

滑り無し境界条件のもとでの k - ϵ モデルを用いた溝乱流の数値解析Numerical Simulation of Channel Flows by the k - ϵ Model with the No-Slip Condition Imposed on the Walls

西 島 勝 一*・吉 澤 徹*

Shoichi NISHIZIMA and Akira YOSHIZAWA

1. は じ め に

乱流は非常に多くのスケールを含むため、自然および工学的現象に現れるせん断乱流の計算機による直接シミュレーションは不可能に近い。¹⁾このため、種々の乱流モデルが考案されているが、それらの代表的なものとして Large-Eddy Simulation (LES), k - ϵ モデル、応力モデルを挙げることができる。LES は他の2つのものに比べ、モデルがたいへん簡単であり、普遍性も高く詳細な情報を豊富に含んでいる。反面、比較的簡単な形状のせん断乱流でも計算時間が他のモデルに比べて多大である。他方、 k - ϵ モデルと応力モデルでは、平均速度・レイノルズ応力といったアンサンブル平均または時間平均に関係した量のみを考察の対象としている。特に、応力モデルは渦粘性仮説に基づく k - ϵ モデルの本質的困難を回避したより精巧なモデルと考えられている。^{1), 2)}しかし、これら二つのモデルから得られた結果に決定的差異がないことがしばしばあり、^{3), 4)}平均流が3次元有的时候は応力モデルの計算時間が LES に匹敵する程度に膨大になる等の理由のため、工学的問題では k - ϵ モデルが非常によく用いられている。

k - ϵ モデルを用いて溝乱流を数値解析するとき、計算時間を節約するために壁面上での平均流速が零という条件を用いず、壁より少し離れた点での経験則である対数速度則を境界条件に課して実験とよく合致する結果を得ることができる。^{3), 4)}しかし、経験則が得られていない乱流(たとえば、両壁間の温度差による浮力効果を伴う溝乱流)の数値解析を行う場合は、壁面上での正しい境界条件を課して計算することが不可欠である。

本論文では、 k - ϵ モデルにおいて壁面上での平均流速、乱流エネルギー等に正しい境界条件を課して溝乱流を数値解析した結果を報告する。特に、統計理論的に得られた渦粘性表現の補正式⁵⁾を用いて、 k - ϵ モデルからも乱流強度の非等方性が説明できることを示す。

2. k - ϵ モデル

速度、圧力の平均部分とそれからのずれを示す擾乱部分をそれぞれ (\bar{v}, \bar{p}) と (v', p') で表すと、3次元非圧縮・粘性流体に対する平均部分の基本方程式は、

$$\frac{D\bar{v}_\alpha}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) \bar{v}_\alpha \\ = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(R_{\alpha\beta} + \nu \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (2)$$

で与えられる。 ν は動粘性率であり、 $R_{\alpha\beta}$ はいわゆるレイノルズ応力で、

$$R_{\alpha\beta} = - \langle v'_\alpha v'_\beta \rangle \quad (3)$$

で与えられる($\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表し、くり返し下つき添え字については1から3まで和をとることにする)。

(1) は、 $R_{\alpha\beta}$ と \bar{v} との間になんらかの関係づけを与えなければ解くことができない。 k - ϵ モデルでは擾乱場の基本的統計量として乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ϵ を選び、

$$R_{\alpha\beta} = -2k\delta_{\alpha\beta}/3 + \nu e_{\alpha\beta}, \quad (4)$$

$$\nu_e = C_\nu k^2/\epsilon, \quad (5)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{1}{2} \nu_e e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(C_k \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial k}{\partial x_\alpha} \right) + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_\alpha^2}, \quad (6)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{1}{2} C_{\epsilon 1} k e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(C_{\epsilon 3} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_\alpha} \right) \\ + \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_\alpha^2} \quad (7)$$

のようにモデル化されている。上式中の ν_e は渦粘性率、 $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカーのデルタ記号、また、

$$e_{\alpha\beta} = \partial \bar{v}_\alpha / \partial x_\beta + \partial \bar{v}_\beta / \partial x_\alpha \quad (8)$$

