

破壊力学パラメータとしてのき裂エネルギー密度について

On Crack Energy Density as a Fracture Mechanics Parameter

渡辺勝彦*

Katsuhiko WATANABE

1. はじめに

最近著者は、今日までの破壊力学と呼ばれているものが逢着している諸限界、あるいはその体系中に現れている諸矛盾は、現実のき裂端で生じる現象を見てみると、ほぼ非弾性現象であるにもかかわらず、現在までの破壊力学を支えるき裂の力学が本質的に弾性の力学の域を出ていないところにあると考え、新たに弾性であれ、非弾性であれ常にその物理的な意味が明確なパラメータとしてき裂エネルギー密度の概念を提唱し、それによるとき現在までの破壊力学における諸限界、諸矛盾が解消することを示すとともに、き裂エネルギー密度を中心とした非弾性き裂の力学ともいうべきものの展開を行って、従来までの破壊力学の面目を一新する、対象とする構成則になんら制限がなく、かつき裂の一生を通じて有効な、き裂挙動評価の工学的手段としての破壊力学の確立を目指している。^{1)~8)}

本稿はその著者の考える破壊力学体系において中心的役割を果たすき裂エネルギー密度のき裂パラメータとして持つ意味についての基礎的紹介を行うものであり、はじめにいくつかのモデルをあげてき裂エネルギー密度の定義を示し、続いてそれらのモデルにおけるき裂エネルギー密度の意味を考えることを通じてき裂エネルギー密度の破壊力学パラメータとしての有効性について考える。

2. き裂エネルギー密度

き裂エネルギー密度は「き裂端が初期の状態より現在までに担ってきたエネルギーをき裂を含む面内の単位面積当たりで表したもの」として定義される量であり、¹⁾設定された任意のき裂モデルに対して定義できるが、ここでは代表的なものとして、また以後の議論に関連するものとして、通常の連続体モデル、Barenblatt モデル、⁹⁾現実のき裂端の状況を反映する非連続体モデルに対する具体的定義を与える。

連続体モデルに対しては次のようにして与えられる。すなわち、図1に示すような時刻 $t=0$ において長さ a_0 、

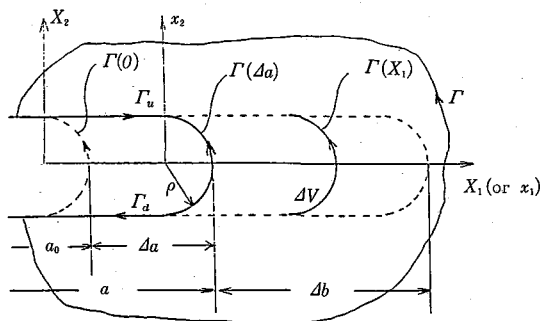


図1 進展する切欠き

曲率半径 ρ であった切欠きが負荷を受けて進展し(体積を徐々に取り去る)、現在の時刻 $t=t$ において長さが a となっている状態を考える。このとき $\rho=0$ の完全なき裂に対する量は $\rho \rightarrow 0$ の極限值として定義され、単位厚さ当たりを考えるものとする(以後同様)、き裂エネルギー密度 \mathcal{E} は

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} [\lim_{\Delta b \rightarrow 0} \{ (\int_{\Delta V} W dV) / \Delta b \}] \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} [\lim_{\Delta b \rightarrow 0} \{ \int_{a_0}^{a_0 + \Delta b} \int_{\Gamma(X_1)} W dX_2 \} / \Delta b] \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma(\Delta a)} W dX_2 \end{aligned} \quad (1)$$

によって与えられる。^{1,2)}ここで ΔV は切欠き端前方の点線で囲まれる領域の体積であり、 W はひずみエネルギー密度で、 σ_{ij} , ϵ_{ij} をそれぞれ応力、ひずみのテンソル、

$$\dot{(\quad)} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t} \text{ とするとき}$$

$$W = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dt \quad (2)$$

である。式(2)における積分は実際の荷重履歴に従って行うことを意味しており、このようにするとき式(1)で与えられる \mathcal{E} は構成則に関係なく、また $\rho \rightarrow 0$ において径路 $\Gamma(\Delta a)$ は現き裂端の一点になるので、現き裂端の一点が初期の状態より現在までに担ってきたエネルギーをき裂を含む面内の単位面積当たりで表したもの、すなわちき裂エネルギー密度となっていることがわかる。

