

不連続体力学のすすめ(その7)

—薄肉鋼構造の極限強度シミュレーション—

Development of Discontinuum Mechanics (VII)

—Computer Simulation on the Ultimate Strength of Thin-Walled Steel Structures—

都 井 裕*・川 井 忠 彦*

Yutaka TOI and Tadahiko KAWAI

薄肉鋼構造の極限強度問題に対する剛体・ばねモデル (RBSM) の応用現況を、最近の成果を中心に総括的に解説する。すなわち、すでに基本アルゴリズムの完備している薄肉構造用の各要素モデルの概要を述べた後、RBSM による極限強度シミュレーションの有用性を論ずる上で代表的と考えられる塑性崩壊問題、衝撃崩壊問題、および塑性安定問題に対する計算例を紹介する。合わせて、既存の数値解法との関連、今後の問題点などにも触れる。

1. 序

固体あるいは構造物の極限強度を評価するための、新しい概念の離散化モデルが 1976 年に川井により提案された。この離散化モデルは互いの相対運動に抵抗するばね系により結合された剛体要素により構成されており、「剛体・ばねモデル (Rigid Bodies-Spring Model, 略称 RBSM)」と総称されている。本離散化モデルの由来・意義、固体力学諸問題への応用、および RBSM から派生した種々の簡易要素モデルについては文献 1) に集大成されており、本解説記事 (その 1) から (その 5) においても逐次 RBSM の基礎的側面が論じられてきている。

RBSM の最大の特徴は、最終崩壊状態にある固体・構造物においてしばしば観察される塑性関節、すべり、亀裂などの変位の不連続線 (面) を、ばね系に所要の特性を付与することにより容易に表現可能な点にある。この特徴を活用すれば、RBSM は固体・構造物の極限強度問題の離散化解析において大いにその有効性を発揮し得るが、他方、連続体の数学的近似モデルとしては不十分な面があり、一般に線形解の精度および収束性は必ずしも保証されない。すなわち、RBSM は極限強度解析専用の物理モデルとして位置づけられる。工学的、実用的な性格の極めて強い離散化モデルであり、この点を強調して、RBSM による固体・構造非線形解析を「離散化極限解析 (Discrete Limit Analysis)」と称している。換言すれば、固体の挙動を支配する偏微分方程式を数値的に精密に解くための「数値解析」法としてよりも、むしろ、実際の物理現象を必ずしも微分方程式を介さずに計算機上で模擬することを目的とする、いわゆる、「計算機シミュレーション」の一手法として RBSM を解釈することが、より

適切な視点と考えられる。

著者のひとりには主に、RBSM を薄肉鋼構造の極限強度シミュレーションに応用するための基礎的研究に携わっており、最近の成果は文献 2) — 7) などに詳述されている。これらの研究では、はり、骨組、平板、回転対称殻および一般の殻構造の静的・動的非線形問題が扱われ、RBSM による薄肉鋼構造・極限強度シミュレーションの基本的アルゴリズムは現時点においてほぼ完備していると言ってよい。その詳細な説明は上記の引用文献に譲り、本報告では薄肉構造解析のための諸要素モデルの簡単な紹介と、RBSM の有用性を示す上で代表的と考えられる塑性崩壊問題、衝撃崩壊問題、塑性安定問題に対するシミュレーション例の説明を行い、薄肉鋼構造解析の分野における RBSM の応用現況を総括的に解説する。有限要素法、差分法などの既存の有力な数値解法との関連についても本文中で適宜触れたい。

2. 薄肉構造解析のための剛体要素モデル

RBSM の物理的概念に従い誘導した薄肉構造解析用の諸要素モデルを Fig. 1 に示す。いずれの要素モデルにおいても、要素自身は剛体と仮定されており、隣接要素はその境界断面上で互いの相対的な運動に抵抗するばね系により結合されている。解析対象とする構造物の形態に応じ、真直棒、円錐台リング、三角形曲面板、三角形平板の 4 種類の要素形状が選択されている。

要素間を結合するばね系の設定に関しては、次の 2 種類の考え方がある。

- { (I) 分布ばね系 (distributed spring system)
- { (II) 集中ばね系 (lumped spring system)

{ (I) は要素境界断面上の各点に要素間並進相対変位に抵抗するばねを分布させる方法であり、(II) は並進および回転相対変位に抵抗するばねを要素境界断面上の図心点

