

論文の内容の要旨

論文題目 Irreducible module decompositions of rank 2
symmetric hyperbolic Kac-Moody Lie algebras by \mathfrak{sl}_2 subalgebras
which are generalizations of principal \mathfrak{sl}_2 subalgebras
(主 \mathfrak{sl}_2 部分代数の一般化である \mathfrak{sl}_2 部分代数による rank 2 対称
双曲型 Kac-Moody Lie 代数の既約分解)

氏名 鶴崎 修功

有限次元単純リー代数 \mathfrak{g} における nilpotent orbit とは、 \mathfrak{g} の nilpotent な元 x に内部自己同型を作用させたときに得られる orbit のことである。[Dyn57] において、これらは weighted Dynkin diagram によって分類されている。Jacobson-Morozov の定理より、 \mathfrak{g} の nilpotent な元 x に対し、 x を nilpositive element とする \mathfrak{sl}_2 -triple を構成することができる ([CM93, Theorem 3.3.1])。これにより、 \mathfrak{g} の nilpotent orbit を分類することと、 \mathfrak{g} の \mathfrak{sl}_2 -triple を、内部自己同型の作用で移り合うものを同一視した同値類を分類することが等しくなる。有限次元単純リー代数 \mathfrak{g} の nilpotent orbit の中で、代数多様体としての次元が最大であるものを principal nilpotent orbit という。これに対し、compact involution と compatible な principal $SO(3)$ subalgebra を構成することができる ([Kos59])。

Kac-Moody Lie algebra とは、有限次元単純リー代数の拡張となるものであり、finite type, affine type, indefinite type の 3 種類に分類される。finite type が有限次元単純リー代数に対応する。indefinite Kac-Moody Lie algebra の中に、hyperbolic Kac-Moody Lie algebra というクラスがある。hyperbolic Kac-Moody Lie algebra とは、indefinite type の Kac-Moody Lie algebra であって、Dynkin diagram の任意の真の subdiagram が finite or affine type になるもののことである。

上記の理論のアナロジーで、[NO01] では、hyperbolic Kac-Moody Lie algebra に対し、その principal $SO(1,2)$ subalgebra を構成した。なお、[GOW02] では、hyperbolic でない indefinite Kac-Moody Lie algebra に対しても principal $SO(1,2)$ subalgebra が構成できることがあることを示している。

この principal $SO(1,2)$ subalgebra に対応して、hyperbolic Kac-Moody Lie algebra の中に principal \mathfrak{sl}_2 -subalgebra を構成することができる。[Tsu] では、rank 2 symmetric Kac-Moody Lie algebra に限定し、さらに nilpositive element が real root vector の張る空間に存在するという条件のもと、principal に限らな

い \mathfrak{sl}_2 -triple のクラスを構成し、また、neutral element H が dominant である場合については、全てを分類した。

本論文では、[Tsu] で構成した hyperbolic Kac-Moody Lie algebra \mathfrak{g} の \mathfrak{sl}_2 subalgebra について、これの \mathfrak{g} への作用で \mathfrak{g} が既約 \mathfrak{sl}_2 -module に分解することを示した。詳細は以下の通りである。

\mathfrak{s} を [Tsu] で構成した \mathfrak{sl}_2 subalgebra とする。 H, X, Y を \mathfrak{sl}_2 triple とし、 \mathfrak{s} は H, X, Y で張られているとする。 \mathfrak{g} の Chevalley generators を e_i, f_i, h_i , ($i = 0, \dots, n-1$) とおく。 h_i たちで \mathbb{R} 上張られる空間を $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ とおく。[Kac90, Theorem 2.2] より、 \mathfrak{g} には standard form とよばれる \mathbb{C} -値非退化不変対称双線型形式 $(\cdot | \cdot)$ が入る。compact involution とよばれる \mathfrak{g} の antilinear automorphism ω_0 を次のように定める。

$$\begin{aligned}\omega_0(e_i) &= -f_i \\ \omega_0(f_i) &= -e_i \quad (i = 0, \dots, n-1) \\ \omega_0(h) &= -h \quad (h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}})\end{aligned}$$