連続体モデルによるとき、き裂端において応力、ひず

* 東京大学生産技術研究所 第1部

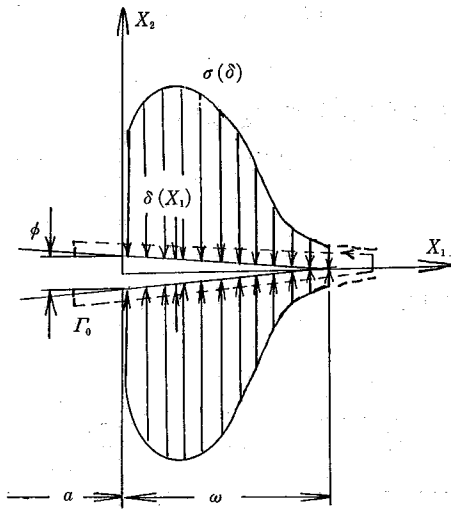


図2 Barenblatt モデル

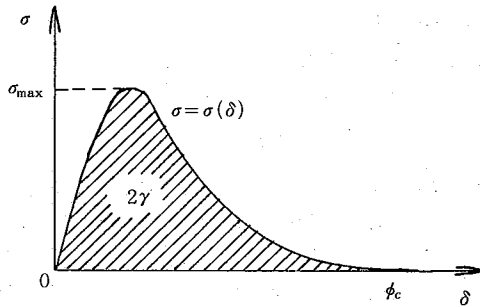


図3 原子面間結合力の変化

みは無限大となってしまいますが、これは連続体モデルにおいてはき裂端近傍に対しても連続性を強制しているために惹起されることであり、現実のき裂端においては連続の条件が満たされなくなるのが普通である。Barenblatt モデルは弾性体を考える場合に対して、この間の事情を第1近似的に反映するモデルと考えられ、連続体モデルよりもより現実に近いモデルといえる。図2はBarenblatt モデルを示したものであり、長さ a のき裂が変形した状態が示してある。 ω 部分において変形後変位が不連続となっており、 ω の幅は、いま長さ $a + \omega$ のき裂があると考え、 ω 部分に働く図3で示されるような開口変位(原子面間距離) δ に対して定まる凝集力と外力によって生じる $a + \omega$ のき裂端に生じる特異性が相殺されるように決定される。⁹⁾ このモデルにおいては、変形前のき裂端の一点は負荷を受けると長さ ϕ まで引き延ばされると考えられ、き裂エネルギー密度は

$$\mathcal{E} = \int_0^{\phi} \sigma(\delta) d\delta \quad (3)$$

によって与えられる。

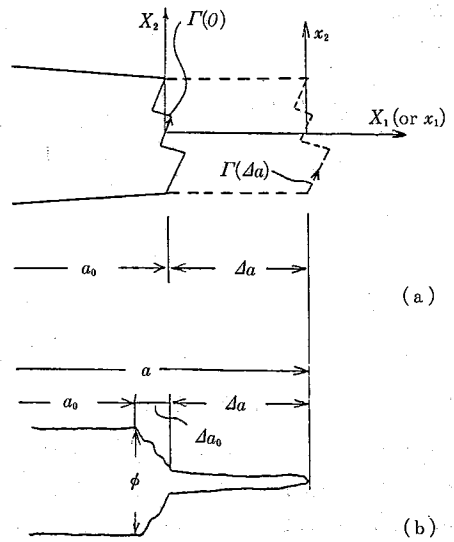


図4 現実のき裂端

現実の材料中に生じるき裂は一般に形状は複雑であり、また外力を加えていくと、き裂先端近傍にはいわゆるプロセスゾーンが発生し、連続体としての要件は満たされなくなって、一般的には応力やひずみも定義できなくなる。このような場合に対しては図4に示すようにき裂長さ a_0 、き裂端形状 $\Gamma(0)$ の初期の状態(図4(a))から先端が鈍化し、さらに Δa だけき裂が進展して(鈍化による見かけの伸び Δa_0 は進展とは見なさないことにする)その長さが a となっている(図4(b))というように考えることにより、き裂エネルギー密度は