* 東京大学生産技術研究所 第 2 部

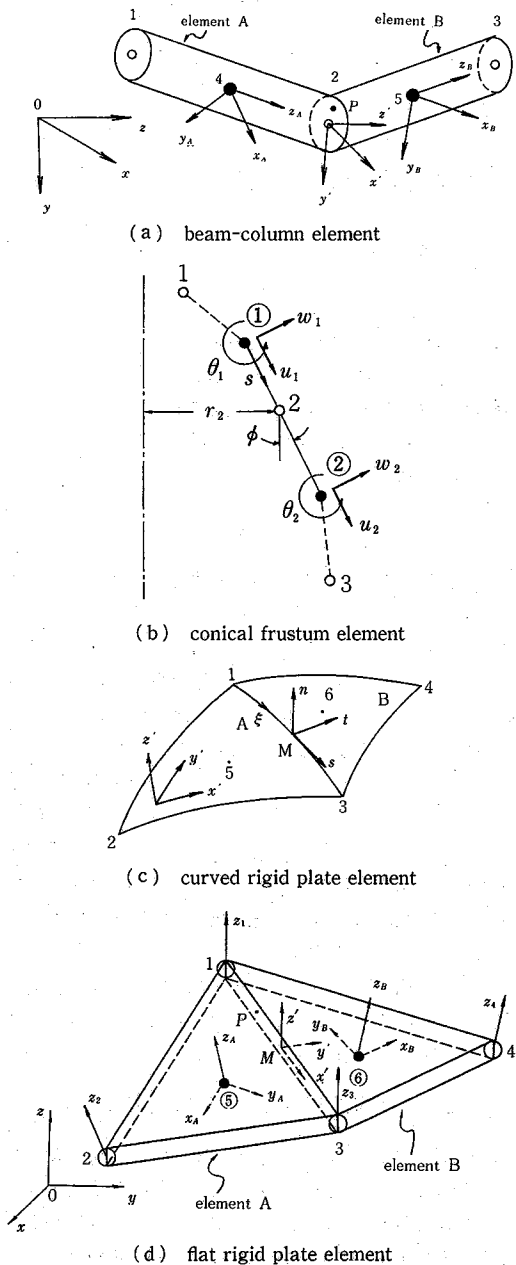


Fig. 1 Rigid element models for the discrete limit analysis of thin-walled structures

に集中的に挿入する方法である。〔I〕の方法に従えば、任意の材料構成式を比較的容易に導入可能であり、要素境界断面における塑性域・亀裂の進展などを精密に追跡できるため、汎用性は高まるが、断面剛性の算定に数値積分演算を伴うため計算時間が増大する。一方、〔II〕の方法は塑性関節などの概念を積極的に用いて断面力レベルで材料非線形性に対処しようとする方法であり、計算時間は従来の有限要素解析と比較して飛躍的に短縮化さ

れるが、応力とひずみの関係として与えられる任意の材料構成式を断面力表示に変換することには一般に相当の困難が伴い、また塑性安定問題などのように断面内の塑性域・除荷域の進展が重要な意味を有する問題の解析にも不向きである。以上の得失を考慮のうえ、解析を試みる問題に応じて適切なばね系を使用する必要がある。

また各剛体要素の節点変位自由度の設定についても選択の余地が残される。剛体変位の全自由度(3次元運動の場合には6成分)を要素の内部節点(通常は要素重心点)に設け、各要素に独立な剛体運動を許容する方法が最も一般的であるが、薄肉構造の極限強度問題においては面外せん断変形、ねじり変形を無視しても実用上支障ない場合も多い。そのような場合は、面内変位自由度のみ内部節点に置き、横たわみの自由度を要素境界面上の隣接要素共有節点に設定することにより、全体系総自由度数を相当減らすことが可能である。前者の方法に従った場合は通常の有限要素法と同様に、局所座標系で計算した各要素境界の断面剛性マトリックスを全体座標系に変換しながら加え合わせてゆく手順をとれるが、後者の場合は要素座標、節点座標などの局所座標により全体系剛性方程式を表示しなければならない点は注意が必要である。以下に各要素モデルの概要を順次説明する。

2.1 梁柱要素モデル (beam-column element model)

梁柱および骨組構造解析のための1次元要素モデルであり、線形解の収束性は保証されている。各剛体要素に独立に6自由度を設定し、せん断変形を考慮した場合、本要素モデルは Hughes らによる reduced integration 法を用いた Timoshenko ばり要素¹⁾と等価であることが両者のひずみエネルギー近似式を比較することにより確認できる²⁾。この事実は、Hughes の要素が要素内部で変位の不連続性を許容しており、塑性関節の概念を用いた極限解析等に有効に利用し得ることを示唆している。文献2)では、はりおよび骨組構造の衝撃崩壊問題に対する計算例が紹介されている。

I 型断面材、L 型断面材など工学的に重要な、いわゆる薄肉開断面部材の挙動においては、断面のゆがみ(warping)が無視できない因子であるが、剛体変位場に基づく1次元RBSMの定式化ではこの影響が含まれず、部分的に剛体要素の仮定を崩して warping に関する項を付加する必要がある。薄肉開断面材の塑性曲げねじり座屈など、warping の効果を含む非線形解析のアルゴリズムは現段階では確立しておらず、処罰法有限要素解析あるいは変分差分法の立場からの検討も含め、今後の課題となっている。

2.2 円錐台要素モデル (conical frustum element model)

回転対称シェル専用の要素モデルであり、面外せん断

変形を無視した場合は Bushnell らによる変分差分モデル⁹⁾、面外せん断変形を考慮した場合は、前節で述べた Hughes の要素と同様の手法で誘導された Zienkiewicz の一次円錐台要素¹⁰⁾とほぼ等価である。これらの要素は簡単でかつ線形解の精度が良好という特長を有しており、特に Bushnell の研究は、BOSOR 5 などの解析コードに集約され、補強回転対称殻の座屈解析などを中心として広く使用されている。RBSM における円錐台要素モデルは他の要素モデルと同様に極限強度問題への適用を主目的に構成され、文献 2) では回転対称シェルの衝撃崩壊問題、文献 11) では弾塑性飛移り問題が集中ばね系を用いてシミュレートされている。

