

クリープフィード研削時に生じる残留応力の解析 (第3報)

—熱弾塑性 BEM-FEM 結合解析法の高精度化について—

Analysis of Residual Stress During Creep-Feed Grinding (3rd Report)

—Improvement on Accuracy in Thermo-Elastic-Plastic BEM and FEM Combined Analysis—

仙 波 卓 弥*・谷 泰 弘*・佐 藤 壽 芳*

Takuya SEMBA, Yasuhiro TANI and Hisayoshi SATO

1. 緒 言

研削加工時に生じる熱応力を数値解析する基礎として、前報¹⁾では、線形弾性 BEM-FEM 結合解析法の高精度化に関する検討を試みた。その結果、被積分関数が一次元の有限区間内で特異性を有するような場合については、二重指数関数型積分の適用が有効であることが明らかとなった。一方、二次元の有限区間積分が必要となる熱応力問題の解析、とくに材料非線形問題の解析に上記の手法を適用し高精度化を図ることは演算時間上賢明とは思われない。

本報告では、研削加工面に生じる局所的な熱弾塑性変形に起因し生成される残留応力を把握する基礎として、非線形熱応力問題を BEM-FEM 解析し、前報と同様、解の高精度化に関する考察を行う。すなわち、領域積分に際し Cauchy の主値積分を行うこと、および、領域要素をさらに内点を頂点とする内部領域に細分化すること等により、工學上十分な解の精度が得られたので報告する。

2. 基礎方程式

一般に、バニシ効果や熱応力の重量により生じる塑性変形は、研削加工面にきわめて近接した微視的領域に限られるのみであり、工作物の他の部分は研削過程下において弾性的な挙動を呈すると考えてもよからう。ここでは、演算時間の短縮化のため、加工面近傍を有限要素、他の部分を境界要素で離散化した場合を想定し、増分法による熱弾塑性 BEM-FEM 結合解析法の定式化を図る。

微小積分区間内において、仮想仕事の原理は

$$\int_V (\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}) \Delta\epsilon_{ij}^* dV = \int_{S_2} (\bar{P}_i + \Delta\bar{P}_i) \Delta u_i^* dS \quad (1)$$

と表される。ここに、 σ_{ij} は応力、 ϵ_{ij} は歪み、 \bar{P}_i は単位面積当りに作用する表面力、 u_i は変位、 Δ は微小増分量、* は仮想変化量である。また、幾何学非線形についてはとくに考慮せず、 $\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ としている。式(1)を整理すると、

$$\int_V \Delta\sigma_{ij} \Delta\epsilon_{ij}^* dV = \int_S \Delta\bar{P}_i \Delta u_i^* dS + \left\{ \int_S \bar{P}_i \Delta u_i^* dS - \int_V \sigma_{ij} \Delta\epsilon_{ij}^* dV \right\} \quad (2)$$

となる。ここで $\Delta\sigma_{ij}$ は

$$\Delta\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\Delta\epsilon_{kl} - \Delta\epsilon_{kl}^0), \quad C_{ijkl} = C_{ijkl}^0; \quad \bar{\sigma} \leq \sigma_y, \\ C_{ijkl} = C_{ijkl}^0; \quad \bar{\sigma} > \sigma_y \quad (3)$$

と表される。ただし、 $\bar{\sigma}$ は相当応力、 σ_y は降伏応力、 C_{ijkl} はいわゆる弾性定数であり弾性時と塑性時とは異なる。²⁾ また、 $\Delta\epsilon_{kl}^0$ は温度変化 $\Delta\theta$ により生じる初期歪みであり、

$$\Delta\epsilon_{kl}^0 = \delta_{kl} \alpha \Delta\theta \quad (4)$$

となる。ここに、 δ_{ik} はクロネッカのデルタ、 α は線膨張係数である。式(3)を式(2)に代入し整理すると式(2)は次のようになる。

$$\int_V \Delta\epsilon_{kl} C_{ijkl} \Delta\epsilon_{ij}^* dV = \int_S \Delta\bar{P}_i \Delta u_i^* dS + \int_V \Delta\epsilon_{kl} C_{ijkl} \Delta\epsilon_{kl}^0 dV \quad (5)$$