$$\mathcal{E} = \int_{\Gamma(a_0)} W dX_2 \quad (4)$$

によって定義される。ここで $\Gamma(\Delta a)$ は初期の状態においてき裂端の前方 Δa に想定した $\Gamma(0)$ と同一形状の径路であり、 W は「変形に際しての変形前の一点に実際になされた仕事を単位体積当たりで表したもの」で、これは広い意味でのひずみエネルギー密度であるが、連続体の場合と異なり一般にはもはや $dW = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$ といった表現のできる量ではない。き裂長さが a のときの実際のき裂端と初期の状態における $\Gamma(\Delta a)$ との対応は図4(b)の状態では複雑であるが、き裂長さが a となったときのき裂エネルギー密度の定義として式(4)のように与えるのは現実的であり、特に実験より得られる荷重-変位曲線から評価される量に対応して重要な意味を持つてくる。^{2),5)}

3. き裂パラメータとしての意味と有効性

負荷を受けて現実のき裂端で生じる変化は極めて複雑であるが、き裂パラメータとしてはその細部はともかく実際にき裂端で生じた変化の程度を包括的かつ代表的に

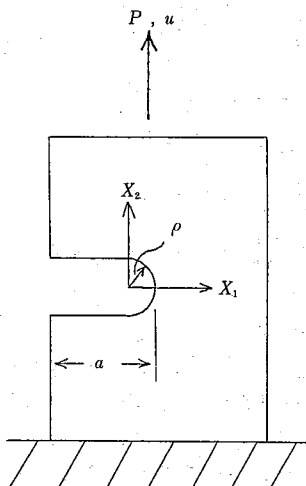


図5 負荷を受けるき裂材

表すものとなっていないなければならない。その意味で実際に起こる変化に対応して定義された式(4)によるき裂エネルギー密度は、負荷を受けて実際にき裂端で生じた変化の程度を単位面積当りのエネルギーの次元で表現したものと考えられ、特に図4(b)において $\Delta a=0$ 、すなわちき裂が進展を開始する前においては、開口変位 ϕ はき裂端で実際に生じた変化の程度を変形の次元で代表的に表すものと考えられるが、この ϕ と式(4)による \mathcal{E} はほぼ1対1対応にあるものと考えられる。すなわち、き裂が異なっても同一材料であれば、 \mathcal{E} が等しければき裂端で生じる変化はほぼ同程度であり、開口変位もほぼ等しくなるということになり、式(4)による \mathcal{E} はき裂パラメータとしての要件を満たしていることがわかる。この間の事情をより明確にするために、弾性体を考えかつ弾性体においてはBarenblattモデルの状態が現実に実現されると仮に考えれば(もちろん現実はこの単純なものではないが)、この場合には式(3)より明らかに \mathcal{E} と ϕ の間には完全に1対1対応があり、 \mathcal{E} は単位面積当りのエネルギーの次元で、 ϕ は変形の次元で、き裂端で生じた変化を一意に決定するパラメータとなっているのがわかる。

さて、以上のように現実に生じる変化に対応して定義されるき裂エネルギー密度は、材料の挙動が弾性的であれば、あるいはクリープのような時間依存性を示すものであれ、すなわち構成則に関係なくき裂端で起こる変化を包括的かつ代表的に表すパラメータとして期待されることになるが、現実に有効なパラメータとなり得るかどうかは、それが実際になんらかの方法で評価できるかどうかにかかっているともしえる。そこで、ここでははじめに荷重-変位曲線に基づく評価法に触れ、続いて連続体モデルによる評価について述べる。なお、ここでの議論は、一応き裂が進展を開始するまで(図1, 4において