2.3 曲面剛体要素モデル (curved rigid element model)

円筒殻、球殻、トロイダルシェルなど、直交曲線座標系における座標曲面として肉厚中央面が定義されるような殻構造専用の曲面要素モデルである。本要素モデルは任意の直交曲線座標系を仮定して一般的に誘導され³⁾、その中に含まれる特定ケースとして、円筒殻および球殻に対する塑性解析例がそれぞれ文献 3) および 12) で紹介されている。本剛体要素は形状近似を含まないため、比較的粗な分割による塑性崩壊解析などに適する。

2.4 平板剛体要素モデル (flat rigid element model)

折れ板近似により任意形状の薄肉板殻構造に適用可能な三角形平板要素モデルであり、汎用コードの開発に適する。前述したように、梁柱要素モデルおよび円錐台要素モデルなどの 1 次元要素モデルについては、変分差分法あるいは有限要素法との関連がかなり明確にされているが、2 次元要素モデルに対する同様な検討はほとんど成されていない。有限要素法の分野でも極限解析への応用を念頭に置いた非適合要素の再検討、塑性変形の局所化現象の解析などが近年話題になっており¹³⁾、reduced integration 法による平板曲げ要素⁹⁾の線形解が極めて良好なこと、および RBSM が極限解析向きの離散化モデルであることを考えれば、上述のようなモデル間の比較検討を行うことは双方に有意義な結果をもたらす可能性があり、考慮に値する。

なお、要素間を結合するばね系として集中ばね系を用いた平板剛体要素モデルの定式化は文献 4) に、分布ばね系を用いた定式化は文献 5)、14) に詳述されており、塑性崩壊問題、衝撃崩壊問題、塑性安定問題に対する数値例がそれぞれ文献 4)、6)、5) と 7) に示されている。

3. 薄肉構造の極限強度シミュレーション

本章では、すでにその概要を述べた薄肉構造解析用の諸剛体要素モデルによる計算例のいくつかを紹介し、合わせて RBSM による薄肉鋼構造・極限強度シミュレ-

ーションの意義を簡単に論じたい。

3.1 塑性崩壊問題のシミュレーション

いわゆる塑性解析法¹⁵⁾は構造物の塑性崩壊強度を評価するための有用な手法の一つであり、特に崩壊荷重に対する理論計算式が得られる利点があるが、計算の複雑さおよび適切な塑性崩壊機構を仮定することの困難さゆえ、単純な骨組、平板、殻の軸対称問題などにその適用対象は制限される。集中ばね系を用い断面力表示による降伏曲面を仮定した RBSM による荷重増分解析法は、

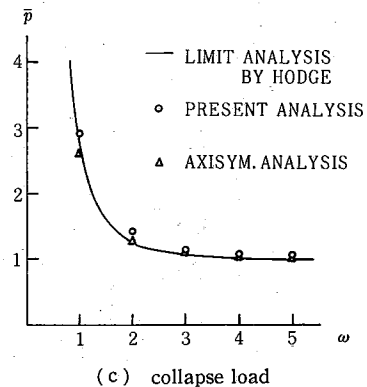
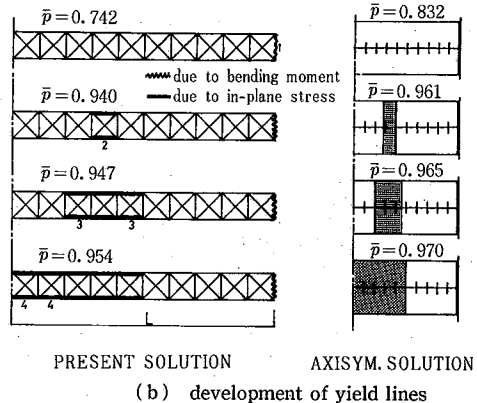
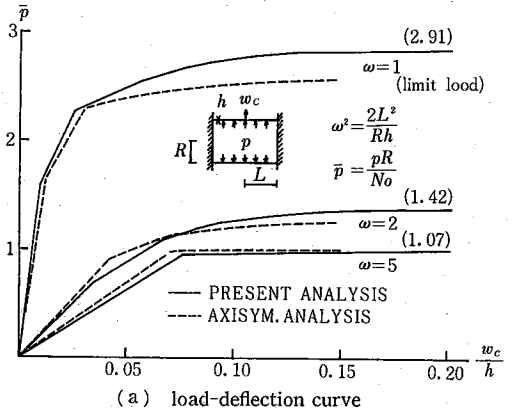


Fig. 2. Plastic collapse of circular cylindrical shells under uniform internal pressure

