論文の内容の要旨

論文題目　Geometric Structure of Affine Deligne-Lusztig Varieties for GL_n
(GL_n のアファイン Deligne-Lusztig 多様体の幾何構造)

氏名　島田了輔

アファイン Deligne-Lusztig 多様体は Rapoport [7] によって導入された．これは志村多様体, より直接的には Rapoport-Zink 空間と密接に結びついており, この関係性を通じて数論への多くの応用をもつ対象である．

F を非アルキメデス局所体とし, その剰余体を $\mathbb{F}_q$ とする．L を F の最大不分岐拡大の完備化とし, σ を L/F の Frobenius 写像とする．さらに $\mathcal{O}$ を L の付値環とし, ϖ を L の素元, そして v_L を L の付値で $v_L(\varpi)=1$ となるようなものとする．

G を F 上の不分岐連結簡約代数群とする．$B \subset G$ を Borel 部分群とし, $T \subset B$ を極大 torus として, 共に F 上定義されているものとする．$\mu, \mu' \in X_*(T)$ に対し $\mu - \mu'$ が正ルートの整係数和であるとき $\mu \preceq \mu'$ と書く．また $\mu \in X_*(T)$ に対し ϖ^μ で $\varpi \in \mathbb{G}_m(F)$ の $\mu\colon \mathbb{G}_m \to T$ による像を表す．

$K = G(\mathcal{O})$ とおく．支配的 cocharacter $\mu \in X_*(T)_+$ と $b \in G(L)$ を固定する．このときアファイン Deligne-Lusztig 多様体 $X_\mu(b)$ は $\mathcal{G}r = G(L)/K$ の局所閉被約部分 $\overline{\mathbb{F}}_q$-scheme で次のように定義されるものである:

$$X_\mu(b) = \{xK \in \mathcal{G}r \mid x^{-1}b\sigma(x) \in K\varpi^\mu K\}.$$

閉アファイン Deligne-Lusztig 多様体は $\mathcal{G}r$ の閉被約部分 $\overline{\mathbb{F}}_q$-scheme で次のように定義されるものである:

$$X_{\preceq\mu}(b) = \bigcup_{\mu' \preceq \mu} X_{\mu'}(b).$$

等標数の場合 $X_\mu(b)$ と $X_{\preceq\mu}(b)$ は共に局所有限型であり, 混標数の場合は共に局所完全有限型である ([4, Corollary 6.5] と [3, Lemma 1.1] 参照)．またアファイン Deligne-Lusztig 多様体 $X_\mu(b)$ と $X_{\preceq\mu}(b)$ には左からかけることにより b の σ-中心化群

$$\mathbb{J} = \mathbb{J}_b = \{g \in G(L) \mid g^{-1}b\sigma(g) = b\}$$

が作用する．

アファイン Deligne-Lusztig 多様体の幾何は多くの人々によって研究されてきた．中でもその既約成分の結晶基底による描写は特に興味深い．$\mathrm{Irr}\, X_\mu(b)$ で $X_\mu(b)$ の既約成分の集合を表す．$\widehat{G}$ を $\overline{\mathbb{Q}}_l (l \neq p)$ 上定義された G の Langlands 双対とする．V_μ を最高ウェイト μ の既約 $\widehat{G}$-加群とする．V_μ の結晶基底 $\mathbb{B}_\mu$ は柏原と Lusztig により構成された ([5] 参照)．λ_b を b の Newton ベクトルの「最良整近似」とする (厳密な定義は省略する, [3, §2.1] 参照)．このとき Miaofen Chen と Xinwen Zhu は $\mathbb{J}\backslash \mathrm{Irr}\, X_\mu(b)$ と λ_b-ウェイト空間 $\mathbb{B}_\mu(\lambda_b)$ の間に自然な全単射が存在することを予想した．特に $|\mathbb{J}\backslash \mathrm{Irr}\, X_\mu(b)| = \dim V_\mu(\lambda_b)$

