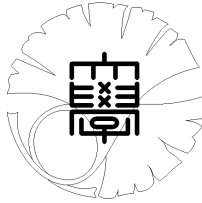


数理科学実践研究レター 2024-3 October 23, 2024

サッカーの試合におけるスプリント回数の
数理モデルについて

by

吉岡 玲音



UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

サッカーの試合におけるスプリント回数の数理モデルについて

吉岡玲音（東京大学大学院数理科学研究科）

Leo Yoshioka¹ (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概要

本研究の目的はサッカーの試合におけるチームの総スプリント回数の数理モデルを構築し、選手の持久力の寄与を明らかにすることである。加えて、選手の持久力を持久力テストの結果から換算するための、数理モデルを構築することを目指す。

1 はじめに

サッカーの試合における選手のスプリントとは、時速 25km 以上での 1 秒以上の連続した走行のことである²。サッカー選手が 1 試合で行うスプリント回数は、選手に取り付けた計測器を用いることで測定可能である。選手のスプリント回数は、J リーグの公式サイト (URL: <https://www.jleague.jp>)^[4] でランキングが公開されるなど、サッカー選手やチームのパフォーマンスの重要な指標のひとつとして用いられる。一方で、スプリント回数に寄与する要素には、選手個人の能力以外の要素が含まれる可能性がある。

本論文では、自チームのモチベーションや相手チームのパフォーマンスを組みこんだ、チームのスプリント回数の数理モデルを構築する。このモデルでは、選手の能力として選手の持久力を用いる。選手の持久力の指標には 12 分間走やシャトルラン、YO-YO テスト [1] などの持久力テストが導入されてきた。この論文では異なる種類の持久力テストの結果から持久力を換算することを目的として、持久力の換算モデルを構築する。

この論文の数理モデルは様々な設定を単純化した簡易的なものではあるが、このような数理モデルにより、選手の持久力とパフォーマンスの関係が明確になることで、選手のトレーニングへのモチベーションの増加や指導者の指導の質の向上が期待される。

謝辞 本研究は東京大学大学院数理科学研究科の社会数理実践研究の中で行われた。本研究の共同研究者である東京大学大学院数理科学研究科の板東克之氏、間瀬崇史氏、田中雄一郎氏、齊藤宣一氏、アビームコンサルティング株式会社の武貞征孝氏、秋元翔真氏、宮田裕生氏に深く感謝申し上げます。アビームコンサルティング株式会社からは、課題提供をいただき、サッカーの試合のパフォーマンスのデータをいただいた。感謝申しあげる。

2 スプリント回数の数理モデル

本節ではチームのモチベーションや相手チームのパフォーマンスを組みこんだ、チームのスプリント回数の簡易的な数理モデルを構築する。

2.1 観察

Football LAB (URL: <https://www.football-lab.jp>)^[5] では様々な J リーグデータが公開されている。以下の図は 2022 年 J リーグでの横浜 F マリノス (Team 1) のスプリント回数と全相手チーム (Team 2) のスプリント回数のデータをプロットしたものである。横浜 F マリノスがホームゲーム (H) の場合は青色で、アウェイゲーム (A) の場合は橙色でプロットしてある。相手チームのスプリント回数が多いほど自チームのスプリント回数が多い傾向がある。またホームゲームの方がスプリント回数が多い傾向にある。

¹yoshioka@ms.u-tokyo.ac.jp

²スプリント回数の定義は様々あるが、ここでは J リーグオフィシャルスタッツである JSTATS による定義を用いる。

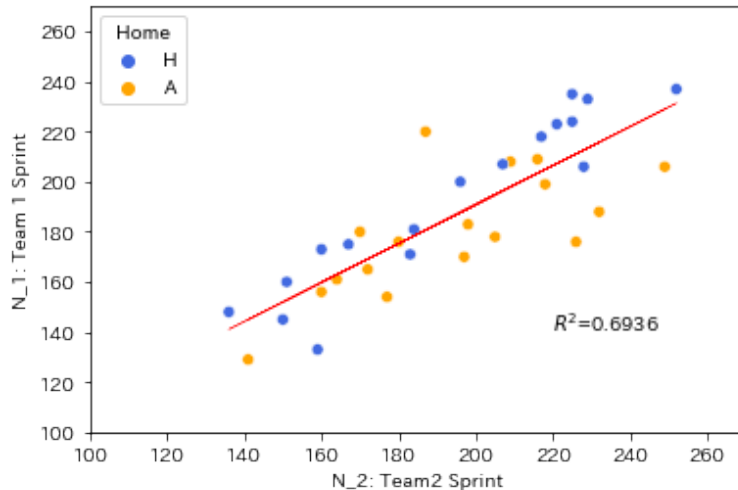


図 1: 横浜 F マリノスのスプリント回数 (2022)