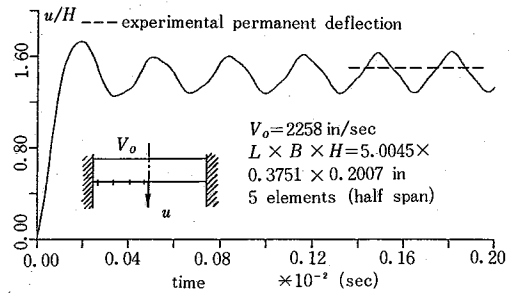
従来の塑性解析法(より正確には仮想変形法)を離散化解析の立場から一般化した手法を与え、数値的にはあるが、任意形状の薄肉構造物に対し一般的な荷重・境界条件下での最終耐力評価を可能にしている。

Fig.2は、一様な内圧を受ける両端固定円筒殻に対する計算例であり、集中ばね系を仮定した円錐台要素モデルおよび曲面剛体要素モデルによる計算結果が理論解¹⁵⁾と比較されている。2種類の要素モデルによる解は良好に対応しており、崩壊荷重値の理論解との一致も良い。また集中ばね系を使用しているため計算効率は極めて高い。

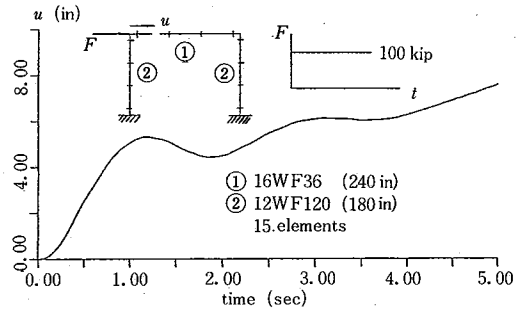
本計算例題のような軸対称問題では生じないが、一般の薄肉構造問題においては仮定するメッシュパターンが数値解、特に崩壊荷重値に大きく影響する。この点を緩和してより信頼度の高い解を得るためには、実験結果を参照した要素分割、あるいは要素境界線の方向性が少ないメッシュパターンの採用が不可欠である。なお、殻構造に対して曲面剛体要素モデルを用いた本手法は直接には、Janasらによる一般化塑性関節法(generalized yield line method)¹⁶⁾の計算機シミュレーションの立場からの一般化と言えよう。

3.2 衝撃崩壊問題のシミュレーション

衝撃崩壊解析などの動的非線形解析機能を有する有限要素あるいは差分コードが近年多く見受けられ¹⁷⁾、より



(a) elasto-plastic, geometrically nonlinear response of a fully clamped beam



(b) elasto-plastic response of a simple plane frame

Fig. 3 Dynamic collapse of impulsively loaded framed structures

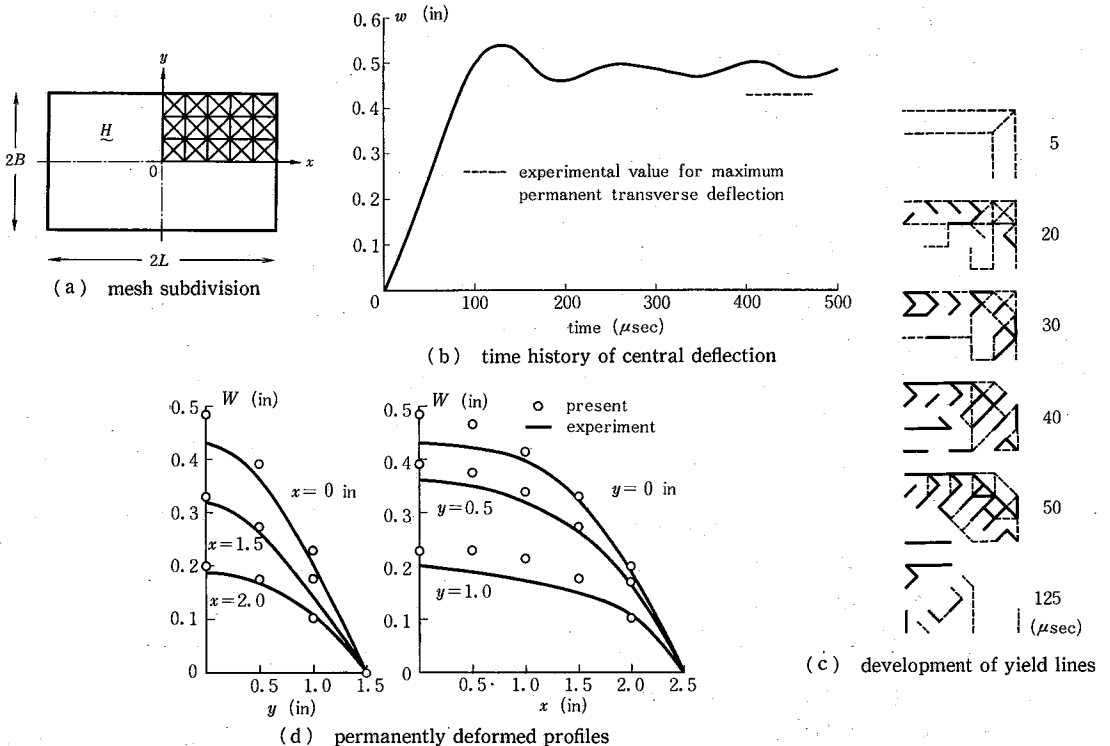


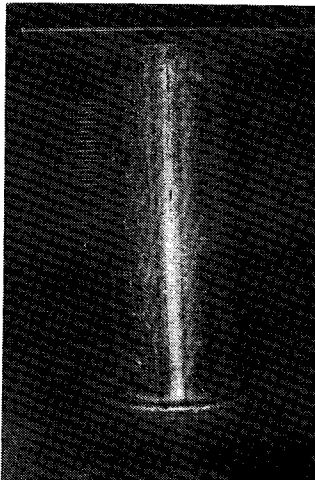
Fig. 4 Dynamic collapse of a rectangular plate under lateral impact

