論文の内容の要旨

論文題目

Optimal decay estimates for Schrödinger heat semigroups with inverse square potential in Lorentz spaces

(逆二次ポテンシャル付きシュレーディンガー熱半群のローレンツ空間における最適減衰評価)

氏　　名　立石　優二郎

$L^2(\mathbf{R}^N)$ 上の非負 Schrödinger 作用素 $H := -\Delta + V$ は, 量子力学や燃焼理論等, 数理物理学の様々の分野で用いられ, その熱半群に関しては Simon によって 1981 年に先駆的研究 [9] が為された. 現在までに Schrödinger 熱半群の数多の研究が行われ, 特にポテンシャル V が L^p (但し, $N \geq 2$ のとき $p > N/2$, $N = 1$ のとき $p > 1$) に属する場合が注目されてきた. Schrödinger 熱半群 e^{-tH} の挙動には作用素 H の臨界性が関連しており, ポテンシャル V 及び H の調和関数の挙動に伴って, 劣臨界, 正臨界, 零臨界, 優臨界と呼ばれる 4 つの状況に分類される ([8] を参照).

Schrödinger 作用素のポテンシャルの典型例の一つに, 逆二次ポテンシャル

$$V(r) \sim \lambda_1 r^{-2} \quad \text{as} \quad r \to +0, \qquad V(r) \sim \lambda_2 r^{-2} \quad \text{as} \quad r \to +\infty,$$

がある. 但し $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$. 逆二次ポテンシャルの挙動は Schrödinger 熱半群に対する古典的理論の適用範囲外にあるが, 半線形放物型方程式等の非線形偏微分方程式の線形化解析に度々用いられ, その数学的重要性から注目すべき研究対象の一つと言える. Schrödinger 作用素の非負性はその熱半群の挙動を理解する上で重要であり, 逆二次ポテンシャルの場合には, 係数 λ_1, λ_2 に関して少なくとも $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_*$ (但し, $\lambda_* := -(N-2)^2/4$) を要求する. また定数 $|\lambda_*|$ は $\mathbf{R}^N$ 上の Hardy 不等式の最良定数であり, Hardy ポテンシャル $\lambda|x|^{-2}$ 付き熱方程式の解の存在については, ある種の臨界現象が知られている. 具体的には, Cauchy 問題

$$\partial_t u - \Delta u + \lambda |x|^{-2} u = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N,\ t > 0,$$

には, $\lambda < \lambda_*$ の場合に正値時間局所解は存在せず, 対照的に, $\lambda \geq \lambda_*$ の場合には $L^2(\mathbf{R}^N)$ の初期値に対して時間大域解が存在する ([1] を参照).

球対称かつ有界な逆二次ポテンシャル V を持つ熱方程式に対して, 解の長時間挙動の研究が Ishige, Kabeya らにより 2008 年から始められ, 劣臨界の作用素 $H = -\Delta + V$ を対象に, 指数減衰する初期値 ϕ に対する $e^{-tH}\phi$ の長時間挙動が詳細に記述された. この漸近解析の結果より, 最大点集合や臨界点集合の挙動など, $e^{-tH}\phi$ の形状に関する幾何的性質の研究が可能となった. 両氏の一連の研究結果は Ishige, Mukai [5] によって統合され, 球対称逆二次ポテンシャル V に対して, 作用素 $H = -\Delta + V$ が劣臨界及び零臨界の場合にまで $e^{-tH}\phi$ の高次漸近展開の理論は発展している. これらの研究において, H の調和関数及びその導関数の挙動解析は不可欠であり, $\nabla^\alpha e^{-tH}\phi$ の減衰評価も重要な役割を担っている.

一般に $\nabla^\alpha e^{-tH}\phi$ に対する最適減衰評価は精密な手法を必要とし, 今もなお一般理論の構築は不十分である. ポテンシャル V が恒等的に零のとき, 即ち, 作用素 $H = -\Delta$ に対しては減衰評価

$$\|\nabla^\alpha e^{t\Delta}\phi\|_{L^q(\mathbf{R}^N)} \leq C t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{\alpha}{2}} \|\phi\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}, \quad t > 0, \tag{1}$$

が成り立つ (但し, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$). 一方, $\mathbf{R}^N$ の半空間や外部領域における Dirichlet 熱半群に対しては必ずしも (1) は成り立たない ([2], [4] を参照). このことより, 減衰評価 (1) は非負 Schrödinger 熱半群 e^{-tH} に対しても必ずしも成り立たないと連想される.