スプリントが起こった状況や場面に関する詳細データ (スプリントを起こした選手のポジション、スプリントが起こった場所など) がないため上記の傾向の正確な理由を与えることは難しい。本論文では以下のような仮説を立てる。

- 相手チームがスプリントを起こした場合、それに対応するために自チームもある確率でスプリントを起こす。
- ホームゲームの場合、アウェイゲームに比べて選手のモチベーションやコンディションが増加し、(同体力下での) 自発的に起こすスプリントが多くなる。

注釈 1 横浜 F マリノスは 2022 年の首位チームであるという特殊性がある。しかし上記の傾向は 2022 年の最下位チームであるジュビロ磐田にもあった。引き続き他のチームについても確認する必要がある。

2.2 スプリントの数理モデルの仮定

スプリントの発生は相手チームにも依存する相対的なものである、という以上の観察のもと、サッカーの試合におけるスプリントを、

- 能動的スプリント: 自チームが自発的に起こすスプリント
- 受動的スプリント: 相手チームが起こしたスプリントに反応するために起こすスプリント

の 2 つに分解する (仮定 4(1))。能動的なスプリントは体力が残っているほど起こりやすくなるという自然な設定をし (仮定 4(4))、受動的スプリントは相手チームの能動スプリントに対し、ある程度の確率で起こさざるを得ないものとする (仮定 4(2)(3))³

我々の数理モデルでは、選手個人のスプリント回数ではなく、チーム全選手のスプリント回数の合計を扱う。これを総スプリント回数と呼ぶ。

記号 2 チーム 1 を自チーム、チーム 2 を相手チームとする。チーム $i = 1, 2$ の試合時間 t ($0 \leq t \leq T = 90 + \alpha$) までの (累積) 総スプリント回数を $N_i(t)$ とする。簡単のため N_i は実数に値をとる滑らかな関数とする。 $N_i(0) = 0$ であり、 $N_i(T)$ は試合終了時点でのスプリント回数である。

³例えば相手 FW がゴール前でボールをもらうためにスプリントをかけた場合、DF はそれに対応するためスプリントをかけざるを得ないであろう。

記号 3 チーム $i = 1, 2$ の試合時間 t での残り体力を $E_i(t)$ とする. 初期条件 $E_i(0)$ をチームの持久力とよび、持久力は持久力テストから計算されるとする.

仮定 4 チーム $i = 1, 2$ の試合時刻 t での (累積) 総スプリント回数 $N_i(t)$ は次を満たすとする.

- チーム $i = 1, 2$ の総スプリント回数 N_i は能動的なスプリント N_{ia} と受動的なスプリント N_{ip} に分解される:

$$N_i(t) = N_{ia}(t) + N_{ip}(t). \quad (1)$$

- 相手が能動的スプリントを起こした場合、一定の確率 d_i で受動スプリントを起こす:

$$N'_{1p}(t) = d_1 N'_{2a}(t) \quad (2)$$

$$N'_{2p}(t) = d_2 N'_{1a}(t) \quad (3)$$

ここで $d_i \in [0, 1]$ はホーム/アウェイなどのモチベーションで変化する t によらない定数である.

- チーム i の能動スプリントの増加は、チーム i の残り体力 E_i に比例する:

$$N'_{ia}(t) = C_i \times E_i(t) \quad (4)$$

ここで C_i はモチベーションで変化する t によらない定数 $c_i \in [0, 1]$ を用いて $C_i = \frac{\Delta N_0}{E_0} c_i$ と表される. $\frac{\Delta N_0}{E_0}$ は単位残り体力、単位時間あたりのスプリント回数の増加分に対応し、チームによらない定数とする.

