

クリープフィード研削時に生じる残留応力の解析 (第2報)
—BEM ならびに BEM-FEM 結合解析法の高精度化について—

Analysis of Residual Stress During Creep Feed Grinding (2nd Report)
—Improvement on accuracy in BEM and BEM-FEM combined Analysis—

仙波 卓 弥*・谷 泰 弘*・佐 藤 壽 芳*
Takuya SEMBA, Yasuhiro TANI and Hisayoshi SATO

1. 緒 言

研削加工により生じる変質層の深さは、通常表層から 100 (μm) 以下であり、おもに研削時に発生する熱量の大小に依存して変化する。この加工変質層に分布する応力を数値解析する手法の一つに、たとえば有限要素法 (FEM) を挙げることができる。しかしながら、加工物全体積に占める変質層の割合が極めて微小であるため、現実には膨大な数の要素分割を必要とする。上記の欠点を補う一つの手法として、近年境界要素法 (BEM) が注目を浴びているわけであるが、精度上 FEM に比べ見劣りのする現状にある。

本報告では、研削加工により生じる熱応力を解明する基礎として、平面弾性 BEM ならびに BEM-FEM 結合解析法の高精度化を図る。すなわち、Dirichlet-Neumann 境界の隣接点に変位の適合条件と表面力の不連続性を同時に考慮すること、ならびに、境界積分に際し特異積分を行うことの 2 点により工學上十分な精度の解が得られたので報告する。

2. 基礎方程式

ポテンシャル問題などある種の限られた問題に対し、BEM は FEM と同等もしくはそれよりも優れた解を与え得る能力を有する。しかしながら、表面形状が複雑な場合や、たとえば弾性塑性の共存する一種の不均質問題に対しては、FEM を用いた方が簡単である。ここでは、加工変質層の存在する部分を FEM、他の部分を BEM で離散化する場合を想定して、BEM-FEM 結合解析法による線形弾性問題の定式化を図る。

物体力を無視すると、FEM 領域 Ω_F に対し仮想仕事の原理は、

$$\int_{\Omega_F} \sigma_{j_k} u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (\bar{p}_k - p_k) u_k^* d\Gamma \quad (1)$$

と表される。ここに σ_{j_k} は応力、 p_k は表面力、 u_k^* は仮想変位、 Γ_2 は Neumann 境界である。式(1)を部分積分すると、同式は、

$$\int_{\Omega_F} \sigma_{j_k} \epsilon_{j_k}^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma \quad (2)$$

と変形される。ただし、 $\epsilon_{j_k} = (u_{j,k} + u_{k,j})/2$ 、 $p_k = \sigma_{j_k} n_j$ である。式(2)に構成式を導入すると共に、有限要素を用いて離散化すると、同式より、

$$KU = F \quad (3)$$

なる FEM 型平衡方程式を得る。ここに、 K は剛性マトリックス、 U は節点変位ベクトル、 F は節点力ベクトルである。この節点力ベクトル F は、表面力ベクトルを P とすると、

$$F = \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} \Phi_e^T \Psi_e d\Gamma P_e^e = MP \quad (4)$$

と書き表すことができる。ただし、 E は Γ_2 を含む要素の総数である。また、 Φ_e ならびに Ψ_e は $\Gamma_e (\Gamma_e \in \Gamma_2)$ 上で、

$$U_e = \Phi_e U_n^e, \quad P_e = \Psi_e P_n^e \quad (5)$$

と定義される形状関数である。ここに、 U_n ならびに P_n は節点における変位および表面力ベクトルである。

一方、BEM 領域 Ω_B に対し仮想仕事の原理は、

$$\int_{\Omega_B} \sigma_{j_k} u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma \quad (6)$$

と表される。式(6)を部分積分すると、同式は

$$\left. \begin{aligned} &\int_{\Omega_B} \sigma_{j_k}^* u_k d\Omega \\ &= - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

と変形される。いま、 $\sigma_{j_k}^* + \Delta i = 0$ を満たす u_k^* と p_k^* を用いたとすれば、式(7)は最終的に、

$$ui + \int_{\Gamma} u_k p_k^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \quad (8)$$

