

乱流促進体まわりの流れの数値予測に関する研究 (第5報)

— $k-\epsilon$ モデルによる流れ場の予測—

Study on Numerical Prediction of Flow around Turbulence Promoters (5th Report)

—Numerical Prediction of Flow Field by $k-\epsilon$ Model—

小 林 敏 雄*・狩 野 正 徳*・石 原 智 男*

Toshio KOBAYASHI, Masanori KANO and Tomo-o ISHIHARA

1. ま え が き

本報において対象としている矩形乱流促進体をもつ二次元チャンネルの乱流運動を数値的に予測する方法として前報^{1,2)}までに Large Eddy Simulation の適用を提案し、計算プログラムの作成と計算結果の検討を行った。LES は平衡乱れ場における仮定を極めて微細な格子空間内に限定しているため本研究のような非平衡乱れ場の数値予測に適合した計算方式と考える。しかし LES は三次元非定常計算を必要とするため膨大な計算時間を要するという難点がある。そこでより簡便な計算方式として $k-\epsilon$ モデルを取り上げ数値予測の適否を検討してみる。

$k-\epsilon$ モデルは Jones & Launder らによって提案されたモデルで、乱流を乱流エネルギーと乱流散逸の輸送方程式によって記述しようとするものである。この方法は主流方向にゆるやかに変化する流れについてはすでにモデルの検証が行われており、現時点では最も研究の蓄積が多く、適用例も多い乱流計算法である。

Jones & Launder³⁾はこの方法を二次元チャンネル流れの層流化問題に適用し、壁面摩擦係数について計算値と実測値の比較を試みた。村上・加藤⁴⁾は三次元室内気流を対象とし平均流速および乱流エネルギー分布に関して計算値と実測値との対比を、また Elghobashi ら⁵⁾は中心部に逆向きの噴流をもつ管内流について平均流速分布の実測値との対比を試みている。これらの対比結果は乱流計算に $k-\epsilon$ モデルが有効であることを示しているが、一方はく離を伴うような流れ場に関しては固定壁から噴出する二つの平行噴流の混合に適用した Leschziner らの研究⁶⁾があるくらいで適用例は極めて少ない。

本報においては $k-\epsilon$ モデルによる乱流促進体まわりの非平衡乱れ場の数値予測のプログラムを作成するとともに、その計算結果を LES の結果と対比し、モデル性能の検討を行うことにする。

2. $k-\epsilon$ モデルの基礎方程式

$k-\epsilon$ モデルによる基礎方程式は運動方程式、連続の式、

乱流エネルギー k と乱流散逸 ϵ に対する輸送方程式である。本研究で対象とする流れ場は図1に示すように、上壁平面とそれに平行な下壁平面からなり、下壁面上には正方形断面の柱体が等間隔に配置されている。そこで本報では、(1) 流れは非圧縮性流体の二次元流であること、(2) 流れは場の大部分で等方性乱れをもつこと、(3) 流入流出断面で流れの状態が一致することを仮定する。

座標系としては流れの方向に x_1 軸、上下壁と垂直に x_2 軸を選ぶ。速度 u_i はチャンネル内断面IIIにおける x_1 方向断面平均流速 U によって、 x_1 をチャンネル幅の2倍の長さ L によって、時間 t を L/U によって、圧力 p を ρU^2 (ρ : 流体の密度) によって無次元化する。ここで u_i を

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (1)$$

の形に分解する。ここに、 \bar{u}_i : 流速の x_i 方向成分のアンサンブル平均、 u'_i : 乱れの x_i 方向成分。このとき基礎方程式は

$$\begin{aligned} \partial \bar{u}_i / \partial t + \partial (\bar{u}_i \bar{u}_j) / \partial x_j &= -\partial \bar{P} / \partial x_i \\ &+ \partial \{ [\nu_T + (1/R_e)] (\partial \bar{u}_i / \partial x_j + \partial \bar{u}_j / \partial x_i) \} / \partial x_j \end{aligned} \quad (2)$$

$$\partial \bar{u}_i / \partial x_i = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \partial k / \partial t + \partial (k \bar{u}_j) / \partial x_j \\ = \partial \{ [(\nu_T / \sigma_k) + (1/R_e)] (\partial k / \partial x_j) \} / \partial x_j \\ + \nu_T (\partial \bar{u}_i / \partial x_j + \partial \bar{u}_j / \partial x_i) \partial \bar{u}_i / \partial x_j - \epsilon \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \partial \epsilon / \partial t + \partial (\epsilon \bar{u}_j) / \partial x_j \\ = \partial \{ [(\nu_T / \sigma_\epsilon) + (1/R_e)] (\partial \epsilon / \partial x_j) \} / \partial x_j \end{aligned}$$

