論文の内容の要旨

論文題目

A group action on higher Chow cycles on a family of Kummer surfaces

(あるクンマー曲面族の上の高次チャウサイクルへの群作用について)

氏 名　　佐藤　　謙

体 k 上の代数多様体 X に対して，高次 Chow 群と呼ばれる，Chow 群を一般化したものが Bloch により定義された（[Blo86]）．X が k 上滑らかなとき，高次 Chow 群 $\mathrm{CH}^p(X,q)$ はモチヴィックコホモロジーと一致することが知られており，数論的，代数幾何的観点から興味深い対象であるが，その構造はほとんどの場合わかっていない．本論文では，X が楕円曲線の直積に付随する Kummer 曲面の場合に，高次 Chow 群 $\mathrm{CH}^2(X,1)$ の群論的性質を調べることを目的とする．

高次 Chow 群には以下のような交叉積と呼ばれる写像が存在する．

$$\mathrm{CH}^1(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{CH}^1(X,1)\longrightarrow \mathrm{CH}^2(X,1) \tag{1}$$

この写像の余核を $\mathrm{CH}^2(X,1)$ の非分解部分 (indecomposable part) と言い，$\mathrm{CH}^2(X,1)_{\mathrm{ind}}$ と書く．$\mathrm{CH}^1(X)$ および $\mathrm{CH}^1(X,1)$ はそれぞれ $\mathrm{Pic}(X)$ および $\Gamma(X,\mathcal{O}_X^{\times})$ という既存の不変量で表されることから，$\mathrm{CH}^2(X,1)$ の興味深い部分はその非分解部分 $\mathrm{CH}^2(X,1)_{\mathrm{ind}}$ にある．本論文の目的は，高次 Chow 群の元を具体的に構成し，Beilinson レギュレーター写像による像を考えることで，$\mathrm{CH}^2(X,1)_{\mathrm{ind}}$ のアーベル群としての階数を下から評価することである．

[GL99]，[Mül97]，[CDKL16]，[Asa16] などの先行研究においては，$X\to S$ という多様体の族を考え，その多様体族の上で高次 Chow サイクルの族 $\{\xi_s\}_{s\in S}$ を構成し，$s\in S$ を変化させたときに，ξ_s のレギュレーター写像による像がどう変化するかを調べ，十分一般[*1]の $s\in S$ に対して ξ_s が非分解的であることを示すことで，十分一般のファイバー X_s について，$\mathrm{CH}^2(X_s,1)_{\mathrm{ind}}$ の非自明性に関する結果を得ている．

本論文においても同様の方法を用いる．まず $\mathcal{X}^{\circ}\to T^{\circ}$ という，楕円曲線の直積に付随する Kummer 曲面からなる族を考え，$\mathcal{X}^{\circ}\to T^{\circ}$ 上で，$\Xi=\{\Xi_t\subset \mathrm{CH}^2(\mathcal{X}_t,1)\}_{t\in T^{\circ}}$ という高次 Chow 群の部分群からなる族を構成する（ここで，$\mathcal{X}_t$ は $t\in T^{\circ}$ の上のファイバーである）．次に，transcendental regulator map と呼ばれる，レギュレーター写像と自然な射影を合成した次の写像による Ξ_t の像を考える．

$$r:\mathrm{CH}^2(\mathcal{X}_t,1)\longrightarrow H^{2,0}(\mathcal{X}_t^{\mathrm{an}})^{\vee}/H_2(\mathcal{X}_t^{\mathrm{an}},\mathbb{Z}) \tag{2}$$

*1 本論文では，パラメータ空間 S の可算個の解析的部分集合を除いた点で主張が成り立つことを，「十分一般 (very general) の $s\in S$ に対して成り立つ」と定義している．

上記の transcendental regulator map は本論文中では r と書かれる．transcendental regulator map は高次 Chow 群の非分解部分 $\mathrm{CH}^2(X,1)_{\mathrm{ind}}$ を経由することから，$r(\Xi_t)$ の階数を調べることで，$\mathrm{CH}^2(X,1)_{\mathrm{ind}}$ の階数の下からの評価が得られる．本論文の主結果は以下の定理 1 である．

定理 1. 十分一般の $t \in T^\circ$ に対して，

$$\operatorname{rank} r(\Xi_t) = 18 \tag{3}$$

が成り立つ．特に，十分一般の $t \in T^\circ$ に対して，$\operatorname{rank} \mathrm{CH}^2(\mathcal{X}_t,1)_{\mathrm{ind}} \geq 18$ である．

