

論文の内容の要旨

論文題目 Studies on F -singularities in equal characteristic zero via ultraproducts

(超積を用いた等標数 0 における F -特異点の研究)

氏 名 山口 樹

本論文では, 特異点の純な射の下での降下について取り扱う. 環準同型 $R \rightarrow S$ は, 任意の R -加群 M に対し, 自然な射 $M \rightarrow M \otimes_R S$ が単射であるとき, 純であるという. 具体例としては忠実平坦な射や分裂単射などがある. 幾何的には, 線形簡約群 G が環 S に作用しているとき, 不変式環 S^G から S への包含 $S^G \rightarrow S$ が純な射となる. \mathbb{C} 上本質的有限型な環 R, S に対し, 純な射 $R \rightarrow S$ の下でどんな性質が降下するかというのは自然な問いである. 以下のような結果が知られている:

- (1) Boutot [1] は, 有理特異点が降下することを示した.
- (2) Schoutens [9] は R と S が \mathbb{Q} -Gorenstein 正規局所環ならば, 対数端末特異点が降下することを示した. 他方で, Braun *et al.* [2] は S が klt 型で, 線形簡約群 G が S に作用しているとき, S^G も klt 型であることを示した. ここで, klt 型とは対数端末特異点の非 \mathbb{Q} -Gorenstein の場合への自然な一般化である. 最近, Zhuang [11] はこれら 2 つの結果を一般化して klt 型が降下することを示した.
- (3) Godfrey, 村山 [4] は Du Bois 特異点が降下することを示した. これは Kovács [6] の $R \rightarrow S$ が分裂する場合の結果の拡張である.

Zhuang [11] は次の 2 つの問題を提起した.

- (a) klt 型に関する結果を有効 \mathbb{Q} -因子との組の場合に一般化できるか.
- (b) 対数標準特異点は純な射の下で降下するか.

本論文では, F -特異点と超積の手法を用いて, これらの問題に取り組む.

F -特異点は Frobenius 射を用いて定義される正標数の特異点である. 主要なクラスに F -純特異点, F -単射特異点, F -正則特異点等があり, 極小モデル理論に現れる特異点と密接に関係することが知られている. 本論文では, 超積を用いて等標数 0 における F -特異点の変種を定義し, 特異点の新たな記述を与える.

超積は超準解析において基本的な概念である. Schoutens [9] は, 超積を用いて対数端末特異点の特徴付けを与え, 上記 (2) の結果を示した. また Schoutens [8] は \mathbb{C} 上本質的有

限型な局所整域 R に対し巨大な Cohen-Macaulay 代数 $\mathcal{B}(R)$ の明示的構成を与え、 \mathcal{B} 有理、 \mathcal{B} 正則の概念を導入した。そして、 \mathcal{B} 有理性が有理性と同値であることを示した。本論文では、Schoutens の手法を一般化して、[9] における \mathcal{B} 正則性に関する予想に対し肯定的な解答を与える。

第 2 章では随伴イデアルに注目する。 D を正規多様体 X 上の被約因子、 Γ を X 上の有効 \mathbb{Q} -因子で D と共通成分をもたないものとする。 $K_X + D + \Gamma$ が \mathbb{Q} -Cartier のとき、組 $(X, D + \Gamma)$ が D に沿って純対数端末特異点 (*plt*) であるとは、 D の成分の固有変換でない X 上空の因子 E における食い違い係数が -1 より大きいことである。 $K_X + D + \Gamma$ が \mathbb{Q} -Cartier でないときは、 $(X, D + \Gamma)$ が D に沿って **plt** 型であるとは、 X 上のある有効 \mathbb{Q} -因子 Δ があって、 Δ と D は共通成分をもたず、 $K_X + D + \Gamma + \Delta$ は \mathbb{Q} -Cartier で、 $(X, D + \Gamma + \Delta)$ が D に沿って *plt* となることである。第 2 章の主定理は次の結果である。