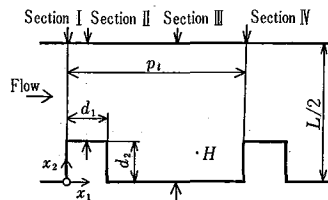


図1 モデル流路

*東京大学生産技術研究所 第2部

研 究 速 報

$$\begin{aligned}
 &+ c_1(\epsilon/k)\nu_T(\partial\bar{u}_i/\partial x_j + \partial\bar{u}_j/\partial x_i)\partial\bar{u}_i/\partial x_j \\
 &- c_2k\epsilon/\nu_T \quad (5) \\
 \nu_T &= C_Dk^2/\epsilon \quad (6)
 \end{aligned}$$

ここに、 $\bar{P} = \bar{p} + 2k/3$, $i, j = 1, 2$ である。また、 k は乱流エネルギー、 ϵ は乱流散逸でそれぞれ U^2 , U^3/L で無次元化されている。 Re はレイノルズ数 $= UL/\nu$ (ν : 動粘性係数)、 ν_T はうず動粘性係数で Prandtl-Kolmogorov の仮定から導かれる。式(4)および(5)の右辺第一項は拡散項で勾配拡散モデルを使用している。右辺第二項、第三項はそれぞれ生産項、散逸項と呼ばれている。

3. 計算方法と境界条件

基礎方程式(2)~(6)を差分方程式群に変換し、連立させて解く。差分計算は前報の LES と同様 SMAC 法 (ABMAC 法とも呼ばれる)を用い、差分スキームとしては空間的には中心差分スキームを、時間的には Adams-Bashforth 形差分スキームを使用する。計算手順の概略を図2に示す。格子システムとしてはいわゆるスタガーシステムを採用する。すなわち流速は格子辺上の中央において定義され、圧力、乱流エネルギー、乱流散逸およびうず動粘性係数は格子の中心において定義される。

計算領域としては、乱流促進体が等間隔に無限個配置されている場合を想定し、その1周期(図1において断面Iおよび断面IVによって囲まれる領域)を選ぶ。本報における流路形状は図1において $d_1 = d_2 = d$, $b_i/d = 5.0$, $L/(2d) = 3.2$ である。 $k-\epsilon$ モデルにおける差分計算の格子間隔による影響を調べるため本報では2ケースについて計算を行っている。いずれの場合も格子間隔は x_1, x_2 方向に等間隔で、 $h_1 = h_2 = h$ (h_i : x_i 方向の格子幅)としている。格子数を表1に示す。

流速に対する境界条件として、壁面においては滑りなしの条件を、流入・流出断面(断面IおよびIV)においては各速度成分が一致するという周期条件を設定する。すなわち、

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_i &= 0 && \text{(壁面)} \\
 (\bar{u}_i)_I &= (\bar{u}_i)_{IV} && \text{(流入・流出断面)}
 \end{aligned} \quad (7)$$

乱流エネルギー、乱流散逸に関する境界条件は壁面付近の、 $0 \leq x \leq x_0$ の範囲において二次式で与えられるものと仮定し、流入・流出断面においては周期性を考慮する。すなわち、

$$\begin{aligned}
 (k/k_0) &= (x/x_0)\{a + (1-a)(x/x_0)\} && \text{(壁面近傍)} \\
 (k)_I &= (k)_{IV} && \text{(流入・流出断面)} \\
 (\epsilon/\epsilon_0) &= (x/x_0)\{a + (1-a)(x/x_0)\} && \text{(壁面近傍)} \\
 (\epsilon)_I &= (\epsilon)_{IV} && \text{(流入・流出断面)}
 \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、 x は最も近い壁面からの距離、 x_0 は乱れの非等方向性が顕著な範囲を示す距離、添字 0 は $x = x_0$ での値、

