UDC 532.517.4：65.012.1.001.57：681.32

乱流の Large-Eddy Simulation

Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows

吉　澤　　徴*
Akira YOSHIZAWA

平均流を伴う乱流、すなわち剪断乱流の研究はほとんど実験的研究に限られてきた．しかし，近年の大型高速電子計算機の出現によって，実験的方法と十分に肩を並べられるのではないかと思われる数値シミュレーション法が登場した．本解説では，この方法，すなわち Large-Eddy Simulation を紹介する．

1．はじめに

流れに関係した現象は自然および工学的現象に多々現れ，特に乱流と結びついていることが多い．そこで，乱流の諸特性を正しく評価することは，単に乱流現象の理解という観点のみならず，工学的機器の改良，開発のためにも不可欠である．

乱流，特に平均流を伴う剪断乱流の研究は，長い間実験的方法がほとんど唯一のものであったが，近年の高速大容量電子計算機の出現によって数値シミュレーションが乱流研究の一つの有力な手法となりつつある．しかし，乱流には非常に多くのスケールが含まれており，現在使用できるいかなる電子計算機を用いても，これらを同時に扱うことはできないことを強調しておこう．このため，エネルギー散逸に関与した微小スケールの変動部分に関して何らかのモデル化をしなければならない．

乱流を数値シミュレーションするためのモデルとしては，いわゆる乱流モデル[1-3]と Large-Eddy Simulation（略して LES）[4,5]がある．前者は k-ϵ モデル、応力モデルによって代表される．これらのモデルでは，平均速度，レイノルズ応力といったアンサンブル平均または時間平均に関係した量のみが考察の対象となっている．他方，LES では乱流変動そのものが考察の対象となり、現存の電子計算機では扱いきれないエネルギー散逸と直接結びついた小さなスケールの乱れのみモデル化する．その結果，得られた計算結果は乱流の詳細な情報を豊富に持つ反面、高速電子計算機による多大の計算時間を必要とする．

本解説では，まず乱流の直接シミュレーションのむずかしさと関連して LES の重要性を述べ，次に LES モデル，その応用，LES モデルに対する統計理論的基礎付けを述べる．

* 東京大学生産技術研究所　第1部

2．LESの重要性

LES と関連して、乱流の直接シミュレーションを考えてみよう．通常の乱流運動を支配する方程式は，3次元非圧縮，粘性流体に対する Navier-Stokes(略して N-S) 方程式

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}v_\alpha v_\alpha=-\frac{\partial p}{\partial x_\alpha}+\nu\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \tag{1}$$

と流体の非圧縮条件

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \tag{2}$$

によって与えられる．ここで，$\boldsymbol{v}[=(v_\alpha);\ \alpha=1,\ 2,\ 3]$は速度ベクトル，$p$ は流体密度で割られた圧力，ν は動粘性率であり，くろ返し下付き添字については1から3まで和をとる（縮約の規則）．

直接シミュレーションでは，(1)と(2)を多数の格子領域に分割された乱流領域で直接数値積分する．このとき，乱流現象に欠かすことのできないエネルギー散逸機構は，(1)の右辺最終項によって表現される．エネルギー散逸過程の運動スケール l_d は，一様等方性乱流理論により

$$l_d=O[(\nu^3/\epsilon)^{1/4}] \tag{3}$$

で与えられる．ここで，ϵ は単位時間，流体単位質量あたりのエネルギー散逸率である．ϵ は一般に平均流スケールをもつエネルギー注入機構と深く関連しており，平均流の特性長さ L と特性速度 V を用いて

$$\epsilon=O(V^3/L) \tag{4}$$

と評価される．その結果、(3)、(4)より

$$l_d/L=O(R^{-3/4}) \tag{5}$$

となる．ここで，R はいわゆるレイノルズ数であり，

$$R=VL/\nu \tag{6}$$

で与えられる無次元パラメターである．

いま，乱流領域を格子に分割して数値シミュレーショ

表1　レイノルズ数Rに対する必要分割数N

R	10^4	10^5	10^6	10^8	10^{10}
N	10^9	10^{11}	10^{13}	10^{18}	10^{22}

ンする際，l_d のスケールまでこの分割で表現するために必要な分割数 N を評価してみよう．(5)より

$$N=O[(L/l_d)^3]=O(R^{9/4}) \quad (7)$$

となり，N と R の数値は表1に示されている．R の具体的目安を上げると，人間の歩行に対する R は 10^4 程度であり，自動車の走行の R は 10^6 程度である．