定理 A. $R \hookrightarrow S$ を \mathbb{C} 上有限型な正規整域の間の純な射とし、 $f : Y := \operatorname{Spec} S \rightarrow X := \operatorname{Spec} R$ で対応するアフィン多様体の射を表す。 D を X 上の被約因子とし、 Γ を X 上の有効 \mathbb{Q} -因子で、 D と Γ が共通の成分を持たないものとする。 \mathcal{O}_X -代数 $\bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{O}_X(\lfloor -i(K_X + D + \Gamma) \rfloor)$ が有限生成で、 D のサイクル論的引き戻し $E := f^*D$ が Y 上の被約因子であると仮定する。

(1) f が忠実平坦ならば、

$$\operatorname{adj}_E(Y, E + f^*\Gamma) \subseteq \operatorname{adj}_D(X, D + \Gamma)\mathcal{O}_Y.$$

(2) E を素因子の非交和と仮定する。さらに、以下の 2 つの条件の少なくとも一方が成り立つと仮定する。

(a) $K_X + D + \Gamma$ が \mathbb{Q} -Cartier である。

(b) Y 上の任意の Weil 因子 B に対して、 \mathcal{O}_Y -代数 $\bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{O}_Y(iB)$ が有限生成である (例えば、この条件は Y が *klt* 型のときに満たされる)。

このとき、

$$\operatorname{adj}_E(Y, E + f^*\Gamma) \cap \mathcal{O}_X \subseteq \operatorname{adj}_D(X, D + \Gamma).$$

次の系は、Zhuang の問い [11, Question 2.13] に肯定的な解答を与えている。

系 B. $f : Y \rightarrow X$ を準射影的な正規複素多様体の間の純な射、 D を X 上の被約因子、 Γ を X 上の有効 \mathbb{Q} -因子で D と共通の成分を持たないものとする。 f による D のサイクル論的引き戻し $E = f^*D$ が Y 上の被約因子であると仮定する。

$(Y, E + f^*\Gamma)$ が E に沿って *plt* 型ならば、 $(X, D + \Gamma)$ は D に沿って *plt* 型である。特に、 $(Y, f^*\Gamma)$ が *klt* 型ならば、 (X, Γ) も *klt* 型である。

定理 A を示すための主な手法は、因子的判定イデアルの理論である。高木 [10] は $K_X + D + \Gamma$ が \mathbb{Q} -Cartier のとき、 $(X, D + \Gamma)$ の随伴イデアル $\operatorname{adj}_D(X, D + \Gamma)$ を十分大きい標数 $p > 0$ に還元すると、因子的判定イデアル $\tau_D(X, D + \Gamma)$ と一致することを示し

た. 本論文ではこの結果を \mathcal{O}_X -代数 $\bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{O}_X(\lfloor -i(K_X + D + \Gamma) \rfloor)$ が有限生成の場合に拡張し, 定理 A(1) を正標数の場合に帰着した.

定理 A(2) の証明はより複雑である. 純性は正標数還元で保たれないため, 代わりに超積を用いる. $X := \operatorname{Spec} R$ 上の素因子 D と有効 \mathbb{Q} -因子 Γ で D を成分として持たないものに対して, $\tau_{B,D}(R, D + \Gamma)$ というイデアルを導入する. $\tau_{B,D}(R, D + \Gamma)$ は BCM 随伴イデアルの亜種であり, BCM 随伴イデアルは Ma *et al.* [7] により混標数の特異点を研究するために随伴イデアルの類似として導入されたイデアルである. $K_X + D + \Gamma$ が \mathbb{Q} -Cartier ならば, $\tau_{B,D}(R, D + \Gamma)$ は随伴イデアル $\operatorname{adj}_D(X, D + \Gamma)$ と等しい. この特徴付けは定理 A (2) の証明で重要な役割を果たす.

定理 A(2) の応用として, lc 型が純な射の下で降下するかという Zhuang の問い [11, Question 2.11] に対して部分的に肯定的な解答を与える.

定理 C. $f: Y \rightarrow X$ を正規複素アフィン多様体の間の純な射とし, X は \mathbb{Q} -Gorenstein と仮定する. それに加えて, 以下の条件の少なくとも一つが成り立つと仮定する.

- (i) $K_Y + \Delta$ が \mathbb{Q} -Cartier であるような Y 上の有効 \mathbb{Q} -因子 Δ が存在して, (Y, Δ) のどの非 *klt* 中心も X を支配しない.
- (ii) Y の非 *klt* 型軌跡が 1 次元以下である.