モデル定数は通常

$$C_\nu \approx 0.09, \quad C_k \approx 0.09, \quad C_{\epsilon 1} \approx 0.13$$

$$C_{\epsilon 2} \approx 1.9, \quad C_{\epsilon 3} \approx 0.069$$

* 東京大学生産技術研究所 第1部

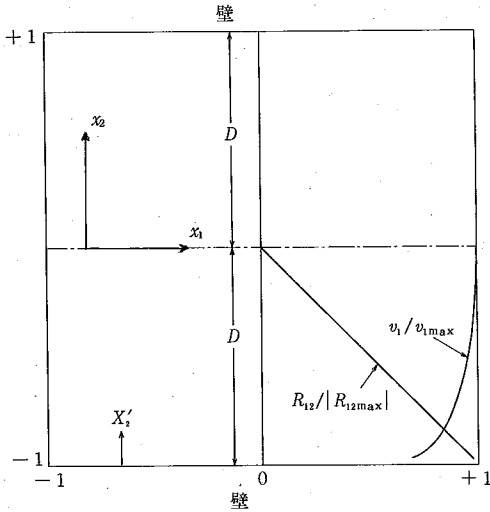


図1 平均流速, レイノルズ応力 (\bar{v}_1 の最大値と D を基にしたレイノルズ数 62770)

のように選ばれている。^{2), 3)} (1), (2), (4)~(8) を連立させることによって方程式系を閉じることができる。

3. 壁面上の滑り無し条件の適用と結果

図1 (x_1 と x_2 に対し垂直な x_3 方向は無限長) の溝乱流では

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_3 = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} = 0$$

となっている。さらに、壁間の半分の長さ D と D および平均圧力勾配 $G = -d\bar{p}/dx_1$ で作られる速度 \sqrt{DG} を用いて(1), (2), (4)~(8)式を無次元化し、整理すると、

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} = 1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_2^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)^2 - \varepsilon + C_k \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 k}{\partial x_2^2}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = & C_{\varepsilon 1} k \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + C_{\varepsilon 3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \right) \\ & + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_2^2} \end{aligned} \quad (11)$$

が得られる。なお、上式中の R は次のように表される:

$$R = \sqrt{DG} D / \nu. \quad (12)$$

k - ε モデルでは(5)の表現がモデルの重要な基礎となっているが、これは壁に近い粘性底層内においては成立しないと考えられる。そこで、(9)~(11)の渦粘性率に関係する各項へ粘性底層で減衰する壁減衰関数 f_D を乗ずる。さらに、流れが定常状態のとき、壁上で(11)を検討してみる。 k が零であることから、左辺と右辺第1, 3項は零となる。さらに、後に示すとおり ε の壁近くでの

振舞は定数(壁からの距離を変数として)に近いことから第4項も消え、第2項は発散し等式が成立しない。それゆえ、(11)の右辺第2項にも壁面で零になる減衰関数を乗ずる必要が生ずる。以上の減衰関数を全て同じ f_D として(9)~(11)に適用すると、次の式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} = 1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(f_D C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_2^2}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} = & f_D C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)^2 - \varepsilon + C_k \frac{\partial}{\partial x_2} \left(f_D \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_2} \right) \\ & + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 k}{\partial x_2^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = & C_{\varepsilon 1} k \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)^2 - f_D C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + C_{\varepsilon 3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(f_D \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \right) \\ & + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_2^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

(13)~(15)を解くための境界条件としては、壁面で $\bar{v}_1 = 0, \quad k = 0.$

ε については(14)を壁の極近くで適用すると $\varepsilon = \nu (\partial^2 k / \partial x_2^2)$ となる。しかし、壁からの距離を x_2' とすると、壁近くで k は $k \sim x_2'^2$ となるため $(\partial^2 k / \partial x_2^2) \sim 2(\partial \sqrt{k} / \partial x_2)^2$ と書け、壁近くでは $\varepsilon \sim 2\nu (\partial \sqrt{k} / \partial x_2)^2$ と近似できる。^{6), 7)}

f_D は各統計量に大きな影響を及ぼす重要な関数であり、

$$f_D = 1 - \exp(-y^+ / A_f), \quad A_f = 6.6 \quad (16)$$

を用いた。この f_D の決定と関連させてモデル定数 C_ν を 0.096 と変更した。 y^+ は壁座標であり、

$$y^+ = x_2' R \quad (17)$$

と定義される。

本数値解析は対称溝乱流であるから、中心対称という境界条件を課し壁間の半分の計算のみを行った。初期値は、対数速度則に基づく計算結果を用いている。空間差分としては

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} = & \frac{1}{x_{i+1} - x_{i-1}} \left\{ \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_i} (v_{i+1} - v_i) \right. \\ & \left. + \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i - x_{i-1}} (v_i - v_{i-1}) \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dx^2} = & 2 \left\{ \frac{v_{i-1}}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_i - x_{i-1})} \right. \\ & - \frac{v_i}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} \\ & \left. + \frac{v_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