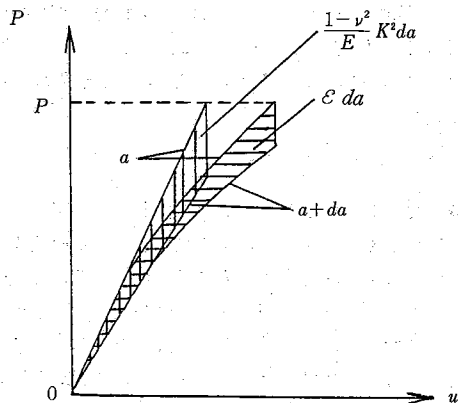


図6 荷重-変位曲線とき裂エネルギー密度

$\Delta a=0$)に限るものとする。

き裂エネルギー密度は、図5に示すようなき裂長さ a のき裂材とき裂長さ $a+da$ のき裂材が、負荷を受ける場合に得られる図6に示すような荷重-変位曲線より

$$\mathcal{E} da = (\text{横線部分の面積}) \quad (5)$$

として評価され、図5にはき裂として図1に対応するものが描いてあるが、2節に述べたいずれのモデルを考える場合であっても、それぞれのモデルに対応して得られる荷重-変位曲線に対してこの関係は成り立つ。²⁾したがって現実のき裂端の変化を代表する式(4)によるき裂エネルギー密度は、実際の試験片を用いての実験による荷重-変位曲線より評価される。

次に連続体モデルによる評価であるが、連続体モデルによる場合、当然ながら連続体の力学が適用でき解析による評価が可能となる。したがって連続体モデルが適用できるかできないかは実用上の観点から重大であり、また従来の破壊力学における主要パラメータ応力拡大係数 K 、 J 積分は連続体の力学において定義される量であるということもあるので、連続体モデルにおける式(1)の \mathcal{E} の持つ意味を考える。

まず弾性体を考え、連続体モデルによる解析の持つ意味を明らかにするために、真実のき裂端の状況はBarenblattモデルの状況であるが、それを連続体モデルとして解いているという場合を想定する。このとき、図2において $\delta(X_1)$ を無理に零に押さえ付けることとなり、その結果応力、ひずみは無限大となってき裂端に生じる変化は本来のものとはまったく異なるものとなる。しかしながらそれぞれのモデルに適用した J 積分の値は、積分径路として図1に示すようなき裂端から十分離れた Γ を考えると、その Γ 上でそれぞれの J 積分に関与する応力、ひずみ、変位はほぼ等しくなるので

$$\tilde{J} \approx J = \frac{1-\nu^2}{E} K^2 \quad (6)$$

となり, Barenblatt モデルにおいて J 積分の積分経路として図2の Γ_0 を採用することにより $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{J}$ が, 連続体モデルにおいても $\mathcal{E} = J$ がいえるので,¹⁾ き裂エネルギー密度については

$$\tilde{\mathcal{E}} \approx \mathcal{E} = J = \frac{1-\nu^2}{E} K^2 \quad (7)$$

が成り立つことになる。ここで上付きの \sim は実際のき裂端の状況を考える場合に対する量の意であり連続体モデルにおける量と区別するために付したもので以後同様である。また E はヤング率, ν は平面ひずみのときポアソン比, 平面応力のとき零である。式(7)の関係が意味するところは, 連続体モデルによるとき, き裂端近傍の応力, ひずみ, 変形状態は現実のものとは異なるが, き裂エネルギー密度については本来の値に数値的に近いものになり, $\tilde{\mathcal{E}}$ を評価する手段として連続体モデルが使えらるということであり, K, J も $\tilde{\mathcal{E}}$ を評価する量として, あるいは $\tilde{\mathcal{E}}$ と (したがって開口変位とも) 1対1対応にある量すなわち実際のき裂端で生じる変化を代表的に表し得る量としての意味を持つことになる。