本論文で考察している多様体族 $\mathcal{X}^\circ \to T^\circ$ のファイバーに現れる Kummer 曲面は，先行研究 [CDKL16] の 6 章において研究されているものと同じであり，十分一般の $t \in T^\circ$ に対して $\mathrm{CH}^2(\mathcal{X}_t,1)_{\mathrm{ind}} \neq 0$ が成り立つことは [CDKL16] により知られていた．定理 1 はその評価を改良するものである．さらに，本論文で扱う高次 Chow サイクルの族は，[CDKL16] での構成と異なり，$\mathcal{X}_t$ が $\mathbb{P}^1_k \times_k \mathbb{P}^1_k$ の 2 重被覆の特異点解消であることに基づいて構成されており，レギュレーター写像による像が (6) のように比較的簡単な積分表示を持つという長所がある．以下では定理 1 の証明の方針を述べる．

まず，本論文の 4 節で多様体族 $\mathcal{X}^\circ \to T^\circ$ の自己同型からなる部分群 $\widetilde{G}$ が構成される．ここで，$\mathcal{X}^\circ \to T^\circ$ の自己同型とは，$\mathcal{X}^\circ$ の自己同型 $\widetilde{\rho}$ と T° の自己同型 $\underline{\rho}$ のペアであって，次の図式を可換にするものである．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}^\circ & \xrightarrow{\widetilde{\rho}} & \mathcal{X}^\circ \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^\circ & \xrightarrow{\underline{\rho}} & T^\circ \end{array} \tag{4}$$

次に，本論文の 5 節において，全空間 $\mathcal{X}^\circ$ の高次 Chow 群 $\mathrm{CH}^2(\mathcal{X}^\circ,1)$ の部分群 Ξ^{can} が構成され，Ξ^{can} の $\widetilde{G}$ 作用による像を足し合わせたものとして，$\Xi \subset \mathrm{CH}^2(\mathcal{X}^\circ,1)$ が定義される．このように底空間も自己同型で動くことを許すことで，より多くの高次 Chow サイクルを得ることができる．Ξ の各ファイバー $\mathcal{X}_t$ への制限 $\Xi_t \subset \mathrm{CH}^2(\mathcal{X}_t,1)$ を考えることで，Ξ は高次 Chow 群の部分群からなる族 $\{\Xi_t\}_{t\in T^\circ}$ とみなされる．

さらに，$t \in T^\circ$ を動かしたときの $r(\Xi_t)$ の振る舞いを調べる．本論文では relative transcendental regulator map と呼ばれる，次の写像を考える．これは 9 節において定義される．

$$R_\omega : \Xi \longrightarrow \mathcal{Q}_\omega(T^\circ) \tag{5}$$

ここで，$\mathcal{Q}_\omega$ は T° 上の正則関数からなる層を，$\mathcal{X}^\circ \to T^\circ$ の周期を与えるような関数で生成される局所定数層で割った $\mathbb{Q}$ 線形層であり，各 $t \in T^\circ$ に対して，$\mathcal{Q}_\omega(T^\circ) \to (H^{2,0}(\mathcal{X}_t^{\mathrm{an}}))^\vee / H_2(\mathcal{X}_t^{\mathrm{an}},\mathbb{Q})$ という評価写像を持つ．relative transcendental regulator map R_ω は，Ξ の各元 $\xi = \{\xi_t\}_{t\in T^\circ}$ に対して，$R_\omega(\xi)$ を $t \in T^\circ$ で評価した値が，$r(\xi_t)$ と（振れ部分を除いて）一致するような写像である．この写像は，先行研究の [CDKL16] や [dAM08] で考察されている，高次 Chow サイクルの族に対して，T° 上の normal function を対応させるような写像に他ならない．

これにより，定理 1 の証明は，$R_\omega(\Xi)$ の階数の評価に帰着されるため，$R_\omega(\Xi)$ を具体的に表示することを考える．R_ω の自然性より，$\mathcal{Q}_\omega$ には，R_ω が $\widetilde{G}$ 同変となるような $\widetilde{G}$ 作用が定まる．6 節の結果により，Ξ はある特定の元 $\xi_1 - \xi_0$ の $\widetilde{G}$ 作用による像で生成されることがわかるから，まず $\xi_1 - \xi_0$ の R_ω による像を計算し，その像を $\mathcal{Q}_\omega$ の $\widetilde{G}$ 作用で動かすことで $R_\omega(\Xi)$ を計算する．