を、⁸⁾ また時間差分に関しては

$$dv/dt = f$$

に対して

$$v^{n+1} = v^n + \tau(3f^n - f^{n-1})/2 \quad (20)$$

を用いた。ただし τ は空間刻み幅を、添え字 n, i はそれ

研究速報

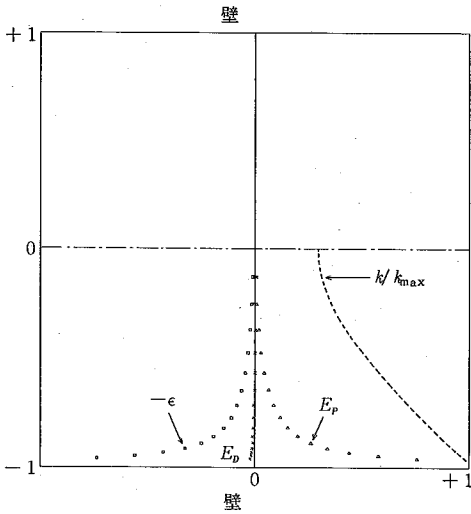


図2 エネルギー収支 (E_p =生産項, E_D =拡散項)

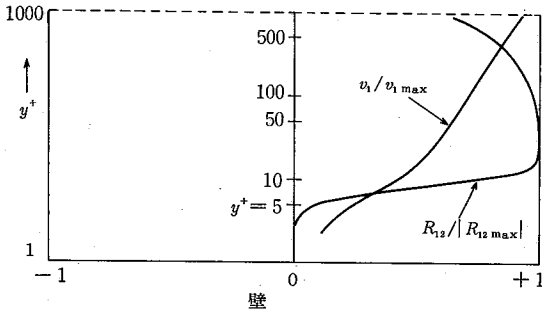


図3 壁近くの平均流速, レイノルズ応力

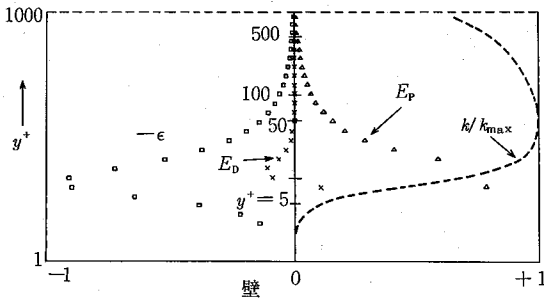


図4 壁近くのエネルギー収支

それぞれ n 番目の時刻, i 番目の空間位置を表す. 時刻刻み幅は等間隔, 空間刻みは $-1 \leq x_2 \leq +1$ を

$$x_2 = \tanh(y), \quad (-3.85 \leq y \leq +3.85) \quad (21)$$

と表現し, y を等間隔に刻んで適用した.

両壁間 $2D$ に 61 個の格子点を設定し数値解析を行った結果を図1~4に示す. 結果から次のことがわかった.

- 1) 平均流速は, 粘性底層では $\bar{v}_1 \sim y^+$, 壁から離れた領

域では $\bar{v}_1 \sim \log y^+/\chi + A$ という観測値をほぼ再現できている. なお実測によれば $A \approx 5.5$ であるが, 本数値解析では 6.1 と少し大きめの値が得られる.

- 2) レイノルズ応力の変化の直線性が再現されている.

3) 乱流エネルギーに関しては, その最大値の位置を含め振舞が実験値にかなり近い. また, エネルギーバランスも妥当な形状をしている.^{6),9)}

4) 対称溝乱流の場合は摩擦速度が1であるが, 対数速度則の成り立っている領域で算出すると1となっている.

4. 乱流強度の非等方性

k - ϵ モデルの欠点の一つに乱流強度の非等方性が表現できないことがある. 著者らは最近, 吉澤が統計理論的に導出した乱流強度に対する解析的表現⁵⁾を k - ϵ モデルにより得られた結果と結合させることによって, 乱流強度の非等方性を求める方法を考察した.⁴⁾ 統計理論によると乱流強度の各成分は次のように表現される.