ただし、変形後の非平衡成分である式(2)右辺第2項以下の積分項は無視している。有限要素を用いて式(5)を離散化することにより、

$$K \cdot U = F + F_t = MP \quad (6)$$

なる境界要素型の平衡方程式を得る。ここに、 F_t は熱応力と等価な節点力ベクトル、 M は前報でも報告した節点力と節点表面力とを結ぶ交換マトリックスである。

一方、微小増分量のみに着目すると、BEM に対し仮想仕事の原理は、

$$\int_V (\sigma_{jkn} + \Delta b_n) \Delta u_n^* dV = \int_{S_2} (\Delta P_k - \Delta \bar{P}_k) \Delta u_k^* dS + \int_{S_1} (\Delta \bar{u}_k - \Delta u_k) \Delta P_k^* dS \quad (7)$$

と表される。ここに Δb_n は熱応力と等価な見掛けの物体力であり、平面応力問題に対しては

$$\Delta b_k = -\delta_{ik} \mu \Delta\theta, \quad \mu = E\alpha / (1-\nu) \quad (8)$$

と具体的に表される。式(7)を部分積分すると同式は

$$\Delta u_i + \int_S \Delta u_n \Delta P_n^* dS = \int_S \Delta P_n \Delta u_n^* dS + \int_V \delta_{in} \mu \Delta\theta \Delta u_n^* dV \quad (9)$$

と整理される。ただし、 $S = S_1 + S_2$ である。式(9)を境界積分方程式に置換すると、

$$C_i \Delta u_i + \int_S \Delta u_n \Delta P_n^* dS = \int_S \Delta P_n \Delta u_n^* dS$$

* 東京大学生産技術研究所 第2部

$$+ \int_V \delta_{ijk} \mu \Delta \theta \Delta u_{i,j,k}^* dV \quad (10)$$

となり、弾性問題のそれとの違いは、右辺第 2 項の領域積分項が単に付加されているのみである。境界要素を用いて式(10)を離散化すると、

$$HU = GP + P_t \quad (11)$$

なる平衡方程式を得る。ここに、 P_t は式(10)の右辺第 2 項から導かれる熱応力と等価な表面力である。したがって、前報と同様の手法により式(6)と式(11)とを連立させて解くことにより、熱弾塑性問題の解析が可能となる。ただし、式(10)右辺第 2 項に関連して、内点歪みの算出に際しては以下に示す主値積分が必要となる。すなわち、 $\Delta \epsilon_{ij}^*$ に注目すれば、上記の項に起因する $\Delta \epsilon_{ij}^*$ の成分は、

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_{ij}^* &= \int_V \mu \Delta \theta (\Delta u_{i,j,x}^* + \Delta u_{i,j,y}^*)_{,x} dV \\ &= \lim_{V_c \rightarrow 0} \int_{V-V_c} \mu \Delta \theta (\Delta u_{i,j,x}^* + \Delta u_{i,j,y}^*)_{,x} dV \\ &\quad + \lim_{V_c \rightarrow 0} \int_{V_c} \mu \Delta \theta (\Delta u_{i,j,x}^* + \Delta u_{i,j,y}^*)_{,x} dV \\ &= \int_V \mu \Delta \theta (\Delta u_{i,j,x}^* + \Delta u_{i,j,y}^*)_{,x} dV + \alpha(1+\nu) \Delta \theta / 2 \end{aligned} \quad (12)$$

と変形されることに注意を要する。³⁾ここに、 $\Delta \theta$ は定点 i での温度増分である。

以上のように、工作面の近傍を除くと被加工材は機械的および熱的変形に対し弾性的な挙動を呈するものと考え、工作面近傍を離散化する有限要素に対しては熱弾塑性、工作物の他の部分を離散化する境界要素に対しては熱弾性変形を仮想した定式化を示した。