選手の体力を減少させるものには、大雑把に分けてスプリントのような短時間で激しく消耗する運動と、試合の流れの中で起こる継続的で比較的緩やかな運動がある (仮定 5(5)). このような継続的な運動を中低速度走行と呼ぼう. 中低速度走行は様々な試合中の場面で起こりうるが、全体としては選手が試合の中で調節できるため、残りの体力に依存してその量が決まるとする (仮定 5(6)).

仮定 5 チーム $i = 1, 2$ の試合時刻 t での残り体力 $E_i(t)$ は次を満たすとする.

- 残り体力 E_i の減少分はスプリントの寄与 e_i^{SPT} と、それ以外の中低速度走行の寄与 e_i^M の和である:

$$E'_i(t) = -e_i^{SPT}(t) - e_i^M(t). \quad (5)$$

- e_i^M は、体力 E_i に比例する:

$$e_i^M(t) = B_i E_i(t). \quad (6)$$

ここで B_i はモチベーションで変化する t によらない定数 $b_i \in [0, 1]$ を用いて $B_i = \frac{\Delta e_0}{E_0} b_i$ と表わされる. $\frac{\Delta e_0}{E_0}$ は単位残り体力での中低速度走行による体力の減少分に対応する.

- e_i^{SPT} はスプリントの増加分で決定される:

$$e_i^{SPT}(t) = L N'_i(t) \quad (7)$$

比例定数 L はスプリント 1 回あたりの体力の減少分に対応する.

2.3 スプリントの数理モデル

(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) から N_{ia} 以外の変数を消去すると次の線形微分方程式を得る.

$$N''_{1a}(t) = -(B_1 + C_1 L) N'_{1a}(t) - C_1 L d_1 N'_{2a}(t), \quad (8)$$

$$N''_{2a}(t) = -(B_2 + C_2 L) N'_{2a}(t) - C_2 L d_2 N'_{1a}(t). \quad (9)$$

一方で

$$p : 1 - p = C_i L : B_i$$

は能動スプリントと中低速度走行の配分と解釈できる. 以下では簡単のため、

- $d_i = 1$ (相手のスプリントには必ず反応する)
- $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = c$ (モチベーションはチームによらず一定)

とする.

$$(C_i L + B_i) / c = (\Delta N_0 L + \Delta e_0) / E_0$$

は $1/T$ (T は試合時間) と解釈できる.

初期条件は

- $N_{ia} = N_{ip} = 0$
- $N'_{ia}(0) = C_i \times E_i(0)$
- $N''_{ia}(0) = -(B_1 + C_1 L) N'_{1a}(0) - C_1 L d_1 N'_{2a}(0)$,

とする. この条件下で上記の微分方程式を解くと次のようになる.

定理 6

$$\begin{aligned} N_{1a}(t) &= \frac{p}{1-p^2} \left(\frac{E_1}{L} - p \frac{E_2}{L} \right) \\ &+ \frac{p}{2(1+p)} \left(-\frac{E_1}{L} - \frac{E_2}{L} \right) \exp\left(c \frac{t}{T} (-1-p)\right) \\ &+ \frac{p}{2(-1+p)} \left(\frac{E_1}{L} - \frac{E_2}{L} \right) \exp\left(c \frac{t}{T} (-1+p)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{1p}(t) &= \frac{p}{1-p^2} \left(\frac{E_2}{L} - p \frac{E_1}{L} \right) \\ &+ \frac{p}{2(1+p)} \left(-\frac{E_2}{L} - \frac{E_1}{L} \right) \exp\left(c \frac{t}{T} (-1-p)\right) \\ &+ \frac{p}{2(-1+p)} \left(\frac{E_2}{L} - \frac{E_1}{L} \right) \exp\left(c \frac{t}{T} (-1+p)\right). \end{aligned}$$

ここで $E_1 = E_1(0)$: チーム 1 の持久力. $E_2 = E_2(0)$ はチーム 2 の持久力とする.

従って $N_{1a} = N_{1a}(T)$, $N_{1p} = N_{1p}(T)$ を試合終了時点 (T) での能動、受動的スプリント回数とすると、 N_{1a} と N_{1p} を持久力 E_1 , E_2 から計算する式が次で得られる.