このとき, Y が lc 型ならば, X は対数標準特異点をもつ.

定理 A の別の応用として, Schoutens [9, Remark 3.10] による \mathcal{B} 正則性と対数端末特異点の同値性の予想に肯定的な解答を与える.

第 3 章では, 稠密 F -純型特異点と稠密 F -単射型特異点に注目する. 正標数のスキームに対し定義された性質 P について, 標数 0 の体上本質的有限型スキーム X が稠密 P -型であるとは, その正標数還元 X_p が無限個の素数 p について P を満たすことである. 原, 渡辺 [5] は標数 0 の体上の正規 \mathbb{Q} -Gorenstein 多様体が稠密 F -純型ならば, X は対数標準特異点を持つことを示した. 逆は未解決である. Zhuang の問いの F -特異点論的な類似として, 稠密 F -純型が純な射の下で降下するか議論する. 第 3 章の主定理として, この問いに肯定的な解答を与える.

定理 D. $R \rightarrow S$ を \mathbb{C} 上本質的有限型な被約局所環の間の純な局所 \mathbb{C} -代数の射とする. R が \mathbb{Q} -Gorenstein 正規ならば, 稠密 F -純型は降下する.

定理 D を示すために, 超積を用いた F -純性の等標数 0 における類似として, 超 Frobenius 射の純性によって定義される超 F -純性の概念を導入する. そして, 環が \mathbb{Q} -Gorenstein の場合に超 F -純性と稠密 F -純型の同値性を証明する.

第 3 章の後半では, 類似の問題を F -単射性に対しても考える. F -単射性の等標数 0 における類似として, 超 F -単射性を導入する. 剰余体が \mathbb{C} と同型ならば, 超 F -単射性と稠密 F -単射型が同値であることが従う. これにより, 次の定理が得られる.

定理 E. $(R, \mathfrak{m}) \rightarrow (S, \mathfrak{n})$ を \mathbb{C} 上本質的有限型被約局所環の間の強純な局所 \mathbb{C} -代数の射とする. $R/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$ と仮定する. このとき, 稠密 F -単射型は降下する.

ここで射 $R \rightarrow S$ が強純であるとは, 任意の S の素イデアル \mathfrak{q} に対して, 誘導される射 $R_{\mathfrak{q} \cap R} \rightarrow S_{\mathfrak{q}}$ が純であることである ([3] 参照).

参考文献

- [1] J.-F. Boutot, Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs, Invent. Math. **88**.1 (1987), 65–68.
- [2] L. Braun, D. Greb, K. Langlois and J. Moraga, Reductive quotients of klt singularities, arXiv:2111.02812, preprint (2021).
- [3] S. Chakraborty, R. Gurjar and M. Miyanishi, Pure subrings of commutative rings, Nagoya Mathematical Journal, **221**(1) (2016), 33–68.
- [4] C. Godfrey and T. Murayama, Pure subrings of Du Bois singularities are Du Bois singularities, arXiv:2208.14429, preprint (2022)
- [5] N. Hara and K. Watanabe, F regular and F pure rings vs. log terminal and log canonical singularities, J. Algebraic Geom. **11** (2002), 363–392.
- [6] S. Kovács, Rational, log canonical, Du Bois singularities: on the conjectures of Kollár and Steenbrink, Compositio Math. **118** (1999), no. 2, 123–133.
- [7] L. Ma, K. Schwede, K. Tucker, J. Waldron and J. Witaszek, An analogue of adjoint ideals and PLT singularities in mixed characteristic, J. Algebr. Geom. **31** (2022), no. 3, 497–559.
- [8] H. Schoutens, Canonical big Cohen-Macaulay algebras and rational singularities, Illinois J. Math. **48** (2004) no. 1, 131–150.
- [9] H. Schoutens, Log-terminal singularities and vanishing theorems via non-standard tight closure, J. Alg. Geom. **14** (2005), 357–390.
- [10] S. Takagi, A characteristic analogue of plt singularities and adjoint ideals, Math. Z. **259** (2008), no. 2, 321–341.
- [11] Z. Zhuang, Direct summands of klt singularities, arXiv:2208.12418, preprint (2022).