である．その後 [6] において Nie はこの予想を証明した．その証明は $G = \mathrm{GL}_n$ で b が superbasic と呼ばれる場合に帰着される．よってこの場合は特に重要である．

Nie は $\mathbb{J}\backslash \operatorname{Irr} X_\mu(b)$ から $\mathbb{B}_\mu(\lambda_b)$ への写像を構成し, それが全単射であることを証明することにより Chen-Zhu 予想を解決した．一方でその逆写像の構成は明らかでない．本論文の最初の主定理はこの逆写像の構成方法を b が superbasic な場合に明らかにしたものである．

Theorem A. $G = \mathrm{GL}_n$ とする．b が superbasic であると仮定する．このとき $\mathbb{B}_\mu$ の結晶構造を使って $X_\mu(b)$ の各既約成分を対応する結晶元から構成することができる．言い換えれば, Nie による全単射の逆写像を構成できる．

この定理は量子群の表現論の文脈で定義された結晶構造がなぜかアファイン Deligne-Lusztig 多様体の幾何構造を知っているということを意味し, 大変興味深い．またこの定理は結晶基底の数論幾何への応用可能性を示唆している．実際, 以下で説明するように, そうした応用の一つとしてアファイン Deligne-Lusztig 多様体の二つの stratification を比較する．

Vollaard-Wedhorn [9] はある志村多様体の basic locus が (古典的) Deligne-Lusztig 多様体の直和で表せることを示した．この志村多様体の basic locus は b が basic な時の $X_{\preceq\mu}(b)$ と密接に関連している．Görtz-He [2] は $X_{\preceq\mu}(b)$ (と対応する志村多様体の basic locus) がいつこのような単純な幾何構造をもつかを分類し (Coxeter 型の場合と呼ばれる), Vollaard-Wedhorn [9] の結果と同様の描写が他のいくつかの場合でも可能であることを証明した．この Deligne-Lusztig 多様体の和による分解のことを Bruhat-Tits stratification と呼ぶ．実はこれは $X_{\preceq\mu}(b)$ の Ekedahl-Oort stratification の細分化である．後に Chen-Viehmann [1] によって導入された $X_{\preceq\mu}(b)$ の $\mathbb{J}$-stratification は Bruhat-Tits stratification を含めたいくつかの stratification を同時に一般化するものである．この stratification は注目されているものの, 一般には取り扱いが難しい．一方で b が superbasic な場合には semi-module と呼ばれる組み合わせ論的量による描写が可能である．またこの場合 semi-module は $\mathbb{J}\backslash \operatorname{Irr} X_\mu(b)$ をパラメータ付けする．さらに Theorem A により各既約成分に対応する semi-module を構成することができ, これを利用して b が superbasic な場合には $\mathbb{J}$-stratification を結晶基底を使って調べることができる．

Theorem B. $G = \mathrm{GL}_n,\ \mu \in X_*(T)_+$ とする．b が superbasic であると仮定する．この時次の条件は同値である．

(i) 任意の $X_{\preceq\mu}(b)$ の非空 Ekedahl-Oort stratum は positive Coxeter 型である．
(ii) $X_{\preceq\mu}(\tau_\mu)$ の $\mathbb{J}$-stratification は Ekedahl-Oort stratification の細分化である．

Schremmer と Yu との共同研究 [8] では positive Coxeter 型の Ekedahl-Oort stratum は Deligne-Lusztig 多様体上のある fibration になることを証明した．また条件 (i) は上の Coxeter 型の場合を含む．上に述べた通り (ii) も Coxeter 型の場合を含む条件だったわけだが, この定理はこれら二つの Coxeter 型を一般化する条件が (少なくとも b が superbasic な場合には) 実は同値であることを示している．上に述べた通り条件 (ii) は一般に調べるのが難しい．一方で条件 (i) は容易である．実際 $G = \mathrm{GL}_n$ の場合には以下の分類ができる．

Theorem C. $G = \mathrm{GL}_n,\ \mu \in X_*(T)_+$ とする．この時次の条件は同値である．

(i) 任意の $X_{\preceq\mu}(b)$ の非空 Ekedahl-Oort stratum は positive Coxeter 型である.

