

審査の結果の要旨

氏 名 山口 樹

可換環の拡大 $R \hookrightarrow S$ は、任意の R 加群をテンソルしても単射性が保たれるとき、純であるという。この概念は代数多様体の間の射にも自然に拡張され、忠実平坦射や線型簡約群による商射などが純射の例となっている。本論文において山口樹は、複素代数多様体の間の純射 $f: Y \rightarrow X$ が与えられたとき、極小モデル理論に現れる特異点が Y から X に伝播するか調べた。

この方面の特筆すべき結果として、「 Y が klt 型ならば X も klt 型である」という Zhuang の結果があげられる。ここで klt 型特異点とは、de Fernex-Hacon によって導入された、対数端末特異点の非 \mathbb{Q} -Gorenstein の場合への自然な拡張である。lc 型特異点も同様に定義される。Zhuang は自身の結果の対数化、つまり、有効 \mathbb{Q} 因子との対の場合への拡張が成り立つか問うている。山口は、 X の反対数標準環の有限生成性などを仮定したとき、 Y の随伴イデアル層の順像と X の構造層の共通部分が X の随伴イデアル層に含まれることを証明した。随伴イデアル層は乗数イデアル層の亜種であり、この結果の系として上述の Zhuang の問いが肯定的に解決される。さらに lc 型特異点についても、 X が \mathbb{Q} -Gorenstein であり Y の非 klt 型点集合が 1 次元以下のとき、 Y が lc 型ならば X は高々対数標準特異点しか持たないという結果が得られる。lc 型特異点の純射での振る舞いはほとんどわかっておらず、これは lc 型特異点の研究を大きく進展させる結果と評価できる。

Zhuang の議論は純代数幾何的なものであるのに対し、山口の証明は超積を用いる。境界因子が自明な場合に証明のアイディアを説明する。局所的な問題であるので、 X, Y は \mathbb{C} 上本質的有限型な局所整域のスペクトラムであるとして良い。 P を素数全体のなす集合とすると、標数 p の有限体の代数閉包 $\overline{\mathbb{F}}_p$ の P 上の超積 $\text{ulim}_{p \in P} \overline{\mathbb{F}}_p$ と複素数体 \mathbb{C} の間に非標準的な同型が存在することが知られている。この同型を一つ固定することで、 \mathbb{C} 上本質的有限型な局所整域 R から $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上本質的有限型な環の族 $(R_p)_{p \in P}$ が得られる。Schoutens は、 R_p の絶対整閉包 R_p^+ の超積 $\mathcal{B}(R) := \text{ulim}_{p \in P} R_p^+$ が巨大な Cohen-Macaulay R 代数であることを証明した。巨大な Cohen-Macaulay 代数が与えられると、それに付随する判定イデアル (BCM 判定イデアルと呼ばれる) が定義できる。このイデアルは Ma-Schwede の混標数の特異点論においても重要な役割を担うなど、近年注目を浴びている。山口は、 R が \mathbb{Q} -Gorenstein の場合に、 $\mathcal{B}(R)$ に付随する BCM 判定イデアル $\tau_{\mathcal{B}(R)}(R)$ が乗数イデアル層 $\mathcal{J}(\text{Spec } R)$ と一致することを証明した。境界因子がある場合にも類似の議論が展開でき、随伴イデアル層と BCM 判定イデアル (の一般化) の一致が証明される。この一致により、随伴イデアル層の問題が BCM 判定イデアルの問題に帰着される。これが主定理のキーとなるアイディアである。

山口は稠密 F 純型特異点の純射での振る舞いについても調べた。稠密 F 純型特異点は Frobenius 写像と法 p 還元を使って定義される標数 0 の特異点であり、lc 型特異点と一致すると予想されている。山口は超 Frobenius 写像を用いることで、 X の \mathbb{Q} -Gorenstein 性の仮定のもと、 Y が稠密 F 純型ならば X も稠密 F 純型であることを証明した。超 Frobenius 写像は、 \mathbb{C} 上本質的有限型な局所整域 R から上述のように $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上本質的有限型な環の族 $(R_p)_{p \in P}$ を定めるとき、各 R_p の Frobenius 写像の超積を考えることで定義される。この結果は lc 型特異点の純射で伝播するという予想を支持する重要な結果といえる。

以上の結果は、極小モデル理論に現れる特異点の研究に大きく貢献する優れた業績である。このような超積を用いたアプローチは Schoutens によって 20 年ほど前に始められたが、ここ 15 年はまったく進展がなかった。山口は Schoutens の議論を発展させ、判定イデアルの理論と組み合わせることで、標数 0 の特異点研究に有用な手法を確立した。共同研究者である高木俊輔氏からは、共同研究における山口の貢献が十分大きく、山口の博士論文の一部として提出するにふさわしいものである旨の承諾が得られている。よって、論文提出者山口樹は、博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。