

審査の結果の要旨

氏 名 林 興養

構造的グラフ理論とは、グラフの連結度や染色数などの大域的なパラメータが局所的な部分構造に与える影響を扱う理論体系であり、なかでも 80 年代初めに Robertson-Seymour により提唱されたグラフマイナー理論は、計算機科学、トポロジー、数学基礎論等、多くの分野に影響を与えている。与えられたグラフ上で指定された k 組の頂点对を点素パスで結ぶ「 k -点素パス問題」は一般には NP 困難であるが、 k を定数とみなしたときには多項式時間で解けることがグラフマイナー理論の副産物として示され、VLSI のデザインへの応用とともに大きな関心を集めた。彼らのアルゴリズムは、計算時間に隠れた定数が非常に大きいため実用的でないが、一方で、 $k = 2$ の場合、解が存在しないグラフの構造は、1980 年に Thomassen, Seymour, Shiloach によって独立に発見された「2-パス定理」によって、ある制約下で平面埋め込み可能なグラフとしてよく理解されている。本論文は、この 2-パス定理の拡張として、指定された 4 頂点を分岐点とする特定のグラフの「細分」(= そのグラフの各辺を内素パスで置き換えたグラフ) の構造的特徴付けにアプローチするものである。

本論文は、「Structural Characterizations of Rooted Subdivisions on Four Vertices in Graphs」(グラフにおける四頂点上の根付き細分に対する構造的な特徴付け) と題し、5 章からなる。

第 1 章「Introduction」(序論)では、Menger の点素パス定理と連結度の概念について述べ、さらにバックグラウンドである k -点素パス問題や根付き細分問題について述べている。特に、2-点素パス問題に対する構造的な特徴付けを与える 2-パス定理を丁寧に解説している。また、その拡張にあたる 4 頂点上の根付き細分問題の研究の歴史を詳しく述べている。さらに、その Hajós の彩色予想への応用可能性も論じている。そして、本論文の位置付け、構成、主要な成果について解説している。

第 2 章「Preliminaries」(準備)では、グラフの separation (分離)といった基本的概念を導入し、本論文で鍵となる道具である Perfect の補題について解説している。また、グラフの細分の具体的な構成に重要となるパス増強法との関連も説明している。

第 3 章「Linking four vertices in 6-connected graphs」(6-連結グラフにおける四頂点のリンキング)では、本学位論文の主要な結果である「任意の 4 頂点単純グラフ H に対する、根付き H -細分を含まない 6-連結グラフの完全な構造的な特徴付け」が示されている。その構造とは、指定の 4 頂点を外周に含む平面的なグラフとその外周

を囲むような非平面的グラフとの合併として構成されるものである。これは、上述の 2-パス定理や、Yu による P_4 -リンク的なグラフ（指定の 4 頂点を指定の順に通るパスが存在するグラフ）の構造的特徴付けの拡張となっている。そして、その帰結として、いくつかの重要な系が示されている。なかでも、特筆すべきものは、「任意の 4 頂点単純グラフ H に対しての根付き H -細分の存在を保証する連結度条件の完全決定」や Mader の予想「内周が十分大きい $n(n-1)/2$ -連結グラフは指定の n 頂点を分岐点とする K_n の細分を含む」の特殊ケース ($n=4$) の解決である。本章の結果の証明は Menger の定理や 2-パス定理にもとづく構成的なものである。従って、6-連結なグラフと 4 頂点が指定されたときに、それらを分岐点とする K_4 の細分が存在するかどうかを判定する実装可能な多項式時間アルゴリズムを設計することができる。この実装可能であるという点は、 k -点素パス問題に対する従来の Robertson-Seymour のアルゴリズムでは扱いきれなかった話題である。

第 4 章「Relaxed rooted subdivisions on four vertices」（四頂点上の緩和根付き細分）では、根付き H -細分問題において、根となる頂点の置換を許容した緩和問題を扱っている。これは、前章の研究を推し進めて（6-連結グラフに限らない）一般的な特徴付けを得るために解かなければならない問題であり、また、Hajós の彩色予想で現れる基本的な部分問題の一つでもある。主な成果は、 H が K_4^- （4 頂点完全グラフ K_4 から辺を一本削除したグラフ）の場合に対し、緩和根付き H -細分を含まない 3-連結グラフの構造を完全に決定したことである。その構造は、グラフの分解として完全に組合せ的に記述されており、前章の結果とは対照的に、平面性などの位相的条件を要求しない。これは、グラフの根付き連結性と曲面埋め込み可能性の関連を示唆する興味深い結果である。本章の結果の証明も、Menger の定理や Mader の S -パス定理にもとづく構成的なものである。

第 5 章「Conclusions」（結論）では、本論文の成果を簡潔に纏めるとともに、未解決問題と今後の研究の方向性について論じている。

以上を要するに、本論文は、4 頂点上の根付き細分問題に多角的に取り組み、理論的に深い結果を多く示している。特に、第 3 章の結果は、4 頂点単純グラフ H の根付き細分が 2-パス定理の延長として捉えることができることを示唆する意義のある貢献である。また、本論文の証明はすべて構成的であり、具体的なアルゴリズムの設計に応用することもできる。さらに、Hajós の彩色予想への将来的な応用可能性をみるに、一般に計算が困難なグラフの染色数への深い理解にも貢献することが期待され、数理論情報学の発展に寄与している。よって本論文は博士（情報理工学）の学位請求論文として合格と認められる。