この論文では, 球対称な逆二次ポテンシャル付き非負 Schrödinger 作用素 H に対して, Lorentz 空間上で熱半群 e^{-tH} の最適減衰評価を考察する. 本研究の結果から $\nabla^\alpha e^{-tH}\phi$ の挙動と作用素 H の調和関数の関連性が分かり, $\nabla^\alpha e^{-tH}\phi$ の最適減衰が決定される仕組みが明確になる.

本論文で用いる記号と仮定を述べる．$\mathbf{S}^{N-1}$ 上の Laplace-Beltrami 作用素を $\Delta_{\mathbf{S}^{N-1}}$ で表し，$\{\omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ を固有値問題

$$-\Delta_{\mathbf{S}^{N-1}}Q = \omega Q \quad \text{on} \quad \mathbf{S}^{N-1}, \quad Q \in L^2(\mathbf{S}^{N-1}),$$

の固有値とする．また $\{Q_{k,i}\}_{i=1}^{d_k}$ を固有値 ω_k に対応する固有空間の正規直交系，d_k をその次元とする．ポテンシャル V に以下を仮定する：ある $m = 1, 2, \dots$ に対して，

$$\begin{cases} \text{(i)} & V = V(|x|) \text{ in } \mathbf{R}^N \setminus \{0\} \text{ and } V \in C^m((0,\infty)); \\ \text{(ii)} & V(r) = \lambda_1 r^{-2} + O(r^{-2+\rho_1}) \text{ as } r \to +0, \\ & V(r) = \lambda_2 r^{-2} + O(r^{-2-\rho_2}) \text{ as } r \to \infty, \\ & \text{for some } \lambda_1,\, \lambda_2 \in [\lambda_*, \infty) \text{ with } \lambda_* := -(N-2)^2/4 \text{ and } \rho_1,\, \rho_2 > 0; \\ \text{(iii)} & \sup\limits_{r>0} \left| r^{\ell+2} \dfrac{d^\ell}{dr^\ell} V(r) \right| < \infty \text{ for } \ell \in \{1, \dots, m\}. \end{cases} \tag{V$_m$}$$

さらに作用素 $H := -\Delta + V$ は非負とする．即ち，

$$\int_{\mathbf{R}^N} \left[|\nabla \phi|^2 + V(|x|)\phi^2 \right] dx \geq 0, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N \setminus \{0\}), \tag{N}$$

を仮定する．条件 (N) は，常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dr^2} h_k + \dfrac{N-1}{r} \dfrac{d}{dr} h_k - V_k(r) h_k = 0 & \text{in} \quad (0,\infty), \\ h_k(r) = r^{A^+_{\lambda_1+\omega_k}}(1 + o(1)) & \text{as} \quad r \to +0, \end{cases}$$

が各 $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ に対して一意正値解 h_k を持つことと必要十分である．但し，$V_k(r) := V(r) + \omega_k r^{-2}$，$A^+_{\lambda_1+\omega_k} := \frac{-(N-2)+\sqrt{(N-2)^2+4(\lambda_1+\omega_k)}}{2}$．このとき各 $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ 及び $i \in \{1, 2, \dots, d_k\}$ に対して，$J_{k,i}(x) := h_k(|x|) Q_{k,i}(x/|x|)$ は H の調和関数である．即ち，$HJ_{k,i} = 0$ in $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ を満たす．特に h_0 を H の正値調和関数という．次に非負作用素 H の臨界性の定義を与える．H が劣臨界であるとは，任意の $W \in C_c(\mathbf{R}^N)$ に対して，$H - \epsilon W$ も非負であることをいう（但し，ϵ は十分小さいとする）．一方，H が劣臨界ではないとき，H は臨界であるという．臨界な場合には更に，$h_0 \in L^2(\mathbf{R}^N)$ ならば H は正臨界といい，$h_0 \notin L^2(\mathbf{R}^N)$ ならば H は零臨界であるという．本論文では非負作用素 H の臨界性に関して

$$\text{(i)} \quad H \text{ は劣臨界} \quad \text{又は} \quad \text{(ii)} \quad H \text{ は臨界 かつ } \lambda_2 > \lambda_* + 1 \tag{N'}$$