自然現象ではスケール L の大きさのため 10^{10} 程度の R をもつ乱流も珍しくない。また，工学的現象でも 10^6 を越える乱流が多々あることは，上の例からも推測できるであろう．R が 10^6 の乱流を直接シミュレーションするために必要な N は，表1より 10^{13} となる．現在，非常に簡単な構造をもつ3次元乱流の場合でもとることのできる N はたかだか 10^6 程度である．このことより，10^{13} という N は将来でもほとんど不可能といえるであろう．

以上のことから，乱流を計算機シミュレーションするためには，エネルギー散逸スケール l_d に関係する変動成分に対して何らかのモデル化を行わなければならない．このような背景のもとに提案されたのが，乱流モデルとLESモデルであり，以下では後者の現状を紹介する．

3. LESモデル

LESにおいては，格子スケール以下の変動をいかにモデルとして組み込めるかにすべてがかかっている．この目的のために，格子平均というLES独得の概念を導入しよう．格子平均には，Deardorff[6] に代表されるフィルタリング (filtering) と Schumann[7] に代表される体積平均の2つがある．後者の方が概念的にはすっきりした点もあるが、実際のモデル化にあたっては，体積平均と面平均が入り混じり，それらを結びつけるモデルが新たに必要となるなど手続きがかなりめんどうである．以下では，フィルタリングのみを説明し，体積平均については文献5,7を参照されたい．

3.1 フィルタリング

関数 $f(\boldsymbol{x})$ のフィルタリングはフィルター $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を用いて[4]

$$\bar{f}(\boldsymbol{x})=\iiint G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} \quad (8)$$

で定義される．$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ としては，ガウシアン・フィルター (Gaussian filter)

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\prod_{\alpha=1}^{3}(6/\pi\Delta_\alpha^2)^{1/2} \times\exp[-6(x_\alpha-y_\alpha)^2/\Delta_\alpha^2], \quad (9)$$

トップ・ハット・フィルター (top-hat filter)

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{cases}\prod_{\alpha=1}^{3}2/\Delta_\alpha & |x_\alpha-y_\alpha|<\Delta_\alpha/2,\\ 0 & \text{ほか},\end{cases} \quad (10)$$

あるいはこれらの結合が用いられている．上式で，Δ_α は x_α 方向のフィルター幅を表し，これにより

$$\Delta=(\Delta_1\Delta_2\Delta_3)^{1/3} \quad (11)$$

として，一つの特性フィルター幅が定義できる．けっきょく，フィルタリングとは，Δ より小さなスケールの変動を粗視化 (coarse graining) することにほかならない．

定義式(8)を用いて

$$f=\bar{f}+f' \quad (12)$$

と分解すると，

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}}=\frac{\partial\bar{f}}{\partial x_\alpha}, \quad (13)$$

$$\bar{\bar{f}}\neq\bar{f},\ \overline{\bar{f}f'}\neq0 \quad (14)$$

となる．もしフィルタリングの代わりに通常のアンサンブル平均 〈 〉 を用いると，(14)に代わって

$$\langle\langle f\rangle\rangle=\langle f\rangle,\ \langle\langle f\rangle f'\rangle=0 \quad (15)$$

を得る．すなわち，(14)はフィルタリングの著しい特徴となっている．

いま，$\boldsymbol{v}$ と p を

$$\boldsymbol{v}=\bar{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{v}' \quad (16)$$

$$p=\bar{p}+p' \quad (17)$$

に分け，(8)を(1)，(2)に適用すると

$$\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\bar{v}_\alpha\bar{v}_\alpha=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(R^*_{\alpha\alpha}+C_{\alpha\alpha}+C_{\alpha\alpha}+L_{\alpha\alpha}+\nu\frac{\partial\bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha}\right), \quad (18)$$

$$\frac{\partial\bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \quad (19)$$

を与える．上式で[8]

$$R^*_{\alpha\beta}=-\overline{v_\alpha' v_\beta'}, \quad (20)$$

$$C_{\alpha\beta}=-\overline{\bar{v}_\alpha v_\beta'}, \quad (21)$$

$$L_{\alpha\beta}=-(\overline{\bar{v}_\alpha\bar{v}_\beta}-\bar{v}_\alpha\bar{v}_\beta). \quad (22)$$

フィルタリングの特徴を明らかにするために，(1)と(2)にアンサンブル平均を用いて見よう．その結果，

$$\frac{\partial\langle v_\alpha\rangle}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\langle v_\alpha\rangle\langle v_\alpha\rangle=-\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(R_{\alpha\alpha}+\nu\frac{\partial\langle v_\alpha\rangle}{\partial x_\alpha}\right), \quad (23)$$

$$\frac{\partial\langle v_\alpha\rangle}{\partial x_\alpha}=0 \quad (24)$$

を得る．上式で $R_{\alpha\beta}$ は

$$R_{\alpha\beta}=-\langle v_\alpha' v_\beta'\rangle$$

で定義されるいわゆるレイノルズ応力である．

(18)と(23)を比較したとき，両者の著しい差異は $C_{\alpha\beta}$，$L_{\alpha\beta}$ に現れている．$C_{\alpha\beta}$ は格子スケールの乱れと格子スケール以下の乱れの相互作用を示しており，また $L_{\alpha\beta}$ は Leonard 項と呼ばれ，格子スケールの乱れの相互作用を

与えている.[8] これに対して, $R^*_{\alpha\beta}$ は $R_{\alpha\beta}$ に対応し, それぞれの平均操作の意味での変動部分間の相互作用から生じる応力であり, 前者は後者にならって真の SGS (subgrid-scale) レイノルズ応力と呼ばれる. けっきょく, LES では $R^*_{\alpha\beta}, C_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}$ をいかに格子スケールの量, すなわち $\bar{v}$ と関係づけるかにそのすべてがかかっているのである.

3.2 Smagorinsky モデル

LES は $R^*_{\alpha\beta}$ に対して Smagorinsky モデル[10] を用いた Deardorff[6] によって初めて2枚の平行平板間の溝乱流に適用された. そこでは, トップ・ハット・フィルター(10)が採用された. また, Δ_α としては計算メッシュ幅が用いられ, 特性フィルター幅 Δ は(11)のように定義された.

$R^*_{\alpha\beta}, C_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}$ のモデル化に関してはDeardorffはまず

$$C_{\alpha\beta}\cong 0, \tag{25}$$

$$L_{\alpha\beta}\cong 0 \tag{26}$$

を仮定した. $C_{\alpha\beta}$ に対しては, これを $R^*_{\alpha\beta}$ に含めて一緒にモデル化することも珍しくないので, (25)は他のモデルと本質的に変わるものではない. むしろ, Deardorff の方法の特徴は(26)にあるが, $L_{\alpha\beta}$ の重要性に関しては定まった評価は現在はない.[9]

$R^*_{\alpha\beta}$ に対する Smagorinsky モデルは次のように構成される. まず, 格子粘性 ν_{SGS} を導入して,

$$R^*_{\alpha\beta}=-\frac{2}{3}K^*\delta_{\alpha\beta}+\nu_{SGS}\bar{e}_{\alpha\beta} \tag{27}$$

と渦粘性表現を行う. 上式で, $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカーの δ 記号であり, K^* は格子スケール以下の乱れの運動エネルギーで

$$K^*=\overline{v_\alpha' v_\alpha'}/2 \tag{28}$$

と書かれる. また,

$$e_{\alpha\beta}=\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \tag{29}$$

もし Δ がいわゆる慣性領域にあるならば, すなわち

$$l_d \ll \Delta \ll L$$

を満たすならば, 格子スケールの物理量にとって Δ と ϵ が重要なパラメターと考えられる. この推論と次元解析を用いると,

$$K=(C_K'\Delta)^{2/3}\epsilon^{2/3}, \tag{30}$$

$$\nu_e=(C_S\Delta)^{4/3}\epsilon^{1/3} \tag{31}$$

を得る. ここで, C_K', C_S は定数であり, 特に後者は Smagorinsky 定数と呼ばれている.

(30)と(31)において注意すべきことは, Δ は与えられたパラメターであるのに対して ϵ は LES の過程で決定さるべき量であることである. したがって, ϵ は格子スケールの $\bar{v}$ と何らかの方式で関係づけられねばならない. これに対する興味ある試みは, 格子スケールでのエネルギーの消滅, 生成が平衡状態にあると近似することである. すなわち,

$$\epsilon\simeq R^*_{ab}\frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a}. \tag{32}$$

(32)の関係は, アンサンブル平均を用いたときは溝乱流, 管内流, 境界層流等で比較的良い近似になっているが, ジェットやウェイクでは必ずしも満足されていない.