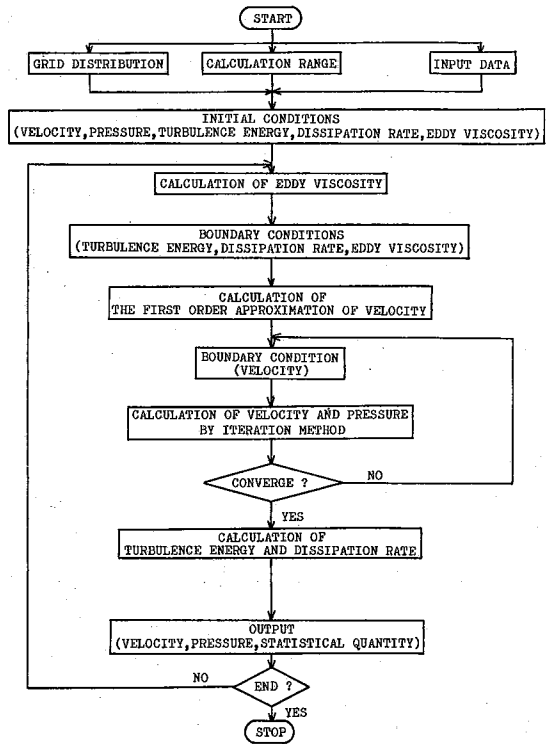


図2 計算手順の概略

a は定数である。本報で使用した値を表1に示す。うず動粘性係数 ν_T は k, ϵ より式(6)によって求められるが、壁面近くでは等方性乱れの仮定は成立し難く、 $0 \leq x \leq x_0$ の領域で式(6)が成立するとは限らない。そこでここでは壁面近くの ν_T の分布として

$$(\nu_T/\nu_{T0}) = x/x_0 \quad (9)$$

を仮定する。

次に $k-\epsilon$ 法では計算実行に際して k と ϵ の流入断面における平均値 (k), (ϵ) を与える必要がある。本報では試行錯誤によりチャンネル上壁付近の乱流エネルギー k の値が乱流促進体をもたない二次元チャンネルの場合の k の実験値⁷⁾ とほぼ一致するように $(k)_I = 0.055$, $(\epsilon)_I = 0.166$ を与えている。

計算の初期条件として計算時間の短縮を計り、前報の LES の結果を参考にして定常値に近い任意の値を用いている。また、繰り返し計算の収束条件は

$$\max[|d_i f(\partial\bar{u}_i/\partial x_i)|_M] < \delta \quad (10)$$

ここに、 $d_i f(\partial\bar{u}_i/\partial x_i)$ は $\partial\bar{u}_i/\partial x_i$ の差分式、 N は圧力と流速を反復法で求めている計算の部分(図2参照)の反復回数である。 δ および無次元時間刻み δt を表1に示す。この δt と無次元格子幅 h との関係は差分計算の安定条件を満足するように選ばれている。⁸⁾ 参考のため本報の $k-\epsilon$ モデルにおける主な計算条件を LES のそれと

表 1 計算条件

	格子数 x_1, x_2, x_3	δt	h	x_0	a	δ
CASE 1	40, 25, -	1/1000	1/50	3/100	7/4	0.001
CASE 2	80, 50, -	1/2000	1/100	1/40	7/4	0.0005
LES	40, 25, 9	1/1000	1/50	3/100	7/4	0.001

表 2 $k-\epsilon$ モデルにおける定数の対比

文 献	σ_1	σ_2	c_D	c_1	c_2
本報, (4)	1.0	1.3	0.09	1.59	0.18
(3)	1.0	1.3	0.09	1.45	0.18
(5)	1.0	1.09	0.09	1.43	0.1728
(6)	1.0	1.3	0.09	1.44	0.1728

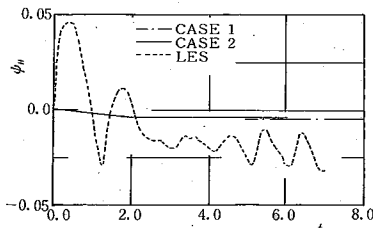


図 3 ϕ の時間変化

表 3 計算時間の比較

	格子数	1 ステップ当たりの積分時間 (s)
CASE 1	40×25	0.18
CASE 2	80×50	0.73
LES	40×25×9	5.6

対比して表 1 に示しておく。

本報における Re 数は前報と合わせて 1.1×10^4 である。また、式(4)~(6)中に現れる 5 個の定数としては平板境界層への適用例⁹⁾などを考慮して

$$\sigma_1=1.0, \sigma_2=1.3, c_D=0.09, c_1=1.59, c_2=0.18$$

を用いている。従来発表されている $k-\epsilon$ モデルによる計算例における定数との対比を表 2 に示す。

4. $k-\epsilon$ モデルによる計算結果および LES 計算結果との比較

4.1 物理量の時間変化と計算の打ち切り 本報ではある特定点 H における流れ関数

$$\phi_H = \int_0^{x_2} \bar{u}_1 dx_2 \quad (11)$$

によって初期状態の影響が消える時点を判定する。 H としては比較的乱れが大きく、したがって ϕ の時間変化も大きいと思われる点 ($x_1=0.650, x_2=0.090$, 図 1 参照) を選んでいる。図 3 に ϕ_H の時間変化を示す。図より $k-\epsilon$ モ