となる。ここに、 Δi は Dirac のデルタ関数である。また、 u_k^* 、 p_k^* は基本解関数と呼ばれ、点 i において l 方向に作用する単位集中力により生じる変位ならびに表面力ベクトルを表す。式(8)を境界積分方程式に置換すると、同式は、

$$c^i u_i + \int_{\Gamma} u_k p_k^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \quad (9)$$

と変形される。ここに、 c^i は定点 i を含む要素の幾何学

* 東京大学生産技術研究所 第2部

研 究 速 報
 的な形状により決定される係数であり、剛体変位条件¹⁾により決定することができる。境界要素を用いて式(9)を離散化すると、同式より、

$$HU = GP \quad (10)$$

なる BEM 型平衡方程式を得る。ここに、 U 、 P は節点での変位および表面力ベクトルである。

次に、有限要素と境界要素とを用いて解析領域を図1のようにモデル化した場合を想定する。この場合、領域 $\Gamma_F + \Gamma'_F$ に対する離散化方程式 (式(3)、(4)) は、

$$\begin{bmatrix} K_{FF} & K_{FI} \\ K_{IF} & K_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_F \\ U'_F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{FF} & M_{FI} \\ M_{IF} & M_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_F \\ P'_F \end{Bmatrix} \quad (11)$$

と書き換えることができる。同様に、領域 $\Gamma_B + \Gamma'_B$ に対する離散化方程式 (式(10)) は、

$$\begin{bmatrix} H_{BB} & H_{BI} \\ H_{IB} & H_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_B \\ U'_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{BB} & G_{BI} \\ G_{IB} & G_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_B \\ P'_B \end{Bmatrix} \quad (12)$$

となる。 $\Gamma'_B = \Gamma'_F$ 上での変位の適合条件 ($U'_B = U'_F = U_I$)、ならびに表面力の平衡条件 ($P'_B = -P'_F = P_I$) に留意すると、式(11)、式(12)より全領域に関し、

$$\begin{bmatrix} H_{BB} & H_{BI} & -G_{BI} & 0 \\ H_{IB} & H_{II} & -G_{II} & 0 \\ 0 & K_{II} & M_{II} & K_{IF} \\ 0 & K_{FI} & M_{FI} & K_{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_B \\ U_I \\ P_I \\ U_F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{BB} & 0 \\ G_{IB} & 0 \\ 0 & M_{IF} \\ 0 & M_{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_B \\ P_F \end{Bmatrix} \quad (13)$$

なる境界要素型平衡方程式を得る。以上のように、ここでは有限要素領域を等価境界要素と考え、境界要素型の平衡方程式を導出した。

3. 解析解と理論解との比較

BEM の最大の特徴は、FEM とは異なり無限領域に属するような領域の解析が可能であるという点である。しかし、その解析精度は FEM に比べ十分とは言えない現状にある。ここでは、高精度化に寄与する要因として、Dirichlet-Neumann 境界の隣接点ならびに、被積分関数の特異性に対する数学的取り扱いの2点に着目し、それらが解析精度に及ぼす影響について考察する。ただし、解析対象は矩形板 ($E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$) としている。

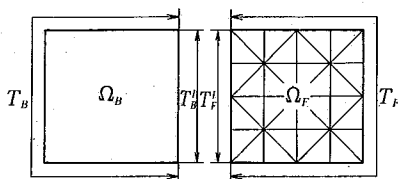


図1 有限要素と境界要素の結合

3.1 境界条件に関する考察

線形もしくは高次要素を用いて境界の離散化を行う場合、Dirichlet-Neumann 境界の隣接点においては表面力の不連続性を考慮しないと有意義な結果は得られない。その対策として、Brebbia¹⁾を始め Tullberg,²⁾ 岡本ら³⁾ は隣接点において変位と表面力とを二重に定義し、

$$c^i u_i + \int_{\Gamma - \Gamma_D} u_n p_{in}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_D} \bar{u}_n \bar{p}_{in}^* d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma_n} p_{kn} u_{in}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_n} \bar{p}_{kn} \bar{u}_{in}^* d\Gamma \quad (14)$$