(32)を用いて(30), (31)から ϵ を消去すると

$$K^*=\nu_{SGS}^2/(C_K\Delta)^2, C_K=(C_S^4/C_K')^{1/3}, \tag{33}$$

$$\nu_{SGS}=(C_S\Delta)^2[(\bar{e}_{ab})^2/2]^{1/2} \tag{34}$$

となる. $C_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}$ は既に無視されているので, (33), (34)を(18), (19), (27)と併せることによって閉じた方程式系を得る. これが Smagorinsky モデルである. これは以後のより精密なモデルの原型をなすものであり, 格子スケール以下の変動成分に対して慣性領域形を適用するという考えは, すべての LES モデルの基本となっている.

3.3 Moin と Kim のモデル

溝乱流に対する LES の適用は, 最近 Moin と Kim[11] によっても発展させられた. 彼等は壁な垂直な x_2 方向の乱流スケールの変化の重要性を考慮して, x_1 (流れ) 方向, x_3(x_1, x_2 に垂直) 方向に対して, (9)のようなガウシアン・フィルターを採用し, x_2 方向には(10)と類似のトップ・ハット・フィルターを用いた. 更に, フィルター幅 Δ_α として, 計算メッシュ幅 h_α の2倍, すなわち

$$\Delta_\alpha=2h_\alpha$$

を選び, フィルターの特性幅を(11)で定義した.

上述のフィルターを用いると(18), (19)を得るが, 少し異なった形で(18)を

$$\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial t}-(\bar{v}\times\bar{\omega})_\alpha+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{2}\overline{\bar{v}_\alpha\bar{v}_\alpha}=-\frac{\partial P}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_a}\left(\tau_{\alpha a}+\nu\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_a}\right) \tag{35}$$

と書いておこう. 上式で

$$\bar{\omega}=\nabla\times\bar{v}, \tag{36}$$

$$\tau_{\alpha\beta}=Q_{\alpha\beta}-\frac{1}{3}Q_{aa}\delta_{\alpha\beta}, \tag{37}$$

$$P=\bar{p}+\frac{1}{3}Q_{aa}. \tag{38}$$

ただし,

$$Q_{\alpha\beta}=R^*_{\alpha\beta}+C_{\alpha\beta}+C_{\beta\alpha}. \tag{39}$$

$R^*_{\alpha\beta}, C_{\alpha\beta}$ からなる $\tau_{\alpha\beta}$ に対しては, Moin と Kim は Schumann[7] の考えにならってモデル化をした, Schumann は SGS レイノルズ応力のモデル化にあたって唯一つの格子粘性を用いるのは, 十分ではないと考えた. なぜなら, 格子スケールの歪み $\bar{e}_{\alpha\beta}$ はアンサンブル平均に基づく $\langle\bar{e}_{\alpha\beta}\rangle$ を包含しており, その特性長さは残りの部分 $\bar{e}_{\alpha\beta}-\langle\bar{e}_{\alpha\beta}\rangle$ のそれに比べて著しく長く, 両者の特性は互いにかなり異なると思われるからである. 上述の考えを基に, Moin と Kim は二つの格子粘性を使って

$$\tau_{\alpha\beta}=\nu_{SGS}(\bar{e}_{\alpha\beta}-\langle\bar{e}_{\alpha\beta}\rangle)+\nu^*_{SGS}\langle\bar{e}_{\alpha\beta}\rangle \tag{40}$$

と表現した．第一の格子粘性 ν_{SGS} は歪みの小スケール部分 $\bar{e}_{\alpha\beta}-\langle\bar{e}_{\alpha\beta}\rangle$ のみに関係しているので

$$\nu_{SGS}=(C_M\Delta)^2[(\bar{e}_{ab}-\langle\bar{e}_{ab}\rangle)^2/2]^{1/2} \tag{41}$$

とモデル化する．ただし，C_M は定数である．このモデルは Smagorinsky モデル(34)と本質的に同じものであり，C_M は Smagorinsky 定数に対応するものである．

第二の格子粘性 ν^*_{SGS} は $\langle\bar{e}_{\alpha\beta}\rangle$ によって生じる非一様性を説明するためのもので、

$$\nu^*_{SGS}=[C^*_M\Delta_3 f(x_2)]^2(\langle\bar{e}_{ab}\rangle^2/2)^{1/2} \tag{42}$$

とモデル化される．ここで，C^*_M は定数であり，$f(x_2)$ は壁上で0になる適当な壁減衰 (wall-damping) 関数である．(42)において，特性長さスケールとして Δ_3 が選ばれているが，これは壁附近の乱流構造が x_3 方向のストリークス (streaks) と呼ばれる微細構造の影響を多々受けるという実験事実に基づいている．

