

不連続体力学のすすめ(その5)

—塑性安定論の基礎づけ—

Development of Discontinuum Mechanics (IV)

—Foundation of the Plastic Instability—

川井忠彦*

Tadahiko KAWAI

柱の座屈理論においてF.R.Shanleyがいわゆるシャンレーモデルを提案して、Engesserに創まる切線剛性論 (tangent modulus theory) と von Kármán の提唱した換算剛性論 (reduced modulus theory) の間の論争に終止符を打ったということは固体力学の歴史に記録される不滅の業績である。実はこのシャンレーモデルは有限な角変位の影響を考慮した著者の“剛体-バネモデル”を最も単純化したものであることが最近わかったので報告する。

1. 塑性安定問題とシャンレーモデル

von Kármán が 1940 年に “The engineers grapples with nonlinear problems” と題する論文をアメリカ数学会で発表し、今後の技術革新は非線形問題との戦いである。技術者はすべからずこの非線形問題と正面から取り組まねばならないことを説いたのは有名な話である。この論文の中で Kármán は固体力学、流体力学、振動波動論など工学の広い分野において現れる非線形問題を取り上げ、見事な数学的理論を展開して非線形現象の本質を突き出している。この論文の中で取り上げられた問題の中に柱の塑性安定問題がある。

従来構造物に起こる不安定問題の大部分のものは弾性域に限られ、この柱の問題はすべて弾性安定問題 (elastic stability problems) と呼ばれてきた。その中でも中心的役割を果たしてきたのが Euler の提唱した座屈理論 (buckling theory) である。Euler の座屈理論は構造物は作用する外荷重がある一定の限界値に到達すると不安定になるというもので、数学的にはいわゆる固有値問題 (eigenvalue problems) を構成し、その最小固有値が座屈荷重を与えることになる。そして柱の曲げ座屈に始まる Euler の理論は、その後大きな発展を遂げて弾性安定理論の中核を形成してゆくのである。

ところが近年構造物の設計は巨大化の傾向にあり、一方ではその軽量化が切実な問題となっており、必然的に非弾性領域における安定問題の研究が注目されるようになってきたのである。そのうちでも、弾塑性領域における不安定問題は決して新しい問題ではなく、Engesser をはじめ多くの人が軸力のみを受ける柱の塑性座屈に関して切線剛性理論を発表し、この線に沿って数多くの研究が弾性安定問題の範囲内で行われてきたし、柱の設

計もこの理論を基礎としていることはよく知られている。この理論は Euler の公式の E の代わりに切線係数 E_t を入れたもので次式で与えられる。

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \quad (1)$$

ところが柱は変形が進むと断面には除荷 (unloading) が生じて、弾性限を超えた領域の一部が再び弾性的に働くことになり、見掛け上断面係数が大きくなって耐荷力が増大する。このことに着目して Kármán は換算剛性理論を提案した。これは弾性限を超えて純粋に圧縮された柱が座屈するとして求めたもので、換算剛性 E_r は次式のごとく与えられる。

$$E_r = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \quad (2)$$

したがって座屈荷重 P_r は次式により計算される。

$$P_r = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2} \quad (3)$$

この理論は久しく正しい理論として認められてきたが、1946年 F.R.Shanley が有名なシャンレーモデルを提案するに及んで、再び Engesser の昔に帰って切線剛性理論に新しい意味づけが行われた。この間の事情を今少し詳しく述べることにしよう。

実際の柱は完全に真直なものではなく、いくらかの初期撓みや荷重の偏心は避けられない。もし、このような初期撓みや荷重の偏心が存在すれば、柱は切線剛性荷重 P_t を超えて純粋に圧縮されることはなく、 P_t を超えると撓みが急増して最高荷重に到達する。初期撓みが零に収束した極限と考えられる真直な柱でも上述の意味で分岐点 (bifurcation) に相当する P_t で曲がり始めるとして Shanley は 2 本の剛体の棒とその間に挟まれた 2 本の短い柱で表れた 2 つのフランジよりなる簡易化された柱 (simplified two flange column) を考え、荷重が P_t を超えて除荷を生じた状態でのつり合い式から次式を得た