精度が高く効率の良いアルゴリズムを求めての研究も活発に行われている。そもそも問題が複雑であり、理論解析の困難な分野であるだけに、今後、動的崩壊現象の究明に対し数値解法、計算機シミュレーションの果たす役割はますます増大してゆくものと予想される。

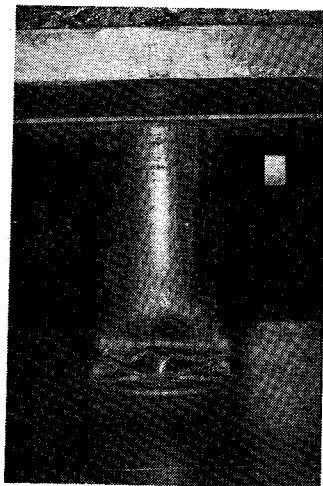
RBSM の動的崩壊問題への応用はその開発過程のごく早い時期から試みられ、当初の研究で、はりおよび平板の弾塑性あるいは弾/粘塑性曲げ波伝播シミュレーションにおける RBSM の有用性が確認された^{18)~20)}。すなわち、集中ばね系を仮定した RBSM を使用することにより、塑性関節の伝播挙動を短い計算時間で正確にシミュレートできることが数値例により実証された。Fig.3 と Fig.4 は比較的最近の計算例である。Fig.3 では、分布衝撃荷重 (初期速度 V_0) を受ける両端固定矩形断面はり、およびステップ荷重を受ける門型ラーメンの動的崩

壊挙動が、集中ばね系による梁柱要素モデルを用いて解析されている。はりについては、Jones らによる実験結果²¹⁾(永久変形量)と本計算結果が良好に一致していることが理解される。Fig.4 は、分布ばね系を仮定した平板剛体要素モデルによる周辺固定矩形平板の横衝撃崩壊シミュレーション結果であり、永久変形量に関して Jones らによる実験結果²²⁾と良好な対応が見られる。なお、Fig.3 および Fig.4 の計算例では、降伏応力に及ぼすひずみ速度の影響は考慮されていない。

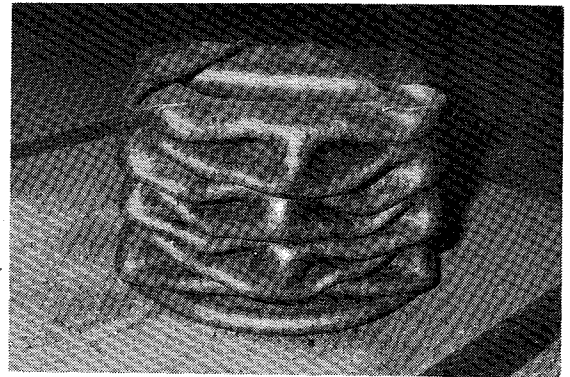
RBSM による従来の衝撃崩壊シミュレーションでは、時間積分スキームとしてすべて Newmark の β 法 ($\beta = 1/6$ または $1/4$) が用いられた。時間増分値としてはクーランの条件より定まる基準値に適当な安全係数 ($1/2 \sim 1/5$ 程度) を乗じた値が使用され、数値的不安定現象に伴う解の発散を引き起こしたケースは皆無であった。定量的



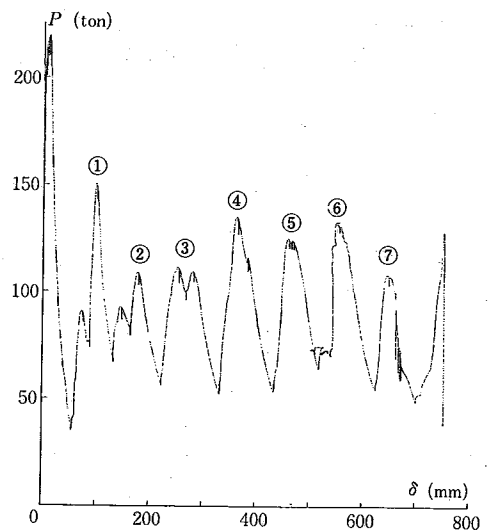
(a) axisymmetric buckling mode



(b) non-axisymmetric buckling mode



(c) crushed configuration



(d) axial load/end shortening curve

Fig. 5 Progressive plastic buckling of an axially compressed circular cylinder

にもほぼ妥当な解が得られており、本要素モデルに対する β 法の信頼度は高いが、計算効率をより向上させるために、中心差分法などの陽解法²³⁾あるいは準陰解法²⁴⁾の適用を検討することが望まれる。