4. LES の 応 用

LESの剪断乱流への適用は，現時点では溝乱流へかなり集中されている．これは溝乱流の基本的重要性に加えて，固定境界が一方向のみという数値解析上の容易さにもよる．以下では，それらを中心にLESの発展を概観しよう．

すでに述べたように，LES は Deardorff[6] によって初めて溝乱流に適用された．彼は領域を流れ (x_1) 方向に3D, スパンワイズ(x_3)方向に0.7D取り，両方向に周期境界条件を課した(D は溝の幅)．また，この領域を x_1, x_2, x_3 方向におのおの24, 20, 14個の格子間隔に分割した．壁(x_2)方向の20個の分割では，壁附近の第一格子点はいわゆる対数速度層の中に入っており，壁面上ですべり無し条件を課すことはできない．そこで，Deardorff は $\langle\bar{v}\rangle$ に対する対数速度則で壁面条件を置き換えた．この方法では，LES で扱う生の $\bar{v}$ と $\langle\bar{v}\rangle$ を壁面で結びつけるモデル式が必要となるが，その理論的根拠が定かでないことが難点である．

上の方法より，Deardorff は溝乱流に対する種々の統計量を求め，エネルギー・バランス等を論じた．この際，(34)の C_s としては0.1程度が適当であることを得た．計算結果は実験値と比べかなり一致する点もあるが，不十分な点も多く，LES を実験的手法に匹敵するほどの強力な手法とするという本来の目的には必ずしも到達していない．

最近，堀内[12] は Deardorff の方法を踏襲して溝乱流を再検討した．このとき，彼は圧力に対するポアソン方程式を正確に解く方法を工夫し，Deardorff よりも長い時間ステップ数値積分を実行した．その結果，平均流の速度分布等は Deardorff のものよりも実験値とよく一致することがわかり，壁面付近でのバースト (burst) 現象も再現された．さらに，壁減衰関数 $f^*(x_2)$ を用いて，壁面付近で Δ を $\Delta f^*(x_2)$ に置き換えることによってすべり無しの条件を課した．その結果，バーストとともにスウィープ (sweep) の現象も再現された．

Moin と Kim[11] の研究は堀内とほぼ同時期に行われた．彼等は x_1 の方向に 2πD, x_3 方向に0.5 πD 取り，x_1, x_2, x_3 方向に各々64, 128, 128という格子分割を行った．128という x_3 方向への微細分割は，同方向に生じるストリークス (streaks) が壁面付近での乱流構造の決定に重要であるという実験事実によっている．壁面上ですべり無し条件を課すために，彼等も(42)の $f(x_2)$ 等の壁減衰関数を導入した．このとき，定数としては $C_M\simeq0.065, C'_M\simeq0.25$ を見い出したが，C_M の20%程度の変動には結果はあまり変わらないことも分かった．総数516096という厖大な格子点に基づく Moin と Kim の計算結果は，実験値とかなりの点でよく一致しており，LES の本来の目標にかなっているといえるであろう．

最後に，LES の他の発展について触れてみよう．本解説では述べなかった体積平均に基づく方法が，Schumann[7] によって提案され，溝乱流，同心円筒内乱流に適用された．彼は溝乱流の場合 x_1, x_2, x_3 方向に32, 128, 26の分割を行い，Deardorff と同様の境界条件を課した．その結果，Deardorff のそれよりも著しく改善された結果が得られたが，これが体積平均に基づくモデルによるのか、または約10倍多い格子数によるものが明らかでない．日本でも LES の研究は少なくなく，前述の堀内に加えて狩野・小林・石原[13] による乱流促進体をもつ溝乱流およびその中での熱伝達の研究，持田・日比・村上[14] による地上の建物まわりの乱流の研究等がある．また，LES の簡便な使用例として，藤本・大熊・赤木[15] の2次元角柱まわりの乱流の研究がある．

5. LES モデルの統計理論的基礎づけ

前節までに紹介された LES モデルは，すべて次元解析的に導出されたものであり，その理論的根拠は必ずしも十分ではない．また，モデル中に含まれる定数の評価も経験的な域を出ていない．これらの課題への解答は，乱流の統計理論の恰好の研究対象といえるであろう．

乱流の統計理論的研究はほとんど平均流をもたない一様乱流に限られており，剪断乱流の統計理論的研究は非常に少ない．ここでは，その中でモデル研究まで含むものとしては多分唯一のものである著者の2スケール理論を極めて簡単に紹介し，その一応用として LES モデルの導出を述べてみよう．

2スケール理論の大要は次のようにまとめられる：[16-19]