3. 解析解と理論解との比較

高精度解を得るという観点のみに立てば、岡本ら⁴⁾の二重指数関数型積分は式(10)の近似積分に適した手法である。しかしながら、基本的には台形則に属する手法であるため、領域積分しかも繰り返し計算を必要とする非線形問題の解析に上記の手法を適用し高精度解を得るためには、極めて長大な演算時間を必要とする。ここでは上記の特異積分に代わる手法として、(a)領域要素をさらに内点を頂点とする内部領域に細分化し通常の Gauss 積分を行う手法、(b)有限要素法の場合と同様、領域要素内の変位場を仮定する方法、の二つの方法を取り上げ、理論解との比較により本研究の目的に促した手法についての考察を行う。ただし、解析対象は図 1 に示す矩形板 (ヤング率 $E=2100$ GPa, ポアソン比 $\nu=0.3$, 降伏応力 $\sigma_y=4.2$ GPa, 加工硬化率 $H'=0.1E$, 線膨張係数 $\alpha=0.1 \times 10^{-4}$ $1/^\circ\text{C}$), 温度変化は面内で均一であるとしている。

(1) 要素分割数の影響

図 1 に示した矩形板 (領域要素数=4) を例にとり、

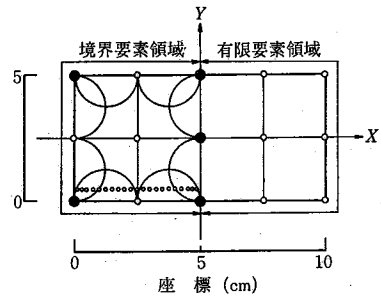


図 1 解析対象の形状と要素分割例 (領域要素数=4 の場合)

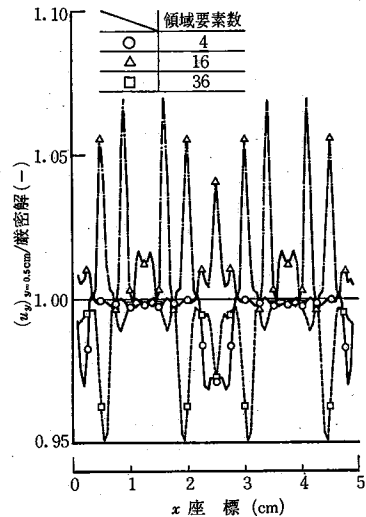


図 2 内点での y 方向変位

0.05(%) 熱膨張時における内点 ($0 < x < 5$ (cm), 内点数=29) での y 方向変位の分布を求めると、図 2 に○印で示す結果を得る。縦軸は解析解と厳密解との比、横軸は x 座標である。ただし、内点変位の算出に際しては、図 1 に細線で示した円弧内すなわち要素長さを直径とする半円の範囲内に位置する内点に関してのみ 24 次の Gauss 積分を行い、その範囲外にある内点に関しては 10 次の Gauss 積分を併用することとした。

図 2 に○印で示した結果によれば、24 次の Gauss 積分を行った内点に関しては最大誤差が 0.5(%) 以内であり、比較的良好な結果の得られていることがわかる。したがって、上記の場合のみに限定すればピボットの数を増すことにより、 $0 < x < 5$ (cm) の範囲で良好な結果を得ることが可能である。一方、内点の座標を固定した領域要素数を 16, 36 と順次変化させると、 y 方向変位の分布はそれぞれ図 2 に△印, □印で示すように変化する。すなわち、領域要素数の増加は必ずしも解析精度の向上に寄与しておらず、要素数=16 の場合には最大誤差が 7(%)

研 究 速 報

と要素数=4の場合に比べ劣っていることが明らかである。

その原因を明らかにするため、要素数=16の場合に注目し、変位成分を線積分のみにより得られる成分と面積分により得られる成分とに分離し、その y 方向成分を図示すると図3に示すとおりとなる。縦軸は解析解と厳密解との比、横軸は x 座標 (Gauss点も同時に付記している) である。図中△印は線積分による成分、□印は面積分による成分、○印は参考のため付記した両成分の和である。

図3に示した結果によれば、線積分により得られる内点変位の x 軸方向変化は一樣連続であるのに対し、面積積分により得られるそれは、局部的に極値を有していることが判る。横軸に付記した Gauss 点と内点座標との幾何学的関係に留意すれば、内点変位の極値はいずれも内