定理 7

$$\begin{aligned} N_{1a} &= \frac{p}{1-p^2} \left(\frac{E_1}{L} - p \frac{E_2}{L} \right) + \frac{p}{2(1+p)} \left(-\frac{E_1}{L} - \frac{E_2}{L} \right) \exp(c(-1-p)) \\ &+ \frac{p}{2(-1+p)} \left(\frac{E_1}{L} - \frac{E_2}{L} \right) \exp(c(-1+p)). \\ N_{1p} &= \frac{p}{1-p^2} \left(\frac{E_2}{L} - p \frac{E_1}{L} \right) + \frac{p}{2(1+p)} \left(-\frac{E_2}{L} - \frac{E_1}{L} \right) \exp(c(-1-p)) \\ &+ \frac{p}{2(-1+p)} \left(\frac{E_2}{L} - \frac{E_1}{L} \right) \exp(c(-1+p)). \end{aligned}$$

2.4 考察

ここでは定理7で得られた、試合終了時点 T でのスプリント回数 $N_1 = N_{1a} + N_{1p}$ のモデルを具体的な値で計算する。以下の図は相手チームの持久力を固定 ($E_2 = 1000L$)⁴し、自チームの持久力 E_1 (横軸) を変化させた場合の、自チームのスプリント回数 (縦軸) の変化を描いたものである。能動のスプリント N_{1a} は赤で、受動的スプリント N_{1p} は青で、総スプリント N_1 は緑で描かれている。左の図がモチベーションが高い場合 ($c = 1$) で、右の図がモチベーションが低い場合 ($c = 0.5$) に対応する。スプリントと中低速度走行の割合 p は 0.5 としてある。

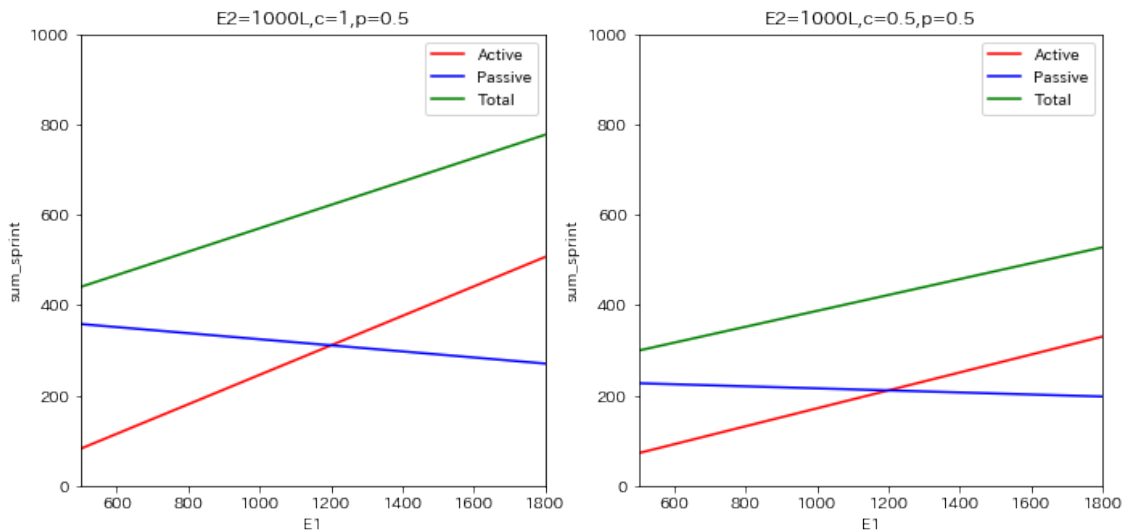


図 2: 自チームの持久力の向上とスプリント回数

上の図から次が分かる。

- 自チームの持久力 E_1 が上がると能動スプリントは増加するが受動スプリントは減少する。全体として総スプリントは増加する。

自チームの持久力が向上した場合に自チームの受動的スプリントが減少する理由は次である。すなわち自チームの持久力が向上すると、自チームの能動スプリントが増加する。するとそれに対応するために、相手チームの受動スプリントが増加する。相手チームは受動的スプリントで体力を奪われるために、能動のスプリントが減少する。結果として自チームの受動スプリントは減少する。