A) 平均場およびそれからのずれを示す擾乱部分の時空間変動の速さを区別するスケール・パラメター δ を導入する．すなわち，時空間変数として速い変動を表す変数 $\boldsymbol{x}, t$ と遅い変動を表わす変数 $\boldsymbol{X}, T$ を

$$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{X}(=\delta\boldsymbol{x});t,\ T(=\delta t) \tag{43}$$

のように導入する．これを用いて，変動量 f を

$$f=\langle f\rangle(\boldsymbol{X};T)+f'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{X};t,T) \tag{44}$$

と書くことにする．スケール・パラメター δ は $\boldsymbol{X}\to\delta\boldsymbol{x}$, $T\to\delta t$ の置き換えによって自動的に最終結果より消えることを注意しておく．

B）空間変数 $\boldsymbol{x}$ で表現される速い変動成分のみフーリェ（波または渦）表現する．すなわち

$$f'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{X};t,T)=\int f'(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X};t,T)\times\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})d\boldsymbol{k}. \tag{45}$$

C）速度，圧力の擾乱部分 $\boldsymbol{v}', p'$ を

$$f'=\sum_{n=1}^{\infty}\delta^n f_n' \tag{46}$$

と展開し，$f_n'(n\geqq1)$ を f_0' で表現する．

D）上の解を用いて種々の統計量を場の理論におけるプロパゲーターくり込み(propagator renormalization)法を用いて計算する．

E）手続きDで求められたレイノルズ応力等に対する表現はかなり複雑であり，工学的問題への直接的応用には必ずしも向いていない．そこで，f_0' に対する慣性領域型近似を用いて簡単化を行う．

上述の手続き A-D を用いて種々の統計量，すなわち

$R_{\alpha\beta}$,[19,20] $\langle v_\alpha' v_\beta' v_\gamma'\rangle$,[17] $\langle p' v_\alpha'\rangle$,[17]

$\left\langle p'\left(\dfrac{\partial v_\beta'}{\partial x_\alpha}+\dfrac{\partial v_\alpha'}{\partial x_\beta}\right)\right\rangle$[16]

等がすでに求められている．以下では，さらに手続き E を施した場合の $R_{\alpha\beta}$ についてのみ表現を書き下してみよう．スケール・パラメータ δ の1次の展開までは

$$R_{\alpha\beta}=-\frac{2}{3}K\delta_{\alpha\beta}+\nu_e\langle e_{\alpha\beta}\rangle \tag{47}$$

となり，乱流エネルギー $K(\equiv\langle v_\alpha' v_\alpha'\rangle/2)$ と渦粘性係数 ν_e は

$$K=0.665\epsilon^{2/3}l^{2/3}, \tag{48}$$

$$\nu_e=0.0349\epsilon^{1/3}l^{4/3} \tag{49}$$

となる．ここで，l は乱れのスケールを特徴づける特性長さであり，手続 E の簡単化から生じている．(47)は $R_{\alpha\beta}$ の渦粘性表現そのものであり，これによって同表現に対する統計理論的基礎づけが初めて与えられたといえよう．

乱れの特性スケール l は一意的に測定結果と対応する量ではないので，測定可能量 K, ϵ を用いて(48)より

$$l=1.84K^{3/2}/\epsilon \tag{50}$$

と書き直す．その結果，(49)，(50)より

$$\nu_e=0.0785K^2/\epsilon \tag{51}$$

を得る．ν_e に対するこの表現は乱流モデル中の k-ϵ モデルそのものであり，定数0.08は経験値0.09に極めて近い．このことは，2スケール理論より得られた数値への信頼性をある程度保証するものであろう．

上述の結果を援用して LES モデルを導出してみよう．フィルターという操作は統計力学における平均操作とは馴染みにくい点があるので，本質的には同じであるが，少し異なった平均操作を導入しよう．LES では格子スケール Δ より大きなスケールをもつ運動のみ考察の対象としているので，f の格子平均として[20]

$$\bar{f}(\boldsymbol{x};t)=\int_{k<k_G}f(\boldsymbol{k};t)\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})d\boldsymbol{k}+\left\langle\int_{k>k_G}f(\boldsymbol{k};t)\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})d\boldsymbol{k}\right\rangle \tag{52}$$

を導入する．このとき，変動成分 f' は

$$f'(\boldsymbol{x};t)=\int_{k>k_G}f(\boldsymbol{k};t)\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})d\boldsymbol{k}-\left\langle\int_{k>k_G}f(\boldsymbol{k};t)\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})d\boldsymbol{k}\right\rangle \tag{53}$$