一般の場合にも荷重-変位曲線を考えることによりほぼ同様のことがいえる。すなわちいずれの場合にも式(5)の関係が成り立つわけであり, 連続体モデルによる荷重-変位曲線と実験によるそれとは正確には異なるわけであるが, その両者がほぼ一致していると見なせる範囲内ではそれぞれに対する図6の横線部分の面積はほぼ等しくなるので

$$\tilde{\mathcal{E}} \approx \mathcal{E} \quad (8)$$

が成り立つ。さらに, 図6中の縦線部分は, 連続体モデルにおいて線形弾性体を想定した場合に得られる荷重-変位曲線に囲まれる部分の面積であるが, 特に実際に得られる荷重-変位曲線がほぼ線形と見なして差支えない荷重範囲では, (横線部分の面積) \approx (縦線部分の面積) となるので

$$\tilde{\mathcal{E}} \approx \frac{1-\nu^2}{E} K^2 \approx \mathcal{E} \quad (9)$$

となり, けっきょく連続体モデルは先に述べたのとまったく同一の意味を持つということがいえ, 一般に $\tilde{\mathcal{E}}$ を評価する有効な一手段として位置付けできることがわかる。

式(1)によるき裂エネルギー密度は, 解析に基づく荷重-変位曲線より式(5)を用いることによって評価できるわけであるが, 経路独立積分 \mathcal{E}_J によっても評価できる。すなわち

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_J &= \int_{\Gamma} (Wn_1 - \int_0^t T_i du_{i,1}) ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_u - \Gamma(\Delta a) + \Gamma_a} \int_0^t T_i du_{i,1} \\ &\quad - \int_A \int_0^t \sigma_{ij,1} d\epsilon_{ij,1} dA \\ &= \int_{\Gamma} (Wn_1 - T_i u_{i,1}) ds \\ &\quad - \int_A \int_0^t (\sigma_{ij,1} d\epsilon_{ij,1} - d\sigma_{ij} \epsilon_{ij,1}) dA \end{aligned} \quad (10)$$

により

$$\mathcal{E} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathcal{E}_J \quad (11)$$

として評価され,⁴⁾ この \mathcal{E}_J 積分による評価は, 以上においてはき裂が進展する場合を考慮しなかったが, き裂が進展する場合も含めて, さらに式(10)は静的な問題に対する \mathcal{E}_J 積分の表示であるが, 慣性力, 体積力をも考慮する場合の表示も求められており,⁴⁾ そのような一般的な場合も含めて有効である。なおここで, T_i, u_i は図1における Γ 上の表面力と変位, n_1 は方向余弦の X_1 方向成分, A は $\Gamma + \Gamma_u - \Gamma(\Delta a) + \Gamma_a$ によって囲まれる面積であり, $(\)_{,1}$ は $\partial(\) / \partial X_1$ を意味している。

き裂エネルギー密度は, 以上述べてきたようにその物理的意味が常に明確, かつ評価可能なパラメータであり, したがって, 脆性-延性破壊,⁵⁾ 疲労破壊,⁶⁾ クリーブ破壊⁷⁾ といった現象の種類によらず, 常に有効なき裂パラメータとして位置付けできることになる。

4. おわりに

破壊力学パラメータとしてのき裂エネルギー密度の位置付け, 考え方についての基礎的な紹介を行った。なおここではき裂端のき裂エネルギー密度のみに話を限ったが, 一般にき裂エネルギー密度は分布する形で定義され,⁵⁾ き裂進展挙動を記述するためには, この分布が重要な意味を持つてくるということを付言しておく。

(1984年4月6日受理)

参考文献

- 1) 渡辺, 機論, 47-416, (1981), 406
- 2) 渡辺, 機論, 48-433, (1982), 1226
- 3) 渡辺, 塩見, 機論, 49-446, (1983), 1277
- 4) 渡辺, 機論, 50-453, (1984), 1
- 5) 渡辺, 畔上, 機講論, 844-1, (1984), 33
- 6) 渡辺, 倉繁, 機講論, 830-10, (1983), 75
- 7) 渡辺, 倉繁, 機械学会第923回講演会前刷集, (1983), 289
- 8) 渡辺, 畔上, 機講論, 840-1, (1984), 198
- 9) Barenblatt, G. I., advances in Applied Mechanics, 7, (1962), 55, Academic Press.