3 持久力の換算モデル

この節では、様々な持久力テストから持久力を換算するための簡易的な数理モデルを与える。この節での持久力テストとは、

- ある一定の距離を走行するのにかかる最短時間の計測 (陸上競技種目の中長距離走など)
- ある一定の時間内で走行できる最長距離の計測 (持久力テストの一つである 12 分間走など)

のいずれかであるとし、途中にインターバルのないテストとする。(a) の距離や (b) の時間を変化させたとき、持久力テストの結果がどのように変化するかを記述することがこの節の目標である。

我々の数理モデルでは酸素摂取量と呼ばれる指標を導入する。Daniels は [3] において、最大酸素摂取量から長距離走の結果を予測する表を与えている。高橋らは [2] において、12 分間走の結果から推定

⁴ $E_2 = 1000L$ は次を意味する: 体力を全てスプリントに費やした場合にチーム 2 全体で 1000 回のスプリントをする能力がある。

された最大酸素摂取量から、マラソン平均速度を算出する方法を提案している。この節ではこのような酸素摂取量と持久力テストの関係を数理モデルとして整理し、[2, 3] で与えられているような関係の背後にある原理を提案したい。

3.1 酸素摂取量

体重 1kg あたり 1 分あたりに摂取する酸素の量 [mL] を酸素摂取量と呼ぶ。酸素摂取量は個人によって異なり、安静時と運動時で変化する。一定速度 V [m/分] で継続して走行しているときの酸素摂取量を $VO_2(V)$ [mL/(kg・分)] と書く。個人の酸素摂取量の最大値を VO_{2max} と書き、最大酸素摂取量と呼ぶ。 $\%VO_2$ を

$$\%VO_2 = \frac{VO_2}{VO_{2max}}$$

で定義する。

酸素摂取量について、我々の数理モデルでは次を 2 つの仮定する。

仮定 8 (1) 速度 V [m/分] で走行時の酸素摂取量 $VO_2(V)$ [mL/(kg・分)] は選手によらない。関数 VO_2 は単調増加関数である。

(2) 同一 $\%VO_2 = VO_2/VO_{2max}$ 下での継続走行時間 $D(\%VO_2)$ [分] は選手によらない。関数 D は単調減少関数である。

上記の仮定に基づき、簡単のため次を仮定する。

仮定 9 (1') $VO_2(V) = aV$ (a は正の定数)。

(2') $D(\%VO_2) = b(\%VO_2)^{-r}$ (b, r は正の定数)。

注釈 10 高橋らは [2] において、各被験者のトレッドミル⁵上での速度と酸素摂取量の間強い相関 ($r = 0.923, p < 0.001$) を示すデータとその回帰式が与えられている。[2] ではこの回帰式を用いて、マラソン平均速度の予測法を与えており、仮定 8(1) は [2] と共通しているといえる。一方 [2] では各被験者のマラソン平均速度とトレッドミル上での速度・酸素摂取量のデータを踏まえ、マラソンでの $\%VO_2$ を 75% に基準として固定し、マラソン平均速度の予測法を与えている。つまり (時間ではなく) 距離が一定の場合に $\%VO_2$ は一定と仮定しているため、仮定 8(2) とはこの点で設定が異なる。Daniels は [3] において仮定 8 と同様の性質に言及しており、ランニング速度と酸素摂取量の関係を示すグラフや、レース継続時間と $\%VO_2$ の関係を示すグラフを掲示している。

3.2 持久力テストと最大酸素摂取量

体力テスト (a)(b) においてプレーヤーは速度一定で走行し、常に最大のパフォーマンスを発揮するとする。このとき仮定 8 から、持久力テストと VO_{2max} の関係が次のように得られる。

補題 11 (持久力テスト $\rightarrow VO_{2max}$) T [分] での継続走行距離が L [m] のとき (あるいは L [m] 走タイムが T [分]) のとき、プレーヤーの VO_{2max} は

$$VO_{2max} = \frac{VO_2(\frac{L}{T})}{D^{-1}(T)}$$

で与えられる。

補題 12 ($VO_{2max} \rightarrow$ 持久力テスト) プレーヤー VO_{2max} が既知のとき、 T' [分] での継続走行距離 L' [m] は

$$L' = (VO_2)^{-1}(D^{-1}(T')VO_{2max})T'$$

で与えられる。

⁵屋内のランニングマシン。マスクをつけて呼気ガスを採取することで酸素摂取量を同時測定できる。

3.3 変換公式

補題 11、12 において、さらに仮定 9 を用いると次が得られる.