* 東京大学生産技術研究所 第2部

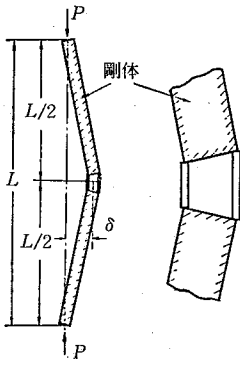


図1 圧縮力を受ける柱の曲げ塑性座屈に対するシャンレーモデル (Shanley's model)

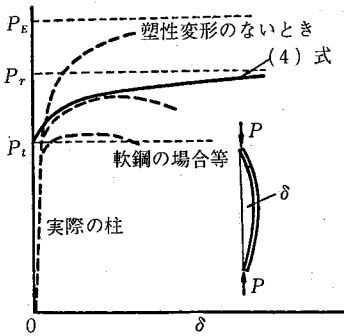


図2 圧縮を受ける柱の挙動

(図1 参照).

$$\frac{P}{P_t} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{28} + \frac{1+\tau}{1-\tau}} \quad (4)$$

ここに、 $\tau = E/E_t$ 、 δ は柱の中央における撓みである。これがシャンレーモデルとその理論で(4)式および実際の柱の挙動を模型的に画いたのが図2であり、荷重は δ の増加と共に増大して換算剛性荷重に漸近してゆく(しかし実際の柱ではその途中で最高荷重に達し、不安定となり、 P_r まで到達することは稀である)。

シャンレーモデルは軸力を受ける柱の塑性座屈の本質を適確に捉えたモデルとして世界的に認められ、その後このモデルを拡張して板殻構造における塑性不安定現象を説明しようとする試みが数多くなされている。

また従来の弾性安定論ではあまり注目されていなかった問題として、3次元構造の安定問題が考えられる。

最近土木工学の分野で岩石力学 (rock mechanics) という新しい分野が急激な発展をみせているが、鉱山や炭鉱、トンネル工事現場等における落盤事故、集中豪雨などによる地すべりやがけくずれ、またロックフィルダムや粉体塊の安定、あるいは豪雪地帯のなだれ現象など、いずれも広い意味での構造安定問題と思われる。これに関連し破壊力学における亀裂の伝播や材料の引張り試験

におけるくびれ (necking) の現象も塑性安定の立場から解明してゆこうとする試みが活発に行われている。

この種の問題は材料の構成方程式 (応力-歪み関係、降伏条件等)、有限歪み、そして破壊 (破壊条件、亀裂の発生生長) 等が複雑に絡み合った高度な非線形問題であって、従来の弾性安定論の単なる拡張ではほとんど説明がつかない難問であり、定量的な把握に入るまえに、まず塑性安定問題の本質を突く簡単なモデルを考えて、それによる定性的研究を徹底的に行うべきであると著者は考える。

このような方向の先駆的研究を行ったのが Shanley であり、そのモデルを拡張して塑性安定論を体系化する必要がある。次節において RBSM モデルを単純化してゆくとい一般化シャンレーモデルが導かれることを柱と平板の塑性座屈問題を例にとって説明する。

2. 剛体-バネ梁要素モデルによる軸圧縮力を受ける柱の塑性安定解析

図3に示すような2要素から成る剛体柱モデルを考える。

この問題で今座屈による曲げ変形が $x-z$ 平面内を起こるとすれば、その重心の並進変位ベクトル ($u_G, 0, w_G$) であり、また回転は y 軸まわりの回転 ϕ だけとなる。