3.3 塑性安定問題のシミュレーション

RBSM による幾何学のおよび材料非線形性を考慮した離散化極限解析アルゴリズムを薄肉構造要素の安定問題に適用すると、柱の塑性座屈問題における Shanley model²⁵⁾の一般化が可能であり、非弾性構造安定問題の定性的研究に特に有用な一連の低自由度シミュレーションモデルを構成できることが文献5)で明らかにされている。文献5)では、圧縮柱に対する2自由度シミュレータ、圧縮平板に対する3自由度シミュレータ、圧縮円筒に対する9自由度シミュレータを開発し、柱と平板については塑性座屈シミュレーション結果と既知の理論解、実験事実を比較することにより塑性安定問題におけるシミュレータの妥当性を実証したが、円筒殻については弾性座屈固有値計算にとどまっていた。本報告では、最近実施した軸圧縮荷重を受ける円筒鋼管に生ずる非軸対称塑性座屈モードに関する研究⁷⁾の一端を紹介したい。

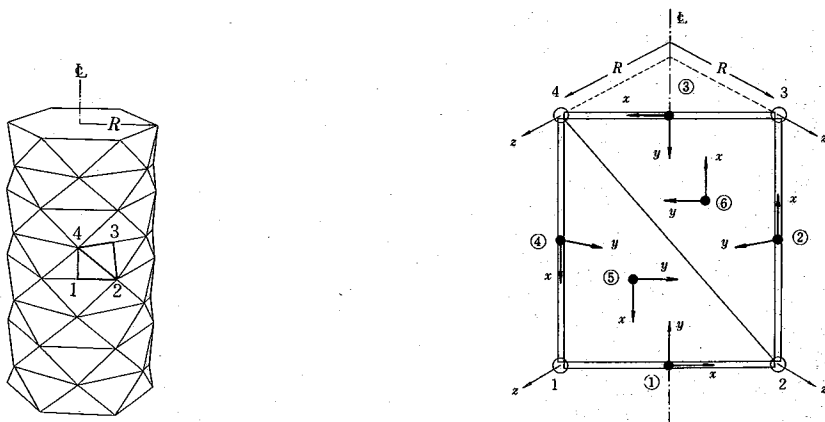
半径・肉厚比 R/t の比較的小さい円筒鋼管を互いに平行な加圧盤間に据え付けて圧縮すると、最初は端部に軸対称座屈を生じ(Fig.5(a)), 続いて非軸対称モードに分岐し一端から他端へ連続的に畳み込まれながら(Fig.5(b)) 完全な圧壊(Fig.5(c))に至る崩壊過程が観察される。過去に Horton らは R/t の異なる多数のアルミニウム製円筒の圧縮試験を実施し²⁶⁾, R/t と非軸対称モードにおける周方向波数 n (Fig.5の円筒鋼管では $n=3$) の間に明瞭な相関が存在することを確認しているが、以後、非軸対称座屈モードに対し大きな関心は払われていない。工学的には初期の軸対称座屈により決定される最終耐力値(Fig.5(d))における点①が最も重要であるが、

塑性安定論の基本課題として、また衝撃エネルギー吸収部材としての特性把握の観点などからも圧縮円筒に生ずる非軸対称モードの検討は興味深い。

本研究では次のような方法で、軸圧縮荷重を受ける円筒鋼管に生ずる非軸対称座屈モードの周方向波数 n と半径・肉厚比 R/t の関係を調べた。すなわち、軸対称塑性座屈応力と R/t の関係、周方向波数 n (軸方向波長は周方向波長と等しいと仮定) の非軸対称塑性座屈応力と R/t の関係を個々に求め、両者の交点をもって周方向波数 n の非軸対称モードを生ずる R/t の目安(下限値)とする。軸対称塑性座屈応力としては既知の理論解を用い、非軸対称塑性座屈応力は、Yoshimura buckle pattern²⁷⁾ (Fig.6(a)) の基本周期領域を分布ばね系を仮定した6平板剛体要素モデルに離散化した9自由度シミュレータ(Fig.6(b))による増分計算から得た。

Fig.7に、STK41炭素鋼鋼管および304ステンレス鋼鋼管に対する計算結果を示す。軸対称塑性座屈応力理論解として、ひずみ硬化の比較的小さい炭素鋼鋼管に対しては Timoshenko の解²⁸⁾, ひずみ硬化の大きいステンレス鋼鋼管に対しては Gerard の解²⁹⁾を使用した。Fig.8には、Fig.7より読み取った R/t と n の関係が、著者らの炭素鋼鋼管実験結果⁷⁾および Horton²⁶⁾, Sobel³⁰⁾のステンレス鋼鋼管実験結果とともに示されている(図の横軸は、弾性座屈の場合に周方向波数 n を生ずる R/t の下限値 $(R/t)_{ei} = 2n^2 / \sqrt{3(1-\nu^2)}$ で無次元化されており、 $(R/t)_{ei}$ の有意性は別途、確認されている)。実験データ数が少ないので断定的な結論は下せないが、本シミュレーション結果は実験点と良好に対応していると判断される。