補題 13 (変換公式) T [分]での継続走行距離が L [m] で T' [分]での継続走行距離が L' [m] の時

$$\frac{L'}{L} = \left(\frac{T'}{T}\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

が成立する.

3.4 r の計算

Daniels は [3] で $1500m$, $3000m$, $5000m$, $10000m$, $15000m$ 及びハーフマラソン、フルマラソンのタイムと VO_2max の対応表を与えている. 図 3 は Daniels の対応表から補題 13 の

$$1/r = 1 - (\log \frac{L'}{L}) / (\log \frac{T'}{T})$$

の値を計算したものである. 例えば $3000/1500$ は L, L' として $1500m$, $3000m$ を利用している. $1/r$ は 0.05 から 0.07 のあたりの値であることがわかる. ただし短距離では $1/r$ が大きくなる傾向にあることが分かる.

注釈 14 Daniels の表がどのように得られているかは [3] には言及されていないが、Daniels は本節のような公式をすでに確立している可能性はある.

4 終わりに

本論文では、チームのモチベーションや相手チームのパフォーマンスを組みこんだ、チームのスプリント回数の簡易的な数理モデルを構築した. このモデルの特徴的な点はチームのスプリントを自チームが自発的に起こした能動的スプリントと、相手チームのスプリントに反応するために起こした受動的スプリントに分解したことである. 本論文では残念ながらデータによる検討が十分とは言えない. スプリントの位置データや相手のスプリントデータを取得し、能動スプリントと受動スプリントを区別することで、2.2 節の仮定や 2.4 節での考察を確かめることが求められるであろう. 微分方程式を解く過程では簡単のためスプリント反応確率 d_i を 1 とし、モチベーション b_i や c_i を一定値 c としたが、これらの値を自チームと相手チームで変えることは今後の課題である.

本論文では、酸素摂取量という指標に着目し、異なる持久力テストであっても持久力を換算できる簡易的な数理モデルを構築した. 現段階ではデータの提示が不十分であるため、同一人物の、異なる種類の持久力テストのデータ (タイム計測、距離計測、往復回数計測) を用いてこの数理モデルや仮定 8 の検証が必要である. また本論文では選手が走行の間に挟む休息による回復を考慮していなかった. 今後インターバルのある持久力テストとインターバルのない持久力テストを比較することで回復力の項を持久力の数理モデルに組み込むことが求められる.