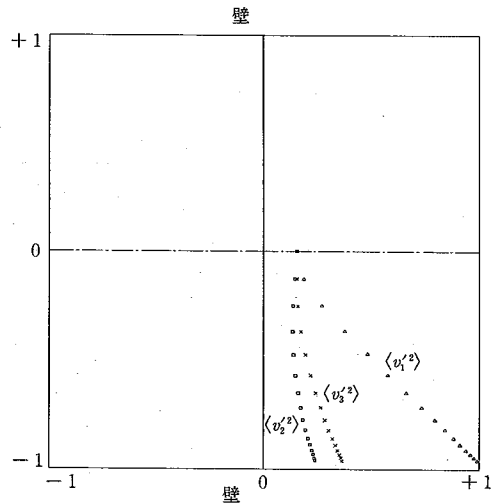


図5 乱流強度の各成分

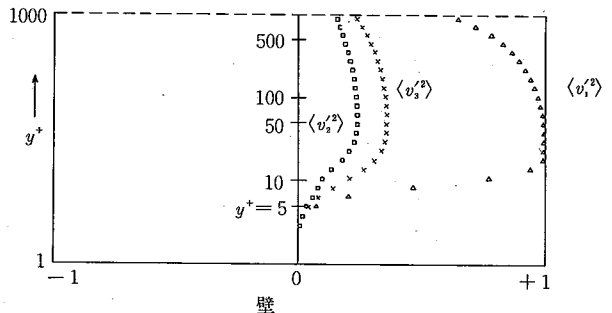


図6 壁近くの乱流強度の各成分

$$\begin{aligned} \langle v_1'^2 \rangle &= \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}(2C_{r1} - C_{r3})\frac{k^3}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}\right)^2, \\ \langle v_2'^2 \rangle &= \frac{2}{3}k - \frac{1}{3}(C_{r1} - 2C_{r3})\frac{k^3}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}\right)^2, \\ \langle v_3'^2 \rangle &= \frac{2}{3}k - \frac{1}{3}(C_{r1} + C_{r3})\frac{k^3}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}\right)^2. \end{aligned} \quad (22)$$

ただし、 $C_{r1} \sim 0.07$, $C_{r3} \sim -0.015$ のように最適化される。これを適用した結果を図 5, 6 に示す。その結果、各成分の大小関係、数値が実験値や数値計算結果に近いものになっていることがわかる。^{9), 10)}

5. 結 論

壁面上で滑り無し条件を課した $k-\varepsilon$ モデルによる溝乱流の数値解析は、統計理論的諸結果と結合させることによって比較的短い時間で妥当な結果を得られることがわかった。

この方法は対数速度則が確立されていない 2 次元ダクト内乱流、温度差による浮力効果を伴う乱流等さまざまな乱流へ適用出来る方法と考えられる。さらに、粘性底層を含む壁の極近くの乱流解析に対しても壁近くの格子点数を増し f_D の適性化等を行うことにより適用可能と思われる。これらは今後の興味ある研究課題であろう。

(1984 年 11 月 13 日受理)

参 考 文 献

- 1) 吉澤徹：乱流の Large-Eddy Simulation, 生産研究, 36 (1984) 175
- 2) 吉澤徹：乱流モデルとせん断乱流の統計理論, 日本物理学会誌, 38 (1983) 845
- 3) 西島勝一, 吉澤徹： $k-\varepsilon$ モデルの有効性に関する一考察, ながれ, 3 (1984) 245
- 4) 西島勝一, 吉澤徹：一般化された渦粘性表現に基づく $k-\varepsilon$ モデルを用いた溝乱流の数値解析, ながれ, (投稿中)
- 5) A. Yoshizawa : Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation, Phys. Fluids, 27 (1984) 1377
- 6) K. Hanjalic & B. E. Launder : Contribution towards a Reynolds-stress closure for low-Reynolds-number turbulence, J. Fluid Mech. 74 (1976) 593
- 7) S. Nakao : Contribution to the Reynolds stress model as applied to near-wall region, AIAA J. 22 (1984) 303
- 8) K. Horiuti : Study of Incompressible Turbulent Channel Flow by Large-Eddy Simulation, Theor. and Appl. Mech. 31 (1981) 407
- 9) P. Moin & J. Kim : Numerical investigation of turbulent channel flow, J. Fluid Mech. 118 (1982) 341
- 10) K. Horiuti : Numerical Simulation of Turbulent Plane Channel Flow, Turbulence Phenomena (to appear)