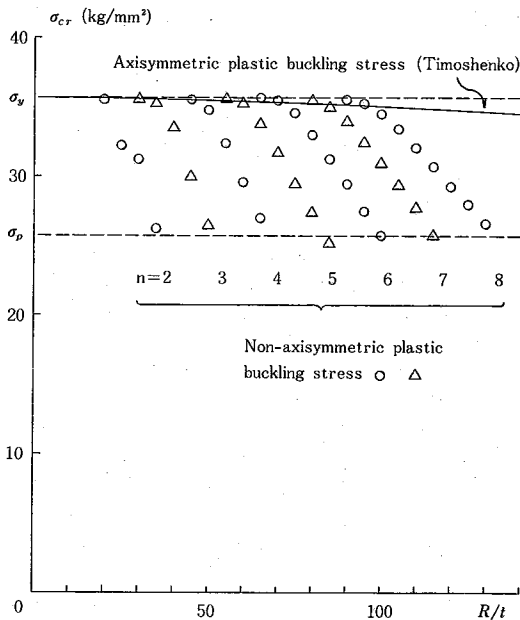
本報告で一例を示したような RBSM による構造要素の低自由度シミュレータは、塑性安定問題以外にもクリープ座屈、亀裂を含む座屈、動的座屈などを含む一般の非弾性構造安定問題の定性的研究に効果的に使用し得る



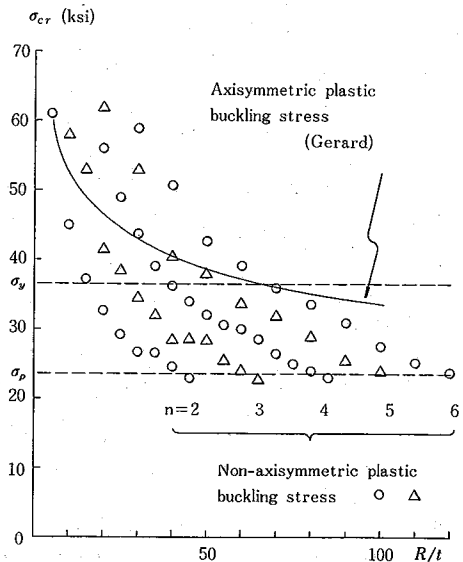
(a) Yoshimura buckle pattern

(b) rigid element representation

Fig. 6 Non-axisymmetric buckling simulator for circular cylindrical shells



(a) STK 41 mild steel cylinders



(b) 304 stainless steel cylinders

Fig. 7 Plastic buckling stresses for axially compressed circular cylinders

ものとする。

4. 結 言

本報告では、RBSM による薄肉鋼構造・極限強度シミュレーションの現況についての概説を試みた。2章で紹介した要素モデル個々の計算アルゴリズム、3章の計算例の詳細、および他の多数の数値例については本文中の引用文献を参照されたい。本報告では鋼構造のみを対象として解説したが、すでに確立されている各要素モデルの非線形計算アルゴリズムは、鉄筋コンクリート構造など他の材料から成る構造物に対しても共通であり、主たる相違は要素間を結合するばね系（あるいはばね・ダッシュポット系）の特性のみである。したがって、すでに開発済みの鋼構造コードの相当部分が転用可能と推定される。

RBSM の鋼構造極限強度問題への応用で近い将来、成果の期待される分野に、船体³¹⁾、自動車³²⁾、航空機構造³³⁾ およびその構成部材の衝突崩壊挙動と衝突エネルギー吸収特性 (structural crashworthiness の問題) に関する研究がある。本報告の 3.3 節で紹介した圧縮円筒の非軸対称塑性座屈モードに関する研究はその端緒と考えている。一般にこの種の問題の解析は最先端の計算技術によっても極めて困難であり、また膨大な計算時間を要することが多い。RBSM は、変形の不連続性がより一層顕著に現れる構造物あるいは構造要素の衝突圧壊挙動を、低自由度系にモデル化してシミュレートする手法として、合理的かつ効果的と予想され、現在この方面の基礎的研

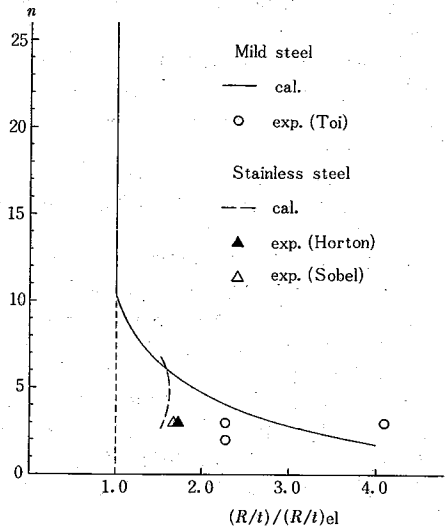


Fig. 8 Comparison between theoretical predictions and experimental results for n versus R/t

究が進行中である。

謝 辞

本報告における 3.1 節の例題計算およびプログラム開発にご尽力いただいた上田真稔氏 (竹中工務店) を始めとする旧極限解析研究会シェル分科会のメンバー各位、3.3 節の実験実施に際し御助力をいただいた金子幸平氏 (元助手) を始めとする東大工学部総合試験所大型構造物試験室の職員諸氏、また原稿作成にご協力いただいた清

水由美子嬢に感謝の意を表します。

(1983年10月25日受理)