(ii) μ が central であるか, または modulo $\mathbb{Z}\omega_n$ で次の形である:

$$\begin{aligned}
&\omega_1, \quad \omega_{n-1}, && (n \geq 1),\\
&\omega_1+\omega_{n-1}, \quad \omega_2, \quad 2\omega_1, \quad \omega_{n-2}, \quad 2\omega_{n-1}, && \\
&\omega_2+\omega_{n-1}, \quad 2\omega_1+\omega_{n-1} \quad \omega_1+\omega_{n-2}, \quad \omega_1+2\omega_{n-1}, && (n \geq 3),\\
&\omega_3, \quad \omega_{n-3}, && (n=6,7,8),\\
&3\omega_1, \quad 3\omega_{n-1}, && (n=4,5),\\
&\omega_1+\omega_2, \quad \omega_3+\omega_4, && (n=5),\\
&4\omega_1, \quad \omega_1+3\omega_2, \quad 4\omega_2, \quad 3\omega_1+\omega_2, && (n=3),\\
&m\omega_1 \text{ with } m \in \mathbb{Z}_{>0}, && (n=2).
\end{aligned}$$

ここで $\omega_k = (1^{(k)}, 0^{(n-k)})$.

[8] の結果により, これら同値な条件が満たされる場合は Coxeter 型の場合と類似の単純な幾何構造が存在することになる. 本論文ではこの単純な幾何構造を μ が minuscule な場合により詳細に調べる.

Theorem D. $G = \mathrm{GL}_n$ とする. b が basic であると仮定する. μ を Theorem C の同値な条件を満たす minuscule cocharacter とする. このとき $X_{\preceq\mu}(b)$ の $\mathbb{J}$-stratification は Ekedahl-Oort stratification の細分化である. 各 $\mathbb{J}$-stratum は Deligne-Lusztig 多様体とアファイン空間の直積と普遍的位相同型である. さらに closure relation は $\mathbb{J}$ の Bruhat-Tits building を使って描写することができる.

μ が minuscule な場合にはアファイン Deligne-Lusztig 多様体は Rapoport-Zink 空間の底空間であり, 特に興味深い. この定理における $X_{\preceq\mu}(b)$ の描写は [8] の結果から演繹されるものより遥かに明示的である. 特にここでの closure relation (ある stratum の closure を他の stratum の和で書く方法) は Bruhat-Tits stratification が満たす closure relation の自然な一般化である.

参考文献

[1] M. Chen and E. Viehmann, *Affine Deligne-Lusztig varieties and the action of J*, J. Algebraic Geom. **27** (2018), no. 2, 273–304.

[2] U. Görtz and X. He, *Basic loci of Coxeter type in Shimura varieties*, Camb. J. Math. **3** (2015), no. 3, 323–353.

[3] P. Hamacher and E. Viehmann, *Irreducible components of minuscule affine Deligne-Lusztig varieties*, Algebra Number Theory **12** (2018), no. 7, 1611–1634.

[4] U. Hartl and E. Viehmann, *The Newton stratification on deformations of local G-shtukas*, J. Reine Angew. Math. **656** (2011), 87–129.

[5] J. Hong and S.-J. Kang, *Introduction to quantum groups and crystal bases*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 42, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[6] S. Nie, *Irreducible components of affine Deligne-Lusztig varieties*, Cambridge Journal of Mathematics **10** (2022), no. 2, 433–510.

[7] M. Rapoport, *A guide to the reduction modulo p of Shimura varieties*, Astérisque (2005), no. 298, 271–318.

[8] F. Schremmer, R. Shimada, and Q. Yu, *On affine Weyl group elements of positive Coxeter type*, arXiv:2312.02630 (2023).

[9] I. Vollaard and T. Wedhorn, *The supersingular locus of the Shimura variety of* $\mathrm{GU}(1, n-1)$ *II*, Invent. Math. **184** (2011), no. 3, 591–627.