本解説 (その4) で詳述したように、剛体内の任意の一点における変位 u はその重心の並進変位を u_G 、角変位 (θ, ϕ, χ) に伴う座標変換マトリックスを T とすれば

$$u = u_G + (T - I)(r - r_G) \quad (1)$$

で与えられる。 $(r - r_G)$ は重心 G を始点とする位置ベクトル、 I は (3×3) の単位マトリックスである。

さて ϕ による座標変換マトリックス T は次式のごとくなる。

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2)$$

したがって剛体要素の変位場は次式により与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &= u_0 + (x - x_0)(\cos \phi - 1) \\ &\quad + (z - z_0)\sin \phi \\ W(x, y, z) &= w_0 - (x - x_0)\sin \phi \\ &\quad + (z - z_0)(\cos \phi - 1) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに重心の変位および座標は下つきの0が付けられている。今要素①、②につきその座標原点をそれぞれ左端および右端の断面図心にとるとすれば要素①および②の節点 (x, y, L_i) の変位場は各要素につきのごとき与えられる。

(i) 要素①の変位場

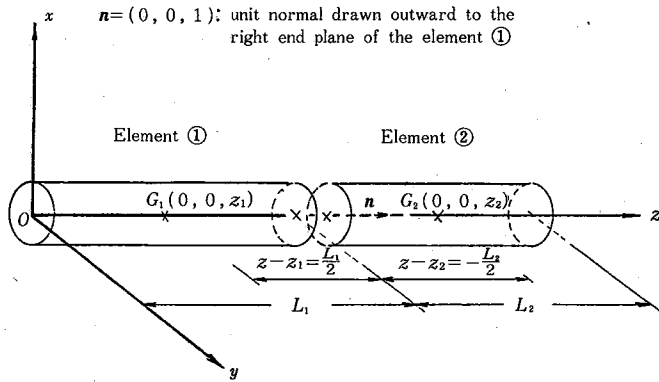


図 3 剛体-バネ梁モデル

$$\left. \begin{aligned} u' &= u_1 + x(\cos \phi_1 - 1) + L_1 \sin \phi_1 \\ w' &= w_1 - x \sin \phi_1 + L_1(1 - \cos \phi_1) \end{aligned} \right\} \text{(i) 要素①の変位場}$$

$$\left. \begin{aligned} u'' &= u_3 + x(\cos \phi_2 - 1) + L_2 \sin \phi_2 \\ w'' &= w_3 - x \sin \phi_2 - L_2(\cos \phi_2 - 1) \end{aligned} \right\} \text{(ii) 要素②の変位場} \quad (4)$$

ここに $(u_1, w_1), (u_3, w_3)$ はそれぞれ $(0, 0, 0)$ および $(0, 0, L_1 + L_2)$ の変位を表す。さてこの 2 つの梁要素の長さが等しい場合には図 4 を参考にすれば次のような幾何学的関係が成り立つことがわかる。

$$\left. \begin{aligned} L_1 = L_2 = L/2, u_1 = u_3 = 0, u_2 = u \\ \phi_1 = -\phi_2 = \phi, w_1 = -w_3 = w, w_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

したがってこれら 2 梁要素の変位場は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u' &= u + x(\cos \phi - 1) + L/2 \sin \phi \\ w' &= w - x \sin \phi + L/2(\cos \phi - 1) \\ u'' &= u + x(\cos \phi - 1) + L/2 \sin \phi \\ w'' &= -w + x \sin \phi - L/2(\cos \phi - 1) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

したがって $z = L/2$ における要素間の相対変位は次式のごとく与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_x &= u'' - u' = 0 \\ \delta_z &= w'' - w' = -2(w - x \sin \phi + L/2(\cos \phi - 1)) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

もし ϕ がある程度小さければ、 δ_z は次式のように簡単化される。

$$\delta_z = -2(w - x\phi - L\phi^2/4) \quad (10)$$

最近都井はこの変位場を用いて Shanley が単純支持された 2 つのフランジのみから成る柱 (two-flange column, これがシャンレーモデルの原型である。) の解析を行い以下に述べるような成果を得た。