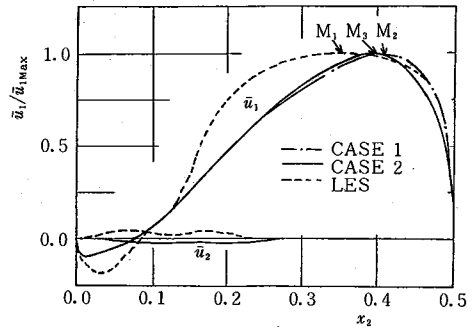


図 4 平均流速の分布

デルにおいて ϕ_H は CASE 1 では t が 5 以上で、CASE 2 では t が 2 以上においてほぼ一定値になっている。したがって本報ではそれぞれ $t=8.0, 6.0$ で計算を打ち切っている。なお、図には LES の場合の $\langle \phi \rangle_H$ を併記している(以後記号は $k-\epsilon$ モデルの場合の記号に統一する)。LES の場合には t が 5 以上において ϕ_H は極めて弱い周期的運動を繰り返すのに対して、本報の $k-\epsilon$ モデルではこの微細な周期運動を表現し得ないようである。

参考のため、時間方向 1 ステップ当たりの計算時間を表 3 に示す。前報の LES に比べ本報の $k-\epsilon$ モデルによる計算は計算時間の点でははるかに有利ではある。

4.2 平均流速の分布 x_1 方向の平均流速の分布の計算結果を図 4 に示す。図より $k-\epsilon$ モデルによる分布は LES のそれと比べて上壁側への偏りが大きく、両手法による分布の形はやや異なっている。CASE 1 と CASE 2 の差はほとんどなく、また上壁近傍に限ると両手法による計算結果は比較的よく一致している。

また図 4 は乱流促進体のある下壁側では x_1 方向の平均流速においてさえ両手法による計算結果が相当に異なること、平均流速の x_2 方向成分 \bar{u}_2 の分布の両手法による計算結果は断面 III において比較的小さいことも示している。

4.3 乱れの分布 断面 III における乱流エネルギー $k = (\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2)/2$ の分布の計算結果を図 5 に示す。 $k-\epsilon$ モデルと LES による結果を比較すると乱流促進体の背後において傾向の差異が著しい。

図 6 に乱流せん断応力の分布を示す。乱流せん断応力は $k-\epsilon$ モデルでは勾配拡散モデル、すなわち

$$\bar{u}_1 \bar{u}_2 = -\nu_T (\partial \bar{u}_2 / \partial x_1 + \partial \bar{u}_1 / \partial x_2) \quad (12)$$

より求められる。図において $k-\epsilon$ モデルによる計算結果と LES のそれとは特に下壁近傍で異なる傾向をもつ。

LES による計算結果の場合、図 6 において乱流せん断応力が 0 となる点 Z_1 の x_2 座標 ($x_2=0.391$) は図 4 における平均流速が最大となる点 M_1 の x_2 座標 ($x_2=0.360$) と異なる。これは M_1-Z_1 間において負の乱流エネルギーの

研 究 速 報

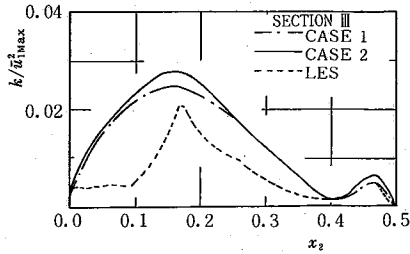


図 5 乱流エネルギーの計算結果

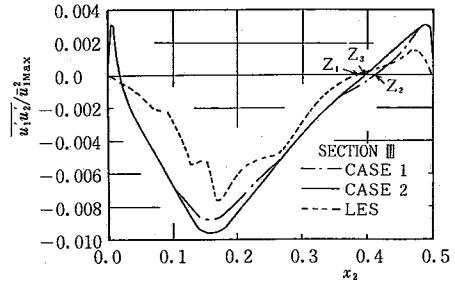
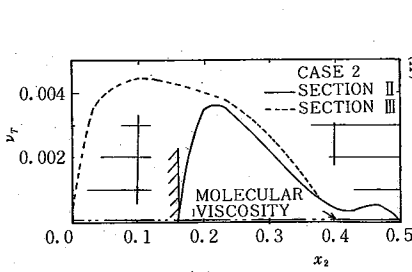
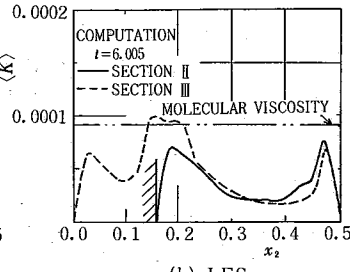