となる．(52)，(53)で k_G は格子の特性波数で

$$k_G=2\pi/\Delta \tag{54}$$

で与えられる．

(52)の格子平均操作を用いると，適当な近似のもとで $R^*_{\alpha\beta}(\equiv-\overline{v_\alpha' v_\beta'})$ は(27)のように与えられ，また

$$K^*=0.665\epsilon^{2/3}\Delta^{2/3}, \tag{55}$$

$$\nu_{SGS}=0.0349\epsilon^{1/3}\Delta^{4/3} \tag{56}$$

となる [(48)，(49)の l を Δ で置き換えればよい]．ϵ に関する関係式を得るために，K^* に対する方程式

$$\frac{\partial K^*}{\partial t}+\bar{v}_a\frac{\partial K^*}{\partial x_a}=R^*_{ab}\frac{\partial\bar{v}_b}{\partial x_a}-\epsilon-\frac{\partial}{\partial x_a}\left(\frac{1}{2}\overline{v_a' v_b' v_b'}+\overline{p' v_a'}\right) \tag{57}$$

において，エネルギーの生成，消滅の平衡関係，すなわち(32)を仮定する．この仮定と(55)，(56)より ϵ を消去すれば，実際 Smagorinsky モデルを得る．たとえば，SGS 渦粘性係数は

$$\nu_{SGS}=(0.081\Delta)^2[(\bar{e}_{ab})^2/2]^{1/2} \tag{58}$$

となり，Smagorinsky 定数も経験値0.1にかなり近い．

Smagorinsky モデルは実際の LES においてもある程度うまく機能することが，すでに分かっているので，これに対する統計理論的基づけは工学的にはそれほど興味はないかもしれない．むしろ，統計理論の重要性は，新しい LES モデルの導出にあるのであろう．その一例として，浮力作用下の剪断乱流に対して2スケール理論から得られた LES モデルを与えておこう．すなわち，[21]

$$\frac{\partial\bar{v}_\alpha}{\partial t}+\bar{v}_a\frac{\partial\bar{v}_\alpha}{\partial x_a}=-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\bar{p}+\frac{2}{3}K^*\right)+\frac{\partial}{\partial x_a}\left(\tau_{\alpha a}+\nu\frac{\partial\bar{v}_\alpha}{\partial x_a}\right)+A_\alpha\bar{\theta}, \tag{59}$$

$$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t}+\bar{v}_a\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_a}=\frac{\partial}{\partial x_a}\left(H^*_a+\kappa\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_a}\right). \tag{60}$$

上式で，θ は温度，$\boldsymbol{A}$ は浮力の強さを示すパラメータであり，また

$$\tau_{\alpha\beta}\equiv-\overline{v_\alpha' v_\beta'}+\frac{2}{3}K^*\delta_{\alpha\beta}$$

$$=\nu_{SGS}\bar{e}_{\alpha\beta}+\lambda_1\left(A_\beta\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_\alpha}+A_\alpha\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_\beta}\right.$$

$$-\frac{2}{3}A_\alpha\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\Big), \tag{61}$$

$$H_\alpha^*=-\lambda_2 A_\alpha+\varkappa_{SGS}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_\alpha}+\lambda_3 A_\alpha\bar{e}_{\alpha a}. \tag{62}$$

ただし，(61)，(62)中の $K^*,\cdots,\lambda_3$ は

$$K^*=(0.19\Delta)^2[(\bar{e}_{ab})^2/2]^{1/2}, \tag{63}$$

$$\nu_{SGS}=(0.081\Delta)^2[(\bar{e}_{ab})^2/2]^{1/2}, \tag{64}$$

$$\lambda_1=(0.099\Delta)^2, \tag{65}$$

$$\lambda_2=(0.15\Delta)^2\left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_a}\right)^2/[(\bar{e}_{ab})^2/2]^{1/2}, \tag{66}$$

$$\varkappa_{SGS}=(0.12\Delta)^2[(\bar{e}_{ab})^2/2]^{1/2}, \tag{67}$$

$$\lambda_3=(0.098\Delta)^2\left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x_a}\right)/[(\bar{e}_{ab})^2/2] \tag{68}$$

と書かれ，$\varkappa_{SGS}$ は SGS 渦拡散係数である．上の表現式中で $\boldsymbol{A}=0$ とすれば，Smagorinskyモデルとパシィブ(passive)な温度場に対する対応するモデルを得る．このとき，(64)，(67)より速度場と温度場に対するSmagorinsky定数の比が1：1.2程度であることが分かる．