と表面力の不連続性を評価している (使用記号については図2参照)。しかしながら、式(14)によれば隣接点で変位の適合性が満足される保障はなく、節点 m と m^* は本来同一の節点であるにもかかわらず、実際に計算を行うと上記の節点で変位に食い違いが生じる結果となる。そこで、 $U_m = U_{m^*}$ なる付帯条件の下で式(14)を離散化することとした。

図3に示す一辺5 (cm)の正方形板を例にとり、1 (%) 単軸伸長変形時における境界の変位ならびに応力を求めると、図4(a)、(b)に示す結果を得る。 $y = 5$ (cm)の境界上にある節点の圧縮変位量と x 座標との関係を図(a)に、 $x = 5$ (cm)の境界上にある節点に作用する表面力と y 座標との関係を図(b)に示している。いずれの場合も、解析解と厳密解との比を縦軸に、要素数をパラメータに用いている。また、変位の付帯条件を考慮した場合に得られる結果を白丸で、考慮しない場合の結果を黒丸で示した。

図4(a)に示したように、変位の適合条件を考慮しない場合に生じる表面変位の最大誤差は、最も粗い要素分割時において最大3 (%)程度生じているのに対し、付帯条件を考慮した場合には全く誤差が生じていない。同様の傾向は、図4(b)に示した表面力の分布にも見れる。

以上のように、Dirichlet-Neumann 境界の隣接点に関しては、応力の不連続性のみでなく、変位の適合条件をも同時に考慮することにより高精度の解を得ることが可

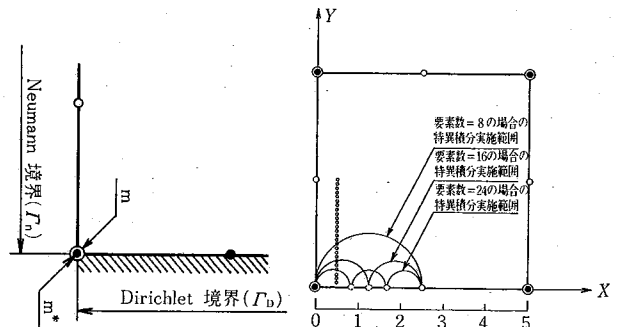


図2 Dirichlet-Neumann 境界の隣接点 m 、 m^*

図3 要素分割例と特異積分の実施範囲

能である。

3.2 特異積分に関する考慮

積分区間内で特異性を有する被積分関数の近似積分法として、二重指数関数型積分⁴⁾を挙げることができる。この手法は、被積分関数 $F(\xi)$ の積分を I とすると、

$$I = \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \approx h/2\pi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} F\left(\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh nh\right)\right) \times \cosh nh / \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh nh\right) \quad (15)$$

と近似するものであり基本的には台形則に属する。ここに、 h は刻み幅であり h を細かくするほど積分精度は向上するのに対し、演算時間は増大する。そこで、内点変位ならびに歪みの算出に際しては、図3に細線で示した範囲内、すなわち、要素長さを直径とする半円の範囲内に位置する内点に関してのみ特異積分を行い、その範囲外の内点に関しては5次の Gauss 積分を併用した。

h を 0.001(cm) とし、(3.1) 節と同様の問題に対する $x=0.5$ (cm) 上での伸長変位を求めると、図5(a)に示す結果を得る。縦軸は y 座標、パラメータは要素分割数を表す。比較のため、Gauss 積分のみを用いた場合に得られた結果を図5(b)に図示した。図5(b)に示した結果によれば、特異積分を行わない場合、内点変位の最大誤差

は最も粗い分割時(要素数=8;ほとんどの内点が本来特異積分を行う必要のある範囲に位置している場合)、Gauss 点において1(%)程度生じていることが判る。一方、図5(a)に示した結果からも明らかのように、特異積分を行うことにより上記の分割時に生じる最大誤差は0.2(%)程度に減少している。

同様に、 $x=0.5$ (cm) 上での内点歪みを求めると、図6(a)に示す結果を得る。縦軸はBEM解と厳密解との比、横軸は y 座標、パラメータは要素分割数を表す。比較のため、Gauss 積分のみを用いた場合に得られる結果を図6(b)に示している。特異性の度合いが増すため、特異積分を行わない場合の最大誤差は最も粗い分割時において20(%)、特異積分を行った場合0.6(%)と内点変位に比べそれぞれ拡大していることが判る。しかしながら、Gauss 積分のみの場合、Gauss 点で誤差が最大となることならびに特異積分を行った場合、要素中央で誤差が最大となること等の性質は内点変位のそれと同じである。ただし、 $y \leq 0.1$ (cm)、 $2.3 \leq y \leq 2.5$ (cm) の範囲において良い結果が得られていないのは、特異積分の実施範囲の選定に問題があるためであり、積分範囲を拡大すること、またはピボットを増すことにより改善可能である。

以上示したように、内点変位ならびに内点歪み(応力)に関する解析精度は、二重指数関数型積分を用いることにより大幅に向上する。

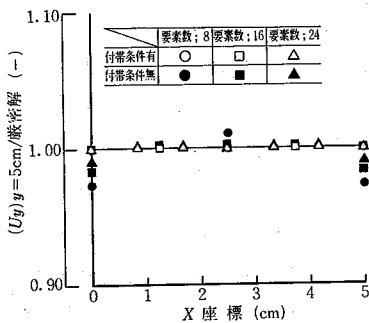


図4(a) 表面変位に及ぼす境界処理ならびに要素分割の影響

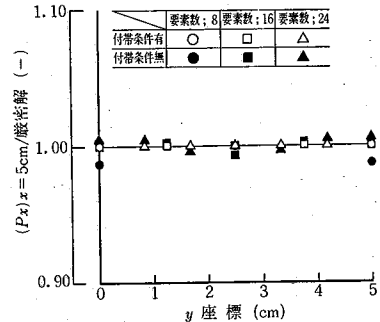


図4(b) 表面力に及ぼす境界処理ならびに要素分割の影響

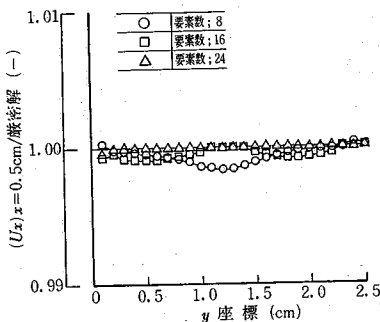


図5(a) 特異積分と Gauss 積分との併用により求めた内点変位

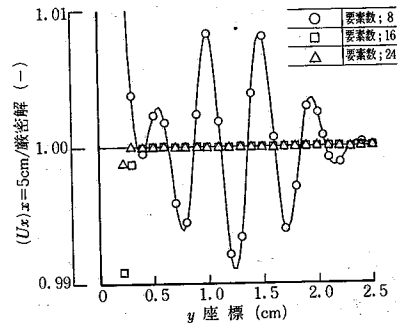


図5(b) Gauss 積分のみにより求めた内点変位

研 究 速 報

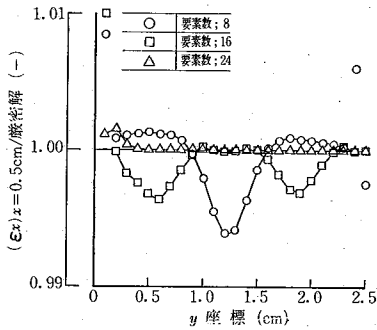


図 6(a) 特異積分と Gauss 積分の併用により求めた内点歪み

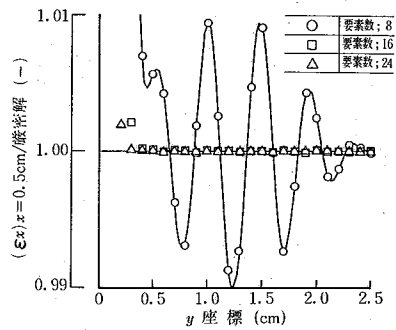


図 6(b) Gauss 積分のみにより求めた内点歪み

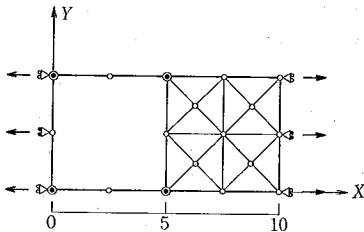


図 7 要素分割例ならびに境界条件

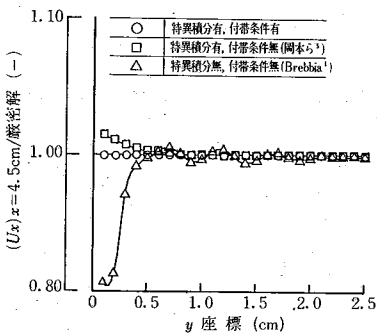


図 8 BEM-FEM 結合解析法により求めた内点変位

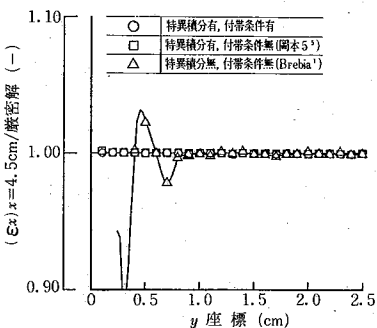


図 9 BEM-FEM 結合解析法により求めた内点歪み

