

審査の結果の要旨

氏名 島田 了輔

アフィン Deligne–Lusztig 多様体とは、有限体上の簡約群の表現論において核心的な役割を果たした Deligne–Lusztig 多様体の p 進類似にあたるものであり、志村多様体の法 p 還元を始めとする様々な数論的対象と結び付く重要な研究対象である。以下では F を非アルキメデス局所体とし、その最大不分岐拡大の完備化を L で表す。また、 L の整数環の剰余体を k で表す。アフィン Deligne–Lusztig 多様体は、 F 上の不分岐連結簡約代数群 G 、 G の余指標 μ 、 $G(L)$ の元 b の三つ組 (G, μ, b) から定まる k 上のスキームであり、 $X_\mu(b)$ と書かれる。本論文では、 G が一般線型群 GL_n であり、 b が *superbasic* と呼ばれる条件を満たす場合に、 $X_\mu(b)$ の幾何構造についての詳細な考察が行われている。

論文は三つの部分に分かれており、第一の部分は、 $X_\mu(b)$ の既約成分を主題としている。一般の三つ組 (G, μ, b) に対し、 $X_\mu(b)$ の既約成分が G の双対群 \widehat{G} の最高ウェイト μ の既約表現の結晶基底 \mathbb{B}_μ と結び付くことが当該分野の最近の研究によって明らかとなっていた。この現象は、Chen–Zhu によって予想され、Zhou–Zhu と Nie によって独立に証明されたものであるが、より詳しい情報を含む Nie の証明においては、 $X_\mu(b)$ の既約成分に対応する \mathbb{B}_μ の元を構成し、その対応が期待される全単射を導くことを確認するという方法が採られていた。本論文の第一の主定理は、この全単射の逆写像を明示的に記述するものである。

定理 1 $G = \mathrm{GL}_n$ かつ b が *superbasic* であるとき、結晶基底 \mathbb{B}_μ への Weyl 群の作用を用いて、 \mathbb{B}_μ の各元に対応する $X_\mu(b)$ の既約成分を明示的に構成できる。

結晶基底への Weyl 群の作用は 1990 年代に柏原によって導入されたものであるが、上記の定理は、その作用が数論幾何と関係していることを初めて明らかにした有意義な成果である。

論文の第二の部分では、閉アフィン Deligne–Lusztig 多様体 $X_{\leq \mu}(b) = \bigcup_{\mu' \leq \mu} X_{\mu'}(b)$ (\leq は Bruhat 順序を表す) に定まる二つの stratification が考察の対象となる。一方は Chen–Viehmann によって導入された \mathbb{J} -stratification である。これは、三つ組 (G, μ, b) が簡単な場合に知られているいくつかの stratification の自然な一般化を与えるものである。もう一方の Ekedahl–Oort stratification は、志村多様体の法 p 還元の研究において頻繁に考えられてきたものである。本論文では、定理 1 の応用として、以下の定理を得ている。

定理 2 $G = \mathrm{GL}_n$ かつ b が *superbasic* であるとき、 $X_{\leq \mu}(b)$ の \mathbb{J} -stratification が Ekedahl–Oort stratification の細分となるような μ を全て決定できる。

さらに第三の部分では、定理 2 に現れる μ が *minuscule* と呼ばれる条件を満たすときに、 $X_{\leq \mu}(b)$ の幾何構造を詳細に調べ、次の定理を得た。

定理 3 定理 2 に現れる μ が minuscule であるとき、 $X_{\leq \mu}(b)$ の各 \mathbb{J} -stratum は Deligne–Lusztig 多様体とアフィン空間の直積に普遍的同相である。さらに、 \mathbb{J} -stratum の間の閉包関係は \mathbb{J} の Bruhat–Tits ビルディングを用いて記述できる。

これら二つの定理の背景には、アフィン Deligne–Lusztig 多様体がいつ簡単な幾何構造を持つかという問題がある。Görtz–He はアフィン Deligne–Lusztig 多様体が Deligne–Lusztig 多様体による分割を持つ場合を決定し、そのような (G, μ, b) を Coxeter 型と呼んだ。その一方で、Coxeter 型から外れたいくつかの具体例において、アフィン Deligne–Lusztig 多様体が Deligne–Lusztig 多様体とアフィン空間の直積による分割を持つ場合があることが判明しており、そのことから、Coxeter 型を少し一般化した (G, μ, b) のクラスがあるのではないかと推測されていた。定理 2 は、Coxeter 型の場合に $X_{\leq \mu}(b)$ の \mathbb{J} -stratification が Ekedahl–Oort stratification の細分になっていることを踏まえて、上記のクラスに属する対象の候補を与えたものであり、定理 3 は、それらの候補が期待通りの性質を持つことを確認したものである。これらの成果に基づき、志村多様体の Tate 予想や数論的交叉数の研究が今後大きく進展することが期待される。

以上の通り、本論文では、アフィン Deligne–Lusztig 多様体の幾何構造について、独自性が高く重要な成果が多数得られている。このような研究は、アフィン Deligne–Lusztig 多様体の理論に対する深い理解と鋭い洞察力、高い証明技術が揃って初めて可能になるものである。よって、論文提出者島田了輔は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。