まず $z = L/2$ における柱の横たわみを u とすれば (10) 式は次のように改められる。

$$\delta_z = -2w + 4\left(\frac{x}{L}\right)u + \frac{2}{L}(u^2) \quad (11)$$

したがって 2 つのフランジの変位は u, w を用いて次式のように与えられる。

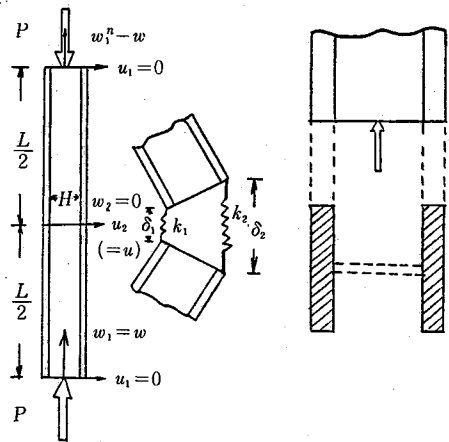


図 4 簡易化された“剛体-バネ”柱モデル

$$\left. \begin{aligned} \delta_1(w, u) &= -2w - \frac{2H}{L}u + \frac{2}{L}(u^2) \\ \delta_2(w, u) &= -2w + \frac{2H}{L}u + \frac{2}{L}(u^2) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

したがって $\delta_i (i=1, 2)$ の増分形は次式のごとくなる。

$$\begin{aligned} \Delta \delta_i &= \delta_i(w^{(0)} + \Delta w, u^{(0)} + \Delta u) - \delta_i(w^{(0)}, u^{(0)}) \\ &\approx -2\Delta w \mp \frac{2H}{L}\Delta u + \frac{4u^{(0)}}{L}\Delta u \end{aligned} \quad (i=1, 2, \text{複号同順}) \quad (13)$$

上つき (0) は初期状態を表している。

これらの変位増分に対する力の増分は次式で与えられる。

$$\Delta S_i = \frac{A}{2}\Delta \sigma_i = \frac{A}{2}E_i \Delta \epsilon_i = K_i \Delta \delta_i \quad (14)$$

$$\text{ここに } K_i = \frac{E_i A}{2L} \quad (i=1, 2)$$

で E_i は Young 率で次のように仮定する。(図 5 参照)。

$$\left. \begin{aligned} \text{(a) 弾性域} \\ E_i &= E \quad \left| \frac{\sigma_i}{\sigma_y} \right| < 0.7 \text{ のとき } (i=1, 2) \\ \text{(b) 塑性域} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$E_i = E_t \left| \frac{\sigma_i}{\sigma_y} \right| \geq 0.7 \text{ のとき } (i=1, 2)$$

$$\frac{E_i}{E} = -\frac{10}{3} \frac{\sigma_i}{\sigma_y} + \frac{10}{3}$$

ここに E_i は切線係数を表す。

柱の撓みの対称性から増分仮想仕事方程式は柱の半分に
対して次式のごとく与えられる。

$$\frac{1}{2} \{ \Delta S_1 \delta (\Delta \delta_1) + \Delta S_2 \delta (\Delta \delta_2) \}$$

$$+ P \frac{2\Delta u}{L} \cdot \frac{2\delta(\Delta u)}{L} \cdot \frac{L}{2} = \Delta P \delta (\Delta w) \quad (16)$$