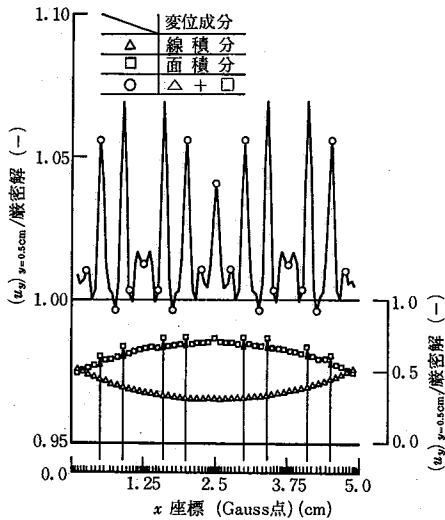


図3 線積分、面積分により求める内点変位の各成分

点が Gauss 点ときわめて近接した点で生じていることが判る。この問題点は、簡単な方法として Gauss 積分の次数を下げることにより解決される。一方、低次の Gauss 積分によれば解の精度が全体的に低下する。そこで、領域要素をさらに内点を一つの頂点とする内部要素に細分化することとした。

(2) 領域要素の細分化と要素内変位場の仮定

内点と Gauss 点との重量を避ける一つの方法として、図4に例記した通り、内点を1つの頂点とする4つの内部領域で領域要素で分割する。すなわち、式(10)右辺第2項の積分を、

$$\int_V \delta_{i,k} \mu \Delta \theta \Delta u_{i,k}^* dV = \sum_{n=1}^4 \int_{V_n} \delta_{i,k} \mu \Delta \theta_n \Delta u_{i,k}^* dV \quad (13)$$

と書きかえることとする。

式(13)により、領域要素数が4の場合の内点変位 ($0 < x < 5(\text{cm}), y = 0.5(\text{cm})$) を算出しその y 方向変位を図示すると、図5に△印で示す通りとなる。縦軸は解析解と厳密解との比、横軸は x 座標である。また比較のため、Gauss 積分のみにより得られた結果を同図に○印で付記している。ここでは、(1)節と同様、境界要素の要素長さを直径とする半円の内部に位置する内点に関してのみ式(13)を適用し、その範囲外の節点については10次の Gauss 積分を併用したため、 $x = 2.5(\text{cm})$ の位置における節点変位は○印で示したそれと完全に一致している。一方、式(13)を適用した内点の変位は厳密解に極めて近接していることが明らかである。

同様に、内点での相当応力の x 軸方向変化を図示すると、図6に△印で示す結果を得る。縦、横軸は図5に示したそれと同じである。また、比較のため Gauss 積分のみにより得られた結果を同図に○印で付記している。○印で示した結果によれば、相当応力は Gauss 点近傍において最大 90(%) 程度の大きな誤差を有している