6. おわりに

本解説では，LESの基本的考え方とその実際的応用を概説した．LESの特徴を一言でいえば，モデル化を格子スケールという小さなスケールで行っているので，モデルの普遍性が高いと期待されることである，この点をよりはっきりさせるために，乱流モデル中の k-ϵ モデルと比較してみよう．そこでは，平均としてはアンサンブル平均が用いられているが，この平均操作はLES流にいえば乱流の特性スケール［(50)の l］程度の幅をもつフィルターによるフィルタリングである．その結果，$l\gg\Delta$ である限り，LESモデルの方がモデル化のスケールがはるかに小さく，普遍性の高さを期待できる．しかし，そのためにはLESでは相当の格子数とそれに付随した計算時間を必要とする．したがって，少なくとも現時点ではLESは乱流モデルの検討等の基本的問題の研究に適しており，大型計算機を有する大学の研究に向いているかも知れない．いずれにしろ，LESはまだデータの蓄積段階にあり，高速計算機の発展につれての今後の展開が待たれている．

終わりに，この小論を解くにあたり，本所小林研究室，村上研究室との共同研究が有益であったことを記すと共に，LESの発展に本所内の研究が多大の寄与を与えることを願っている．　　　　　(1984年2月1日受理)

参 考 文 献

1) P. Bradshaw, T. Cebeci, and J.H. Whitelaw: *Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow* (Academic, London, 1981).
2) 吉澤　徴：剪断乱流の統計力学，**フィジクス** 4(1983) 125.
3) 吉澤　徴：乱流モデルと剪断乱流の統計理論，**日本物理学会誌** 38(1983)845.
4) R. S. Rogallo and P. Moin: Numerical Simulation of Turbulent Flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **16**(1984)99.
5) A. Yoshizawa: Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows, in *Encyclopedia of Fluid Mechanics,* Vol. VI (Houston, Gulf Publishing Company) Chap. 38 (to appear).
6) J.W. Deardorff: A Numerical Study of Three-Dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Numbers, *J. Fluid Mech.* **41**(1970) 453.
7) U. Schumann: Subgrid Scale Model for Finite-Difference Simulations of Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli, *J. Comp. Phys.* **18**(1975)376.
8) A. Leonard: Energy Cascade in Large-Eddy Simulations of Turbulent Fluid Flows, *Adv. in Geophys.* **18A** (1974)237.
9) M. Antonopoulos-Domis: Aspects of Large-Eddy Simulation of Homogeneous Isotropic Turbulence, *Intern. J. Num. Meth.* **1**(1981)273.
10) J. S. Smagorinsky: General Circulation Experiments with the Primitive Equations: Part I, Basic Experiments, *Mon. Weath. Rev.* **91**(1963)99.
11) P. Moin and J. Kim: Numerical Investigation of Turbulent Channel Flow, *J. Fluid Mech.* **118**(1982) 341.
12) K. Horiuti: Study of Incompressible Turbulent Channel Flow by Large-Eddy Simulation, *Theor. and Appl. Mech.* **31**(1982)407.
13) 狩野正徳，小林敏雄，石原智男：乱流促進体まわりの流れの数値予測に関する研究(第4報)，**生産研究** 35(1983) 1.
14) 持田　灯，日比一喜，村上周三：未公表．
15) 藤本盛久，大熊武司，赤木真：角柱周辺の気流および風圧力に関する数値的研究，**日本建築学会論文報告集 264** (1978)21.
16) A. Yoshizawa: A Statistical Investigation of Shear Turbulence: the Reynolds-Stress Transport Equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **51**(1982) 658.
17) A. Yoshizawa: Statistical Evaluation of the Triple Velocity Correlation and the Pressure-Velocity Correlation in Shear Turbulence, *J. Phys. Soc. Jpn.* **51** (1982)2326.
18) A. Yoshizawa: Statistical Analysis of the Deviation of the Reynolds Streass from Its Eddy-Viscosity Representation, *Phys. Fluids* **27** (1984) No. 5.
19) A. Yoshizawa: Statistical Theory for the Diffusion of a Passive Scalar in Turbulent Shear Flows, *J. Phys. Soc. Jpn.* **53** (1984) No. 4.
20) A. Yoshizawa: A Statistically-Derived Subgrid Model for the Large-Eddy Simulation of Turbulence, *Phys. Fluids* **25** (1982) 1532.
21) A. Yoshizawa: A Statistical Theory of Thermally-Driven Turbulent Shear Flows, with the Derivation of a Subgrid Model, *J. Phys. Soc. Jpn.* **52**(1983)1194.