ここで δ は変分を意味することに注意されたい。

(13)式と(14)式を(16)式に代入して(16)式のマトリックス表示式が次のように求められる。

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \frac{H + 2u^{(0)}}{L + \frac{2u^{(0)}}{L}} \\ \hline 2k_1 & \left(-\frac{H + 2u^{(0)}}{L + \frac{2u^{(0)}}{L}} \right)^2 \end{array} \right)$$

$$+ 2k_2 \left(\begin{array}{c|c} 1 & \frac{H + 2u^{(0)}}{L + \frac{2u^{(0)}}{L}} \\ \hline \frac{H + 2u^{(0)}}{L + \frac{2u^{(0)}}{L}} & \left(\frac{H + 2u^{(0)}}{L + \frac{2u^{(0)}}{L}} \right)^2 \end{array} \right)$$

$$+ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2P}{L} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \Delta w \\ \Delta u \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \Delta P \\ 0 \end{array} \right) \quad (17)$$

座屈応力と細長比 L/r の関係を示すコラムカーブ (column curve) を画くために次に示すような値を用いて(17)式の数値計算を行った。

$$A=0.2, H=1, E=100, \sigma_y=1, r=\frac{1}{2}$$

ここで細長比 L/r と初期撓み $u^{(0)}$ については次のよう
に変化させて初期不整敏感性(imperfection sensitivity)
の研究を行った。

$$L/r=10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26$$

$$u^{(0)}/L=10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-7}$$

この計算の結果を表1および図5と6に示す。

計算の結果から次のような結論が得られる。

- (i) 初期撓み $u^{(0)}$ が $u^{(0)}/L=10^{-4}$ 程度であれば、 σ_{\max}/σ_y はほぼ切線剛性荷重 σ_i/σ_y に等しくなる。
- (ii) もし $u^{(0)}$ が $u^{(0)}/L=10^{-7}$ の程度になると σ_{\max}/σ_y は σ_i/σ_y を越える。
- (iii) $\sigma_{\max}/\sigma_y > \sigma_i/\sigma_y$ の場合には、除荷(unloading)が常に起こる。

このようにして RBMS 2 要素モデルにおいて有限の

表1 簡易化された2フランジ柱に対する最大応力計算値と切線剛性応力の関係

L/r	σ_{\max}/σ_y (σ_{\max}/σ_i)			σ_i/σ_y
	$u^0/L=10^{-3}$	$u^0/L=10^{-4}$	$u^0/L=10^{-7}$	
10	0.9141 (0.982)	0.9320 (1.002)	0.9388 (1.009)	0.9302
12	0.8852 (0.981)	0.9070 (1.005)	0.9133 (1.012)	0.9025
14	0.8486 (0.973)	0.8741 (1.003)	0.8841 (1.014)	0.8718
16	0.8125 (0.969)	0.8406 (1.002)	0.8517 (1.015)	0.8389
18	0.7720 (0.960)	0.8035 (0.999)	0.8164 (1.015)	0.8045
20	0.7291 (0.948)	0.7648 (0.994)	0.7786 (1.012)	0.7692
22	0.6779 (0.924)	0.7243 (0.987)	0.7388 (1.007)	0.7337

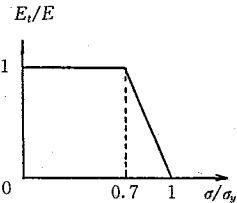


図5 圧縮応力 δ と切線剛性との関係

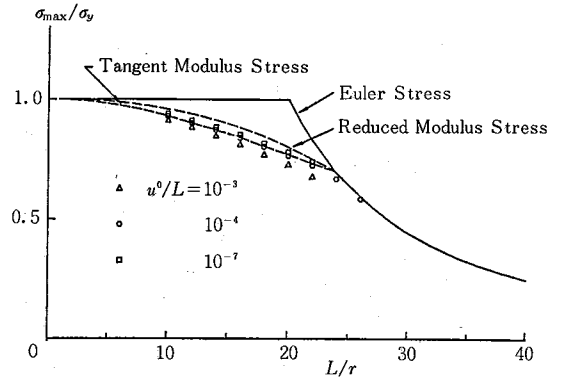


図6 簡易化された2フランジ柱に対するコラムカーブ

角変位を考慮して、その簡略化を行ってゆくと Shanley が柱の塑性座屈現象の本質を示すため考え出したシャンレーモデルが得られることが判った。この考えを拡張してゆくと柱のさらに複雑な塑性不安定現象である横倒れ座屈 (lateral buckling) や曲げ換り座屈 (lateral-torsional buckling) に対する拡張されたシャンレーモデルも導出されよう。これらの問題は今後の課題である。