図 6 乱流せん断応力の分布



(a) $k-\epsilon$ モデル



(b) LES

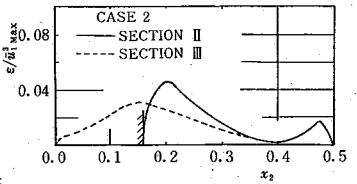


図 8 乱流散逸の分布

図 7 うず動粘性係数の分布
 生産が生じることを意味し, Hanjalic & Launder¹⁰⁾ が得た非対称流路における実験的事実を LES は記述し得ることを示している。 $k-\epsilon$ モデルにおいて CASE 1, CASE 2 においてそれぞれ平均流速が最大になる点 M_2 および M_3 は乱流せん断応力が 0 になる点 Z_2 および Z_3 とほぼ一致して, $x_2=0.41$ (CASE 1), $x_2=0.395$ (CASE 2) であり, 負の乱流エネルギーの生産を説明することはできない。

4.4 うず動粘性係数と乱流散逸の分布 うず動粘性係数 ν_T は式(6)より, 乱流散逸の分布は式(5)より求められる。それぞれの分布を図 7, 8 に示す。図 7 には参考のための無次元分子動粘性係数 $\nu/(UL)$ および LES におけるうず拡散係数 K を併記する。図は本報の $k-\epsilon$ モデルにおける ν_T および ϵ はともに乱流促進体のある下壁側で大きな値をとること, ν_T は分子動粘性係数および K より大きな値をもっていることを示している。なお LES における K は小規模流れ場におけるうず拡散係数であり, 一方 ν_T は大規模うず流れ場をも含んだ係数であることに注意を要する。

5. ま と め

長方形乱流促進体をもつ二次元チャンネル内の乱流の数値予測を $k-\epsilon$ モデルによって試み, LES による計算結果と比較した。主な結論は次のとおりである。

(1) LES, $k-\epsilon$ モデルによる平均流速および乱れの分布は乱流促進体のない上壁近傍では比較的良好一致する。しかし, 乱流促進体のある下壁側では両者の分布は一致せず, 特に乱流促進体の背後では著しい差異をもつ。

(2) LES では, 乱流せん断応力が 0 となる点の壁からの距離は平均流速が最大となる点の位置と異なり, いわゆる負の乱流エネルギー生産を記述できるが, $k-\epsilon$ モデルではこのことは明確には記述できない。

(3) LES では乱流促進体背後において弱い周期的うず運動を記述できるが $k-\epsilon$ モデルではこの運動を記述できない。

本報の計算手法について本所村上周三助教授, 吉沢徹助教授, 日立製作所エネルギー研究所鈴置昭氏およびカールスルーエ工科大学 W. Rodi 教授の助言を得た。記して感謝の意を表す。なお本研究の一部は昭和 57 年度本所選定研究費によっていること, 本報の計算は東大 大型計算機センターの HITAC M 200/280 H システムによって行われたことを付記する。(1983 年 10 月 11 日受理)

参 考 文 献

- 1) 狩野, 小林, 石原, 生産研究, 35-6 (1983), 307
- 2) 狩野, 小林, 石原, 生産研究, 35-12 (1983), 517
- 3) W. P. Jones, B. E. Launder, Int. J. Heat Mass Transfer, 16 (1973), 1119
- 4) 村上, 加藤, 生産研究, 33 (1981), 101
- 5) S. E. Elghobashi, G. S. Samuelsen, J. E. Wuerer, J. C. LaRue, Trans. ASME, Ser. I, 103 (1981), 127
- 6) M. A. Leschziner, W. Rodi, Trans. ASME, Ser. I, 103 (1981), 352
- 7) J. Laufer, NACA TN, 2123 (1950)
- 8) 狩野, 小林, 石原, 生産研究, 35-5 (1983), 216
- 9) 野村, 松尾, 貝塚, 坂本, 遠藤, 日本建築学会論文報告集, 238 (1975), 59
- 10) K. Hanjalic, B. E. Launder, J. Fluid Mech., 51 (1972), 301