial differential equations with time-dependent coefficients

(時間依存する係数を持つ双曲型偏微分方程式の逆問題)

氏名: 高瀬　裕志（Hiroshi, TAKASE）

さまざまな自然現象の解明のためには数理モデルが必要である。数理モデルが偏微分方程式で記述される場合に、数理モデル式を確定する際に、媒質の物理的な性質などを規定する係数や現象を引き起こしている原因である外力項を、空間領域のある幾何的な条件を満たす部分境界に限定された解の観測データから決定する逆問題が重要になる。高瀬氏は、そのような逆問題の一意性や安定性を本学位請求論文で研究した。支配方程式としては１階または２階の双曲型方程式を考え、空間変数に依存する係数の決定逆問題を考察した。その議論は、1981 年に A.L. Bukhgeim, M.V. Klibanov が初めて提案した Carleman 評価により逆問題の一意性・安定性を導く方法論によっている。その方法論においては、偏微分方程式の解についての Carleman 評価とよばれる L^2 -重み付き評価式を偏微分方程式に対して確立することが本質的である。

高瀬氏は、空間次元が一般の場合に、以下に述べるようないくつかのタイプの双曲型方程式に対して Carleman 評価を確立し、それを用いて係数決定逆問題の一意性・安定性を導いた。

1. １階の双曲型方程式
2. １階の連立対称双曲型方程式
3. ローレンツ多様体上の波動方程式
4. １次元 Saint-Venan 方程式

さらに、主たる課題である逆問題と深く関連している波動方程式の Cauchy 問題についても考察した。

以下、それぞれの成果について簡単に述べる。

１階の双曲型方程式の逆問題

密度などが満足すべき保存則を表す方程式は１階の双曲型方程式で記述でき、電磁気学、流体力学など連続体の物理において基本的な偏微分方程式である。そのような方程式に対して、現象を支配する因子として外力項を決定する逆問題における一意性と安定性を示した。特に、主要部が空間変数と時間変数双方に依存する場合には１階の方程式の逆問題の解析は困難であるが、Carleman 評価が適用可能な条件を主要部に課して安定性を初めて証明した。

さらに１階の双曲型方程式が時間方向に退化している場合、ならびに、１階連立対称双曲型方程式の場合にも同様な結果を得た。特に後者の連立対称双曲型方程式は Maxwell 方程式や弾性体の方程式などを考える際にも表れる方程式であり、広い応用が期待できるものである。

ローレンツ多様体上の波動方程式

低階項に $\ell\times\ell$-行列値をとる係数 a を持つローレンツ多様体 M 上の ℓ -元連立波動方程式

$$\Box_g h + a(t,x)h = S(t,x)f(x) \qquad (*)$$

に対する逆問題を考察した。但し $T>0$, M を滑らかな境界を持つ向き付け可能で滑らかな n-次元コンパクト多様体、$\Box_g=\sum_{\mu,\nu=0}^n g^{\mu\nu}(t,x)(\partial_\mu\partial_\nu-\sum_{\rho=0}^n \Gamma^\rho_{\mu\nu}(t,x)\partial_\rho)$ は滑らかなローレンツ計量

$g = \sum_{\mu,\nu=0}^{n} g_{\mu\nu}(t,x)dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}$ に対するラプラス–ベルトラミ作用素，S は $(t,x) \in [-T,T] \times M$ に依存する $\ell \times \ell$ 行列に値をとる関数で、f は M から $\mathbb{R}^{\ell}$ へのベクトル値関数とする。ここで $(g^{\mu\nu})_{0\le\mu,\nu\le n} = (g_{\mu\nu})_{0\le\mu,\nu\le n}^{-1}$ とする。したがって、方程式 (*) は低階項だけでなく主要部の係数 $g^{\mu\nu}$ も時間に依存する方程式であり、(*) は一般相対性理論におけるアインシュタイン方程式を線型化することで得られる重力波の伝搬を記述する連立方程式として知られている。さらに場の理論におけるヤン–ミルズ方程式にローレンツゲージを固定することで, 接続形式に対して、(*) のような連立波動方程式が得られることが知られている．高瀬氏は、$[-T,T] \times M$ の片側境界における解のノイマンデータから未知関数 f を決定する波源項決定逆問題に対し局所ヘルダー型安定性を証明した。特に主要部が時間に依存する場合の結果は少なく、格別の工夫が必要であった。.

１次元 Saint-Venan 方程式

１次元 Saint-Venan 方程式とよばれる浅水波に関する方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u + a\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u = R(x,t)f(x)$$

に対して、外力項の空間依存する因子 $f(x)$ を境界データから決定する逆問題に関して、Lipschitz 型の安定性を証明した。

波動方程式の Cauchy 問題の解の非一意性

低階項に時間依存する係数 V を持つ二次元波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \Delta u + V(x,t)u = 0$$

に対する Cauchy 問題を考察した。もし V が時間方向に対して解析的であれば、任意の非特性曲面において Cauchy データを与えたときに、その近傍で解が一意的に定まるという一意接続性が成り立つことが D. Tataru (1995) により知られているが、V に時間解析性がない場合には、一般に解の一意接続性は成り立つことは保証されていない。さらに、本論文で示された逆問題の一意性においては、境界データが与えられている境界の幾何形状に条件が仮定されていて勝手な部分境界での解のデータによる一意性も保証されていない。そこで、ここで考察している Cauchy 問題の解の一意性・非一意性は対応する逆問題の一意性・非一意性に示唆を与えるものである。高瀬氏は空間領域が 2 次元円板の場合に、非自明解が無限個存在することを示し、非一意性を構成的に証明した。Schrödinger 方程式についても同様な結果を示した。

本論文において以上の逆問題について新奇性の強い成果を確立した。よって、論文提出者 高瀬　裕志（Hiroshi TAKASE）は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。