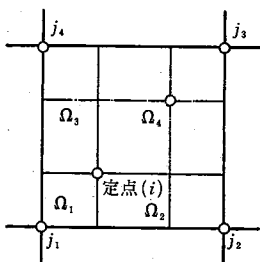


図4 領域要素の細分化

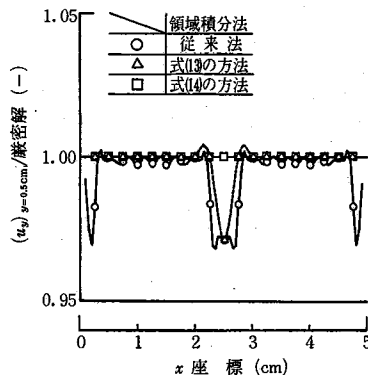


図5 領域積分法と解析解 (内点変位) との関係

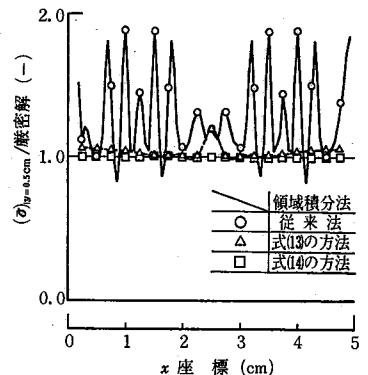


図6 領域積分法と解析解 (内点応力) との関係

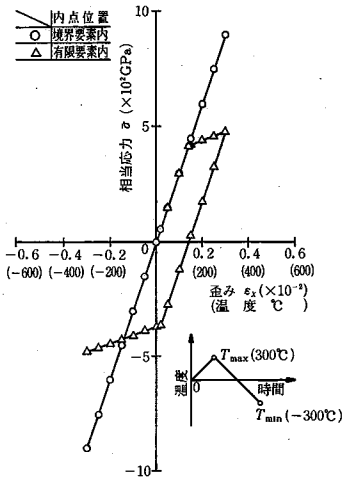


図7 熱弾塑性変形下における相当応力-歪み曲線

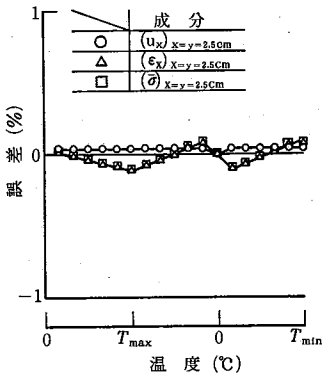


図8 数値計算誤差と増分回数との関係

のに反し、△印の場合には6(%)の値に減少していることが判る。このように、内点変位ならびに応力(歪み)の誤差は式(13)の方法により減少させることが可能である。しかしながら、内点変位はともかく、内点歪みの誤差、とくにそれが分布をもつという性質は、本来解くべき問題の性質上無視し得ないものと思われた。そこで、有限要素法の場合と同様、領域要素内の変位場を

$$u_i = \sum_{n=1}^4 \phi_n u_i^n \quad (14)$$

と近似し、内点歪み(応力)を求めることとした。

図5ならびに図6に、式(14)により得られたy方向変位および相当応力の分布を□印で示した。簡便法であるにもかかわらず、両者ともに高精度の解が得られている。また、式(14)の手法にもれば、変位ならびに歪みの算出に際し Gauss 積分のような繰り返し計算を必要としないため、式(13)の場合に比べ大幅な演算時間の短縮化が可能である。

(3) 増分法による熱弾塑性変形の解析

研削面ならびにその近傍における研削温度は、常温から最大(研削焼けが生じた場合)500(°C)の範囲内で非定常かつ不均一に変化する。ここでは上記の問題を想定し、図1に示した矩形板の温度が0(°C)から±300(°C)の範囲内で面内均一に変化した場合の挙動をBEM-FEM解析とする。ただし、領域要素数=4、有限要素数=4、ならびに温度増分Δθは50(°C)であるとしている。また、内点変位および歪みは式(14)により算出することとした。

図7に、熱弾塑性変形下における相当応力σと歪みとの関係を示す。縦軸は相当応力σ、横軸は歪みεx(括弧内に温度を付記した)である。図中○印は境界要素内部(x=y=2.5(cm))、△印は有限要素内部(x=7.5(cm), y=2.5(cm))での応力の変化である。また、変形を幾何学的に線形と仮定した場合の理論解を同図に実線で付記している。厳密解にきわめて近接した解析解の得られていることが明らかである。

図7に示した結果を元に、領域要素内の内点に蓄積される誤差と、温度(増分回数と等価)との関係を図示すると、図8に示すとおりとなる。縦軸は解析解と厳密解との比、横軸は温度である。また、図中○印は内点のx方向変位、△印はx方向歪、□印は相当応力を表す。同図に示した結果によれば、本計算過程下において生じる最大誤差は、変位で0.04(%), 相当応力, 歪みで0.12(%)程度であり、いずれも発散の傾向は有していないことが明らかである。この、歪みと相当応力に見られる誤差蓄積の割合は、温度刻み幅Δθを小さくすることにより減少する。

4. 結 言

本報告では、研削過程下において生じる残留応力を把握する基礎として、熱弾塑性BEM-FEM結合解法の高精度化に関する考察を試みた。その結果、領域積分に際し、(a)領域要素をさらに内点とする内部領域に細分化し通常の Gauss 積分を行うこと、あるいは、(b)有限要素法の場合と同様、領域内の変位場を仮定すること、等の方法により高精度解の得られることが明らかとなった。
(1983年7月19日受理)

参 考 文 献

- 1) 仙波ほか2名, 生産研究, 35, 8, (1983) 21
- 2) 山田, マトリックス法の応用, 東京大学出版会, (1972) 150
- 3) H. D. Bui, Int. J. Solids Structures, 14, (1978) 935
- 4) 江澤ほか3名, 日本機械学会講演論文集, 830-1, (1983) 4