[Kac90, §2.7] より、 \mathfrak{g} 上の非退化エルミート形式 $(\cdot | \cdot)_0$ を $(x | y)_0 = -(\omega_0(x) | y)$ で定めることができる。

\mathfrak{s} -module $V \subset \mathfrak{g}$ が unitarizable であるとは、次の条件がみたされることである。

- (i) V 上 $(\cdot | \cdot)_0$ が正定値である。
- (ii) $v_1, v_2 \in V$ および $s \in \mathfrak{s}$ に対し、次が成り立つ。

$$([s, v_1], v_2)_0 = -(v_1, [\omega_0(s), v_2])_0$$

Theorem 1 (本文 Theorem 4.5). \mathfrak{g} は、 \mathfrak{s} 自身を直和成分に含むような、既約 \mathfrak{s} -module の直和に分解する。 \mathfrak{s} 以外の全ての直和成分は unitarizable になる。

また、この分解で highest weight module, lowest weight module, highest weight module でも lowest weight module でもない module がどれだけ出てくるかを分類した。ルート $s\alpha_1 + t\alpha_2$ を xy 平面上の点 (s, t) と同一視し、 xy 平面上の領域 $L, -L$ を §5 で定める。ルート α が $\alpha(H) \in (0, 2)$ をみたすとき $\alpha \in L$ であり、ルート α が $\alpha(H) \in (-2, 0)$ をみたすとき $\alpha \in -L$ である。

Theorem 2 (本文 Theorem 7.1). \mathfrak{s} の作用による \mathfrak{g} の既約分解を考える。

- (i) M を \mathfrak{g} の分解の既約成分であって、 L 上の real root に関する root space を含むものとする。すると、 M は主系列表現または補系列表現になる。
- (ii) (cf. [Tsu, Proposition 7.3]) \mathfrak{h} 上に 1 次元部分空間をもつような主系列表現が存在する。
- (iii) \mathfrak{g} を分解すると、上記 classification1Section1 と (ii) で挙げられた submodule、 \mathfrak{s} 自体、既約 lowest weight module、既約 highest weight module の直和となる。

既約 highest weight modules および既約 lowest weight modules の multiplicity を計算する方法も示した (§7)。さらに、highest weight module でも lowest weight module でもない既約成分が、主系列表現になるか、補系列表現になるかも分類した。

Theorem 3 (本文 Theorem 8.11). 本文 Theorem 7.1 で得られる、highest weight module でも lowest weight module でもない既約成分であって、 L 上の real root に関する root vector を含むものを考える。これら既約成分は、本文 Lemma 8.5, Lemma 8.9 および Lemma 8.11 で挙げられた例外を除き、全て補系列表現になる。例外については主系列表現になる。

References

- [CM93] D. H. Collingwood, W. M. McGovern, *Nilpotent Orbits in Semisimple Lie Algebras*, Van Nostrand Reinhold, 1993
- [Dyn57] E. Dynkin, *Semisimple subalgebras of simple Lie algebras*, American Mathematical Society Translations: Series 2, 6, 1957, pp. 111–245
- [GOW02] M. R. Gaberdiel, et al., *A class of Lorentzian Kac-Moody algebras*, Nuclear Physics B, 645, 2002, pp. 403–437
- [Kac90] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras 3rd edition*, Cambridge university press, 1990
- [Kos59] B. Kostant, *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group*,
- [NO01] H. Nicolai, D. I. Olive, *The Principal $SO(1, 2)$ Subalgebra of a Hyperbolic Kac Moody Algebra*, Letters in Mathematical Physics, 2001, pp. 141–152
- [Tsu] H. Tsurusaki(in press), *\mathfrak{sl}_2 triples whose nilpositive elements are in a space which is spanned by the real root vectors in rank 2 symmetric hyperbolic Kac-Moody Lie algebras*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences