

論文の内容の要旨

Rigorous Results for $SU(N)$ Ferromagnetism
in Hubbard-type Models

(Hubbard 型模型における $SU(N)$ 強磁性に関する厳密な結果)

氏名 田村 健祐

近年、冷却原子系の制御技術の向上により、実験的に様々な量子系をシミュレーションすることが可能になっている。冷却原子系は解析的に解くことが困難な模型を量子シミュレーションする目的で有望視されているが、興味深いことに、従来は対応物が無かったような系までも冷却原子系を用いて実現することが可能である。それゆえ、冷却原子系はそれ自身が興味深い物理系としても注目を集めている。冷却原子系で実現される新規な物理系のひとつとして、 $SU(N)$ 対称性を持つ N 成分フェルミオン系が挙げられる。実験ではアルカリ土類金属に類する原子を用いて、このような高い対称性を持つフェルミオン系の実現が報告されている。この時、原子の核スピン自由度が多成分の内部自由度に対応し、核スピンの大きさを I とすると、成分数 N は $N = 2I + 1$ で与えられる。光学格子中にトラップされたこのような冷却原子系は、 $SU(N)$ Fermi-Hubbard 模型 (FHM) で記述され、この模型は固体中の電子を記述する模型である $SU(2)$ FHM の一般化と言える。上述の冷却原子系における実現をきっかけに、 $SU(N)$ FHM は理論的にも興味を集めている。このような模型を調べる上で、数学的に厳密な結果はより現実的な状況を理解するための基礎を与える。従ってそのような結果の存在が望ましいが、運動項とオンサイトの相互作用項からなる $SU(N)$ FHM は、その両者の競合のために一般に厳密な取り扱いが困難である。

$SU(2)$ FHM においてはいくつかの厳密な結果が知られている。最初に確立された厳密な結果は長岡強磁性と呼ばれるものである。これは、ホールが一つだけあるような粒子数において無限大のオンサイト斥力相互作用を考えたときに、ある条件のもとでは基底状態が強磁性を示すというものである。これは近年の先行研究に

より、 $SU(N)$ FHM への拡張がなされている。ここで長岡強磁性は相互作用のパラメータが無限大であることを仮定している点で、特異性のある模型における厳密な結果であることに注意する。また $SU(2)$ の場合の別の厳密な結果の例として、平坦バンド強磁性が知られる。ここで平坦バンドとは一粒子エネルギー準位に系のサイズに比例するような巨視的な縮退が生じるような構造を指す。 $SU(2)$ FHM に対しては、対応する一粒子エネルギースペクトルの最低エネルギーに平坦バンドが現れる時、その縮退度と同じ粒子数の多体問題の基底状態が強磁性的であることが厳密に証明されている。これも、近年の先行研究で一般の $SU(N)$ に一部の結果が拡張されている。なお平坦バンド強磁性もまた、状態密度に発散を伴う状況を考えているという意味で、特異性のある模型に対する厳密な結果と言える。平坦バンド強磁性においては、平坦バンドに分散を与えるような摂動に対する強磁性の安定性も議論されており、ある特定の摂動に対して強磁性が安定であることが厳密に証明されている。これは、上述した状態密度の発散が取り除かれているという意味で、特異性のない模型における厳密な結果と言える。 $SU(2)$ FHM においてはこの安定性に関する結果が任意の d 次元において証明されている一方で、 $SU(N)$ FHM においては対応する厳密な結果は一次元系のみに限られており、高次元では議論されていなかった。さらに、平坦バンドを持つタイトバインディング模型を構成する方法はさまざまな構成法が知られるが、 $SU(2)$ FHM の平坦バンド強磁性に関しては、一般の平坦バンドを持つ FHM が強磁性を示すための必要十分条件も確立されている。これは任意の平坦バンドに対して、 $SU(2)$ FHM が強磁性を示すか否かの基準を与え、平坦バンド強磁性の一般論と言える。一方で、 $SU(N)$ FHM において対応する平坦バンド強磁性の一般論は得られていなかった。

本論文では、 $SU(N)$ FHM を主な対象とし $SU(N)$ 対称な模型に対する厳密な結果を新たに与える。本論文の主要部分は第 4 章と第 5 章の二部からなる。

第 4 章では $d(\geq 2)$ 次元格子系における $SU(N)$ FHM を考え、厳密な結果を確立する。最初に最低バンドとして平坦バンドを持つ $SU(N)$ FHM を考え、粒子数が平坦バンドの縮退に等しいときに $SU(N)$ 強磁性を示すことを証明する。その後、第 4 章の主題として、最低バンドに分散をもたらすような摂動を与えた場合の $SU(N)$ 強磁性を議論する。そして、特定の摂動のもとで、最低バンドのバンド幅に対し、バンドギャップおよびオンサイトの斥力相互作用が十分大きな時に、やはり基底状態が $SU(N)$ 強磁性的であることを証明する。

第 5 章では $SU(N)$ FHM における平坦バンド強磁性の一般論を展開する。最低エネルギーに縮退があるようなホッピング行列を考え、そのようなホッピング行列を持つ $SU(N)$ FHM を考える。この時、 $SU(N)$ FHM が強磁性を示すための必要十分条件を確立する。一粒子エネルギースペクトルの最低エネルギー状態への射影行列のある種の既約性が、 $SU(N)$ 強磁性の発現と等価であることが示される。さらに論文ではこの結果を $SU(N)$ 近藤格子模型 (KLM) に応用する。その結果、 $SU(N)$ FHM が強磁性を示すようなホッピング行列に対し、同じホッピング行列を持つ $SU(N)$ KLM もある条件のもとで強磁性を示すことが証明される。