# 審査の結果の要旨

氏名　上田　篤

本学位論文は，テンソルネットワーク表現に基づく実空間繰り込み群（以下，TNRG）を場の理論の観点から考察し，スケーリング次元の評価誤差の振る舞い，繰り込みフロー，固定点テンソルと共形場理論における多点関数との関係などを明らかにしたものである．TNRG は実空間繰り込み群の一種であり，統計力学で扱われるモデルをテンソルネットワークと捉え，これに対して近似的に部分縮約を行うことによって繰り込み変換を実現するものである．TNRG 以前に知られていた実空間繰り込み群は精度のコントロールが難しく，教科書的な概念の説明にはよく用いられていたが，系統的な臨界指数評価の実際的で信頼できる数値計算方法として用いられることは多くなかった．これに対して TNRG では，精度が飛躍的に向上しただけでなく，他の手法では評価が困難な大きなスケーリング次元をもったスケーリング場や，それらの間の演算子積展開の係数なども評価が可能になったため，近年盛んに研究が行われるようになった．本学位論文は，TNRG の計算において，どのような irrelevant な場が存在して，それがどのように計算結果に影響を与えるかを場の理論の観点から明らかにしている．

本学位論文は４つの章から構成されている．第１章は関連した先行研究について，特に，演算子積展開や TNRG の計算手法に関するレビューである．第２章，第３章の２つの章が本学位論文の主要な研究成果を述べた部分である．第２章では，TNRG から繰り込み群のフローを求める手法について述べたあと，TNRG の近似精度を決めるコントロールパラメータである「ボンド次元」が繰り込みフローにどのように影響するかについて論じている．第３章では，２次元古典格子モデルに対する TNRG の固定点として定まる４階の固定点テンソルが共形場理論における４点関数と直接対応していることを見出している．第４章は全体のまとめである．以下では，第２章，第３章のそれぞれについて，その概要と評価について述べる．

第２章では，まず，スケーリング次元に関する Cardy 公式について述べている．これは，スケーリング次元の数値的な評価式がモデル系には必ず存在する固定点からのずれに対してどのように依存するかを表す式であり，本論文の以下の議論の展開の出発点となっている．Cardy 公式に現れるスケーリング次元の評価を，従来の議論では転送行列の固有値に対して適用していたところ，テンソルネットワークの部分縮約から得られる行列の固有値に対しても同様に適用できるとしたところに

本論文の独自性がある．これは直感的には自然な拡張だが，必ずしも厳密に示されていることではない．本論文では，Cardy 公式からサイズ依存性が弱いことが導かれる観測量の振る舞いを実際に数値計算で調べることで，間接的にこの拡張の正当性を立証している．また，このような Cardy 公式の利用法は，スケーリング場の大きさをシステムサイズの関数として求めることにも応用できるため，これを使って繰り込み群のフロー図を作成できる．このようなフロー図は多くの教科書で概念図，模式図として紹介されているが，本論文では実際にイジングモデルにおける強磁性転移や XY モデルにおける Kosterlitz-Thouless 転移に応用して，明確に定義された量の精密な計算結果としてフロー図を描くことに成功している．さらに第２章では，スケーリング次元に対する補正項の由来を明らかにすることによって，従来の TNRG によるスケーリング次元の評価が持っている複雑なシステムサイズ依存性の起源も明らかにしている．

第３章では，共形場理論と TNRG 変換の固定点であるスケール不変テンソルとの関係について論じており，その考察から，正方格子型テンソルネットワークに基づく TNRG の４階のスケール不変テンソルの各成分は共形場理論における４点関数と１対１に対応していること，また，その具体的な対応関係を明らかにしている．この対応関係の導出は Y.Zou と G. Vidal の先行研究における pants diagram を利用した演算子積展開係数の計算手法を４点関数に発展させたものになっているが，TNRG 計算の多くの場合，スケール不変テンソルが計算の自然な目標物であることから，この章で論じられた内容は計算科学的な観点から特に重要である．

以上のように，本学位論文は，共形場理論と TNRG 法との対応関係を詳細に検討することを通じて，一般の２次元古典統計力学モデルに対して，スケーリング次元や演算子積展開係数の評価の理論的基礎を与えると同時に，新しい計算手法を提案しており，数値計算上の応用のしやすさや結果の明確さからも今後の研究に大きな影響を与えるものである．なお，本学位論文の第２章の内容は既に出版済み，第３章の内容は出版予定（プレプリント公表済み）である．これらは共著者との共同研究であるが，共に論文提出者が主体となって研究立案から数値計算，解析までを行っており，寄与が十分であると判断した．

以上の理由から，博士（理学）の学位を授与できると認める．