を仮定する．作用素 H が臨界のとき，付随する基本解が零臨界では $t \to \infty$ で減衰する一方で，正臨界では必ずしも減衰しないことが知られている．条件 (V_m) の下では，作用素 H が臨界かつ $\lambda_2 = \lambda_* + 1$ の場合というのは特に正臨界と零臨界の境目であり，その解析の難しさから本研究では扱わない．最後に，非負 Schrödinger 熱半群 e^{-tH} に対して，Lorentz 空間 $L^{p,\sigma}$ から $L^{q,\theta}$ への $\nabla^\alpha e^{-tH}$ の作用素ノルムを以下で定義する：

$$\|\nabla^\alpha e^{-tH}\|_{(L^{p,\sigma} \to L^{q,\theta})} := \sup \left\{ \left\| \nabla^\alpha e^{-tH} \phi \right\|_{L^{q,\theta}(\mathbf{R}^N)} \,:\, \phi \in L_c^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ with } \|\phi\|_{L^{p,\sigma}(\mathbf{R}^N)} = 1 \right\}.$$

ここで $L_c^\infty(\mathbf{R}^N) := \{f \in L^\infty(\mathbf{R}^N) \,:\, f \text{ has a compact support in } \mathbf{R}^N\}$．また Lorentz 空間の指数 (p, q, σ, θ) は集合 Λ の元とする：

$$\Lambda := \left\{ 1 \leq p \leq q \leq \infty,\, \sigma,\, \theta \in [1,\infty] \,:\, \begin{array}{ll} \sigma = 1 \text{ if } p = 1, & \sigma = \infty \text{ if } p = \infty \\ \theta = 1 \text{ if } q = 1, & \theta = \infty \text{ if } q = \infty \\ \sigma \leq \theta \text{ if } p = q & \end{array} \right\}.$$

本論文の主結果を述べる．最初の定理は $\alpha = 0, 1, 2$ に対する $\|\nabla^\alpha e^{-tH}\|_{(L^{p,\sigma}\to L^{q,\theta})}$ の最適減衰評価である．

定理 1. 条件 (V_1) 及び (N') を仮定する．$(p, q, \sigma, \theta) \in \Lambda$, $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ とする．このとき定数 $C > 0$ が存在して

$$C^{-1}\Phi_\alpha(t) \le \|\nabla^\alpha e^{-tH}\|_{(L^{p,\sigma}\to L^{q,\theta})} \le C\Phi_\alpha(t) \quad \textit{for} \quad t > 0$$

が成り立つ．ここで

$$\Phi_\alpha(t) := \begin{cases} t^{-\frac{N}{2}}\Gamma_{p',\sigma'}(t)\Gamma_{q,\theta}(t), & \textit{if } \alpha = 0, \\ t^{-\frac{N}{2}}\Gamma_{p',\sigma'}(t)\left[\dfrac{\|\nabla h_0\|_{L^{q,\theta}(B(0,\sqrt{t}))}}{h_0(\sqrt{t})} + t^{\frac{N}{2q}-\frac{1}{2}}\right], & \textit{if } \alpha = 1, \\ t^{-\frac{N}{2}}\Gamma_{p',\sigma'}(t) & \\ \quad \times\left[\dfrac{\|\nabla^2 h_0\|_{L^{q,\theta}(B(0,\sqrt{t}))}}{h_0(\sqrt{t})} + \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\dfrac{\|\nabla^2 J_{1,i}\|_{L^{q,\theta}(B(0,\sqrt{t}))}}{h_1(\sqrt{t})} + t^{\frac{N}{2q}-1}\right], & \textit{if } \alpha = 2. \end{cases}$$

但し，

$$\Gamma_{p,\sigma}(t) := \frac{\|h_0\|_{L^{p,\sigma}(B(0,\sqrt{t}))}}{h_0(\sqrt{t})} \ \textit{ if } h \in L^{p,\sigma}(B(0,1)), \qquad \Gamma_{p,\sigma}(t) := \infty \ \textit{ if } h \notin L^{p,\sigma}(B(0,1)).$$

定理 1 は作用素 H の調和関数が $\|\nabla^\alpha e^{-tH}\|_{(L^{p,\sigma}\to L^{q,\theta})}$ の最適減衰を決定する仕組みを明示している．さらに下方減衰評価は, 正値調和関数の非可積分性に対応して, $\Gamma_{p,\sigma}$ が非有界であるような指数の Lorentz 空間では熱半群自体が定義されないことを示している．

次の定理は Laplace 作用素の特徴付けを与える．

定理 2. 条件 (V_∞) 及び (N') を仮定する．$(p, q, \sigma, \theta) \in \Lambda$ とする．任意の $\alpha \in \{0, 1, 2, \dots\}$ に対して, 定数 $C > 0$ が存在して

$$\|\nabla^\alpha e^{-tH}\|_{(L^{p,\sigma}\to L^{q,\theta})} \le Ct^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{\alpha}{2}} \quad \textit{for} \quad t > 0$$

が成り立つと仮定する．このとき V は $\mathbf{R}^N$ において恒等的に零, 即ち $H = -\Delta$ である．

定理 2 の主張と (1) を比較すると, 逆二次ポテンシャル付き Schrödinger 熱半群 e^{-tH} に対しては, $e^{-t\Delta}$ と同じ減衰評価は期待できないと分かる．

証明では, 球面調和関数を用いた Fourier 級数展開の $\phi \in L^\infty_c(\mathbf{R}^N)$ への適用により, $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ の任意のコンパクト部分集合 K に対して

$$[e^{-tH}\phi](x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{d_k}[e^{-tH_k}\phi_{k,i}](|x|)Q_{k,i}\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \text{in} \quad C^2(K)$$

の表示を得る．但し, $H_k := -\Delta + V_k$, $\{\phi_{k,i}\}_{k,i}$ はある球対称関数族．放物錐内部における上方減衰評価は, 優解構成による $e^{-tH_k}\phi_{k,i}$ の一様評価及び $e^{-tH_k}\phi_{k,i}$ の球対称性を利用したある表示公式の導出によって示す．放物錐外部での上方減衰評価では, H に付随する基本解の上方 Gauss 型評価及び放物型正則性定理を用いる．下方減衰評価では, ある A_2-weight 付き放物型方程式の基本解に対する下方 Gauss 型評価を利用する．

参考文献

[1] P. Baras and J. A. Goldstein, The heat equation with a singular potential, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **284** (1984), 121–139.

[2] A. Grigor'yan and L. Saloff-Coste, Dirichlet heat kernel in the exterior of a comact set, *Comm. Pure Appl. Math.*, **55** (2002), 93–133.

[3] N. Ioku, K. Ishige and E. Yanagida, Sharp decay estimates in Lorentz spaces for nonnegative Schrödinger heat semigroups, *J. Math. Pures Appl.*, **103** (2015), 900–923.

[4] K. Ishige and Y. Kabeya, Decay rates of the derivatives of the solutions of the heat equation in the exterior domain of a ball, *J. Math. Soc. Japan*, **59** (2007), 861–898.

[5] K. Ishige and A. Mukai, Large time behavior of solutions of the heat equation with inverse square potential, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **38** (2018), 4041–4069.

[6] K. Ishige and Y. Tateishi, Decay estimates for Schrödinger heat semigroup with inverse square potential in Lorentz spaces, *to appear in J. Evol. Eq.*

[7] K. Ishige and Y. Tateishi, Decay estimates for Schrödinger heat semigroup with inverse square potential in Lorentz spaces II, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **42** (2022), 369–401.

[8] Y. Pinchover, Large time behavior of the heat kernel, *J. Funct. Anal.*, **206** (2004), 191–209.

[9] B. Simon, Large time behavior of the L^p norm of Schrödinger semigroups, *J. Funct. Anal.*, **40** (1981), 66–83.