$R_\omega(\xi_1 - \xi_0)$ は実質的に 8 節で計算される．$R_\omega(\xi_1 - \xi_0)$ は，次のような積分表示を持つ T° 上の多価正則関数 $\mathcal{L}$ を用いて表される．ここで，a, b は T° の局所座標で，積分領域は $\triangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < y < x < 1\}$

である．

$$\mathcal{L}(a,b)=\int_{\triangle}\frac{dxdy}{\sqrt{x(1-x)(1-ax)}\sqrt{y(1-y)(1-by)}} \tag{6}$$

これにより $R_\omega(\Xi)$ の各元は上記の多価正則関数 $\mathcal{L}$ を用いて表すことができるが，多価性のために，$R_\omega(\Xi)$ の元の $\mathbb{Q}$ 上線形独立性を直接示すことは難しい．そこで多価性を消すために，さらに $R_\omega(\Xi)$ の Picard-Fuchs 微分作用素による像を考える．

Picard-Fuchs 微分作用素とは，多様体族 $\mathcal{X}^\circ \to T^\circ$ の周期を与えるような関数を消すような T° 上の微分作用素であり，定義から層 $\mathcal{Q}_\omega$ を経由することがわかる．$\mathcal{X}^\circ \to T^\circ$ の周期が Gauss の超幾何関数 ${}_2F_1$ の 2 つの積で書けることから，次のような微分作用素 $\mathscr{D}$ が $\mathcal{X}^\circ \to T^\circ$ の Picard-Fuchs 微分作用素になっていることが 7 節で示される．

$$\mathscr{D}=\begin{pmatrix} a(1-a)\frac{\partial^2}{\partial a^2}+(1-2a)\frac{\partial}{\partial a}-\frac{1}{4} \\ b(1-b)\frac{\partial^2}{\partial b^2}+(1-2b)\frac{\partial}{\partial b}-\frac{1}{4}\end{pmatrix}:\mathcal{Q}_\omega\to\mathcal{O}^{\oplus 2} \tag{7}$$

Picard-Fuchs 微分作用素 $\mathscr{D}$ についても，$\mathscr{D}$ が $\widetilde{G}$ 同変となるような $\widetilde{G}$ 作用が $\mathcal{O}^{\oplus 2}$ 上に定まるから，$\mathscr{D}\circ R_\omega(\Xi)$ は $\mathscr{D}\circ R_\omega(\xi_1-\xi_0)\in\mathcal{O}(T^\circ)^{\oplus 2}$ の $\widetilde{G}$ 作用による像で生成される．ここで $R_\omega(\xi_1-\xi_0)$ は (6) で定まる多価正則関数 $\mathcal{L}$ の像として表されていたから，$\mathscr{D}\circ R_\omega(\xi_1-\xi_0)$ の計算のためには，Picard-Fuchs 作用素 $\mathscr{D}$ による多価正則関数 $\mathcal{L}$ の像を計算すればよく，これは

$$\mathscr{D}(\mathcal{L})=\frac{1}{a-b}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{1-b}}{\sqrt{1-a}}-1 \\ 1-\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1-b}}\end{pmatrix} \tag{8}$$

のように T° 上の多項式関数[*2]を用いて簡潔に表示される．これにより $\mathscr{D}\circ R_\omega$ による Ξ の像は，論文中の表 8 のような 18 個の $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立な元を持つことがわかり，$R_\omega(\Xi)$ の階数が 18 であることが示され，従って定理 1 が示される．

参考文献

[Asa16] M. Asakura, A simple construction of regulator indecomposable higher Chow cycles in elliptic surfaces. Recent advances in Hodge theory, 231–240, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 427, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2016.

[Blo86] S. Bloch, Algebraic cycles and higher K-theory. Adv. in Math. 61 (1986), no. 3, 267–304.

[CDKL16] X. Chen, C. Doran, M. Kerr and J. D. Lewis, Normal functions, Picard-Fuchs equations, and elliptic fibrations on K3 surfaces, J. Reine Angew. Math. 721 (2016).

[dAM08] P. L. del Angel, S. Müller-Stach, Differential equations associated to families of algebraic cycles. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 58 (2008), no. 6, 2075–2085.

[GL99] B. Gordon and J. D. Lewis, Indecomposable higher Chow cycles on products of elliptic curves. J. Algebraic Geom. 8 (1999), no. 3, 543–567

[Mül97] S. Müller-Stach, Constructing indecomposable motivic cohomology classes on algebraic surfaces. J. Algebraic Geom. 6 (1997), no. 3, 513–543.

[*2] $\sqrt{1-a},\sqrt{1-b},a-b$ は T° 上の関数環の可逆元である．