参考文献

- 1) 川井編：固体力学諸問題の離散化極限解析，生研セミナーテキスト，コース76 (1982)
- 2) 都井：骨組・回転対称シェル構造の動的非線形解析，日本造船学会論文集，147号 (1980) 329
- 3) 都井ほか：薄肉構造の離散化極限解析（その1）——曲面剛体要素モデルの誘導とその応用——，日本造船学会論文集，150号 (1981) 413
- 4) 都井ほか：同上（その2）——一般シェル構造解析のための平板剛体要素モデル——，日本造船学会論文集，151号 (1982) 211
- 5) 都井・川井・同上（その3）——平板剛体要素モデルによる安定問題のシミュレーション——，日本造船学会論文集，152号 (1982) 441
- 6) 都井・川井・同上（その4）——平板剛体要素モデルによる衝撃崩壊解析——，日本造船学会論文集，153号 (1983) 325
- 7) 都井・川井・同上（その5）——軸圧縮荷重を受ける円筒殻の非軸対称塑性座屈モード——，日本造船学会論文集，154号 (1983)
- 8) T. J. R. Hughes et al. : A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending, Int. J. num. Meth. Engng., vol. 11 (1977) 1529
- 9) D. Bushnell : BOSOR5 Program for buckling of Elastic-Plastic Complex Shells of Revolution including Large Deflections and Creep, Computers and Structures, Vol. 6 (1976) 221
- 10) O. C. Zienkiewicz et al. : A Simple and Efficient Element for Axisymmetric Shells, Int. J. num. Meth. Engng., Vol. 11 (1977) 1545
- 11) 都井ほか：回転対称シェルの弾塑性飛移り挙動の一離散化解析，生産研究，33巻4号 (1981) 14
- 12) 大友ほか：シェル構造の離散化極限解析（その5）——曲面剛体要素モデルの球殻への応用——，生産研究，34巻9号 (1982) 15
- 13) 菊池：米国における有限要素法開発の現状について，セミナーテキスト「有限要素法に関する最近の動向」(1982)
- 14) 都井・川井：シェル構造の離散化極限解析（その4）——厚肉シェルの有限変形解析——，生産研究，34巻8号 (1982) 19
- 15) P. G. Hodge Jr. : Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill (1959)
- 16) M. Janas : Limit Analysis of Non-Symmetric Plastic Shells by a Generalized Yield Line Method, Non-Classical Shell Problem (ed. by W. Olszak and A. Sawczuk), North-Holland (1964)
- 17) J. A. Zukas et al. : Impact Dynamics, John-Wiley & Sons (1982)
- 18) 川井・都井：はりおよび平板の横衝撃応答問題に対する新しい離散化解析法，日本機械学会論文集，45巻，389号 (1979) 73
- 19) 都井・川井：A New Discrete Analysis on Dynamic Collapse of Structures, 日本造船学会論文集，143号 (1978) 257
- 20) 都井・川井：同上 (Further report), 日本造船学会論文集，145号 (1979) 112
- 21) N. Jones and T. Wierzbicki : A Study of Higher Modal Dynamic Plastic Response of Beams, Int. J. Mech. Sci., Vol. 18 (1976) 533
- 22) N. Jones et al. : The Dynamic Plastic Behavior of Fully Clamped Rectangular Plates, Int. J. Solids Structures, Vol. 6 (1977) 1499
- 23) T. B. Belytschko and C. S. Tsay : Explicit Algorithms for Nonlinear Dynamics of Shells, Nonlinear Finite Element Analysis of Plate and Shells (AMD-Vol. 48), ASME (1981) 209
- 24) T. B. Belytschko : A Split Operator Method for Transient Problems, Transactions of the SMiRT-7, Vol. L (1983) 549
- 25) F. R. Shanley : The Column Paradox, J. Aeronaut. Sci., Vol. 13, No. 12 (1946)
- 26) W. H. Horton et al. : Nonsymmetric Buckle Patterns in Progressive Plastic Buckling, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., Vol. 23, No. 2 (1966) 433
- 27) Y. Yoshimura : On the Mechanism Buckling of a Circular Cylindrical Shell under Axial Compression, NACA TM 1390 (1955)
- 28) S.P. Timoshenko and J. M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd Ed., McGraw-Hill (1976)
- 29) G. Gerard : Compressive and Torsional Buckling of Thin-Walled Cylinders in the Yield Region, NACA, TN3726 (1956)
- 30) L. H. Sobel and S. H. Newman : Plastic Buckling of Cylindrical Shells under Axial Compression, J. of Pressure Vessel Technology (Transactions of the ASME), Vol. 102 (1980) 40
- 31) 渋江ほか：原子力船の耐衝突船側構造の強度実験，日本造船学会論文集，151号 (1982) 187
- 32) 自動車技術会・構造強度部門委員会衝突解析WG編集：薄肉部材の崩壊特性 (1981年10月)，衝突解析法実例集 (1982年8月)
- 33) A. A. Ezra and R. J. Fay : An Assessment of Energy Absorbing Devices for Prospective Use in Aircraft Impact Situations, Dynamic Response of Structures (ed. by G. Herrmann and N. Perrone), Pergamon Press Inc. (1972) 225