VO2max	3000/1500	5000/3000	10000/5000	15000/10000	21097/15000	42195/21097
30	0.0714	0.0484	0.0531	0.0615	0.0576	0.0348
31	0.0747	0.0485	0.0528	0.0619	0.0587	0.0362
32	0.0744	0.0505	0.0523	0.0623	0.0594	0.0375
33	0.0754	0.0509	0.0521	0.0620	0.0601	0.0391
34	0.0772	0.0500	0.0517	0.0624	0.0612	0.0402
35	0.0791	0.0523	0.0510	0.0623	0.0615	0.0417
36	0.0817	0.0526	0.0507	0.0621	0.0622	0.0430
37	0.0801	0.0537	0.0506	0.0620	0.0628	0.0440
38	0.0819	0.0547	0.0502	0.0620	0.0630	0.0452
39	0.0846	0.0558	0.0505	0.0612	0.0636	0.0463
40	0.0863	0.0555	0.0499	0.0616	0.0636	0.0474
41	0.0843	0.0566	0.0501	0.0606	0.0641	0.0484
42	0.0840	0.0567	0.0500	0.0603	0.0644	0.0494
43	0.0848	0.0589	0.0507	0.0598	0.0647	0.0503
44	0.0864	0.0602	0.0499	0.0597	0.0645	0.0513
45	0.0870	0.0611	0.0496	0.0595	0.0648	0.0519
46	0.0865	0.0613	0.0497	0.0598	0.0645	0.0527
47	0.0891	0.0619	0.0493	0.0595	0.0648	0.0536
48	0.0875	0.0632	0.0499	0.0584	0.0650	0.0544
49	0.0869	0.0657	0.0488	0.0590	0.0643	0.0551
50	0.0883	0.0654	0.0490	0.0582	0.0645	0.0558
51	0.0898	0.0650	0.0498	0.0581	0.0647	0.0562
52	0.0867	0.0672	0.0496	0.0578	0.0643	0.0569
53	0.0904	0.0673	0.0493	0.0574	0.0644	0.0574
54	0.0907	0.0699	0.0491	0.0574	0.0643	0.0577
55	0.0920	0.0678	0.0498	0.0563	0.0643	0.0585
56	0.0897	0.0682	0.0506	0.0560	0.0641	0.0586
57	0.0899	0.0714	0.0495	0.0558	0.0637	0.0593
58	0.0899	0.0705	0.0499	0.0556	0.0638	0.0596
59	0.0912	0.0712	0.0509	0.0554	0.0632	0.0600
60	0.0924	0.0724	0.0501	0.0541	0.0632	0.0604
61	0.0898	0.0734	0.0508	0.0540	0.0628	0.0608
62	0.0923	0.0730	0.0503	0.0541	0.0628	0.0610
63	0.0894	0.0715	0.0518	0.0531	0.0628	0.0612
64	0.0907	0.0749	0.0512	0.0527	0.0624	0.0615
65	0.0905	0.0755	0.0515	0.0531	0.0616	0.0619
66	0.0888	0.0764	0.0505	0.0534	0.0621	0.0619
67	0.0884	0.0733	0.0528	0.0526	0.0613	0.0621
68	0.0925	0.0764	0.0514	0.0521	0.0613	0.0624
69	0.0907	0.0774	0.0524	0.0521	0.0606	0.0625
70	0.0903	0.0787	0.0522	0.0513	0.0611	0.0625
71	0.0913	0.0769	0.0532	0.0516	0.0602	0.0625
72	0.0924	0.0762	0.0538	0.0507	0.0601	0.0627
73	0.0872	0.0766	0.0540	0.0501	0.0598	0.0629
74	0.0882	0.0782	0.0532	0.0504	0.0594	0.0630
75	0.0893	0.0787	0.0538	0.0505	0.0593	0.0631
76	0.0871	0.0816	0.0539	0.0492	0.0589	0.0630
77	0.0897	0.0800	0.0554	0.0497	0.0576	0.0633
78	0.0872	0.0787	0.0551	0.0497	0.0586	0.0631
79	0.0881	0.0774	0.0557	0.0497	0.0578	0.0631
80	0.0858	0.0829	0.0543	0.0502	0.0568	0.0632
81	0.0867	0.0828	0.0548	0.0491	0.0566	0.0633
82	0.0841	0.0828	0.0554	0.0485	0.0571	0.0630
83	0.0850	0.0827	0.0564	0.0476	0.0574	0.0630
84	0.0875	0.0817	0.0560	0.0492	0.0563	0.0628
85	0.0848	0.0830	0.0570	0.0471	0.0569	0.0629

図 3: Daniels のペース換算表から r の値を計算した表

参考文献

- [1] J. Bangsbo and F.M. Iaia, P. Krstrup. *The Yo-Yo intermittent recovery test: a useful tool for evaluation of physical performance in intermittent sports*. Sports medicine 38 (2008), p.37-51.
- [2] 高橋 篤志他. マラソン記録の簡便な予測法—12 分間走テストによる最大酸素摂取量とマラソンレースでの推定 %VO₂max の関係から. 大阪総合保育大学紀要 12 号 (2018), p.43-50.
- [3] ジャックダニエルズ (著), 前河洋一 (監修), 篠原美穂 (翻訳). *ダニエルズのランニングフォーミュラ*. ベースボール・マガジン社 (2012) 248p.
- [4] 公益社団法人 日本プロサッカーリーグ. *Jリーグの 2022 年の成績・データ*. Jリーグ公式ウェブサイト. <https://www.jleague.jp>, (参照 2023-10).
- [5] データスタジアム株式会社. *横浜 F・マリノス 2022 日程・結果・試合比較*. Football Lab. <https://www.football-lab.jp>, (参照 2023-10).