3.2 BEM-FEM 結合解析法に関する考察

3.1, 3.2 節で考察を試みたとおり, BEM を単独で使用する場合の解析精度は, 境界条件の処理ならびに特異積

分の実施により大幅に向上する。ここでは, 結合解析法の解析精度に着目し, それに及ぼす上記の要因についての考察を試みる。ただし, 解析対象は図 7 に示す矩形板とし, 1(%) 単軸伸長変形下における挙動に注目している。

図 8 に, $x=4.5$ (cm) の位置における伸長変位の y 軸方向変化を图示した。縦軸は BEM 解と厳密解との比, 横軸は y 座標を表す。また, 図中△印は BEM 領域について境界条件の処理ならびに特異積分を行わない場合 (Brebbia¹⁾), □印は特異積分のみを行った場合 (岡本ら⁵⁾), ○印は両者を考慮した場合に得られる結果である。Brebbia の手法では, $y=0.1$ (cm) の内点において 10(%)、岡本らの手法によれば上記の点において 2(%) 程度の誤差が生じているのに対し, 本解析法によれば $0.1 \leq y \leq 2.5$ (cm) の範囲で有意な誤差は認められない。

同様に, $x=4.5$ (cm) の位置における内点歪みの y 方向分布を求めると, 図 9 に示す結果を得る。内点変位の分布と同様, 変位の付帯条件ならびに特異積分を同時に行うことにより, 高精度の解が得られている。

4. 結 言

本報告では, 非線形問題への BEM-FEM 結合解析法の適用を目的として, BEM あるいは BEM-FEM 結合解析法の高精度化に関する考察を試みた。その結果, Dirichlet-Neumann 境界の隣接点に関しては変位の適合条件と表面力の不連続性を同時に考慮する必要があること, ならびに, 内点変位や歪みの算出に際しては二重指数関数型積分公式の通用が有効であることの二点が明らかとなった。

(1983 年 5 月 9 日受理)

参 考 文 献

- 1) C.A. brebbia ; The Boundary Element Method for Engineers, (1978) Pentetch Press
- 2) O. Tullberg and L. Bolfeus ; Boundary Element Methods in Engineering, P. 621 (1982)
- 3) 東町, 岡本 ; 機械学会講演論文集, No.813-1, P. 84(1981)
- 4) 森 ; 数値積分, (1981) 情報処理センター
- 5) 江澤他 3 名 ; 機械学会講演論文集, No.830-1, P. 4(1983)