3. 平板の塑性座屈問題の離散化極限解析

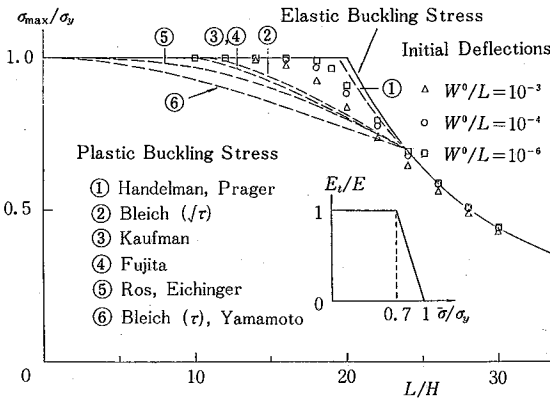


図7 簡易化された2フランジ柱に対する荷重-撓み曲線 ($L/r=20, r=20, u^{(0)}/L=10^{-7}$)

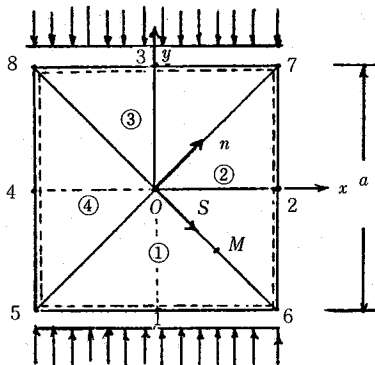


図8 平板の塑性座屈解析のための“剛体-バネモデル”

軸力を受ける柱の塑性安定問題の解析に続き、都井は一方向の圧縮荷重を受ける周辺単純支持正方形板の塑性安定問題の極限解析を行い、平板の圧縮座屈に対するシャンレーモデルを研究した。以下にその要旨を紹介する。

まず図8に示すような周辺支持の正方形板 ($a \times a \times h$) をRBSM 4要素モデルで近似する。

4つの平板要素重心の変位ベクトルを $(u_i, v_i, w_i, \theta_i, \phi_i, \chi_i)$ ($i=1, 2, 3, 4$) とすれば変形の対称性から次のような関係が容易に得られる。

$$\left. \begin{aligned} u_1 = u_3 = 0, \quad u_2 = -u_4 = -u \\ v_1 = -v_3 = -v, \quad v_2 = v_4 = 0 \\ w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w \\ \theta_1 = -\theta_3 = \varphi, \quad \theta_2 = \theta_4 = 0 \\ \phi_1 = \phi_3 = 0, \quad \phi_2 = -\phi_4 = \varphi \\ \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = \chi_4 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

さて辺06上の任意の点における要素①および②の変位ベクトルはそれぞれ次式のごとく与えられる。

(i) 要素①の辺06の変位

$$\left. \begin{aligned} u' = 0 \\ -v' = -v + (\cos \varphi - 1) \left(y + \frac{a}{3} \right) - z \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$w' = w - \sin \varphi \left(y + \frac{a}{3} \right) + (\cos \varphi - 1) z$$

(ii) 要素②の辺06の変位

$$\left. \begin{aligned} u'' = u + (\cos \varphi - 1) \left(x - \frac{a}{3} \right) + z \sin \varphi \\ v'' = 0 \\ w'' = w - \left(x - \frac{a}{3} \right) \sin \varphi + (\cos \varphi - 1) z \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

したがって辺06上の点における相対変位ベクトルは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_x = u'' - u' = u + (\cos \varphi - 1) \left(x - \frac{a}{3} \right) + z \sin \varphi \\ \delta_y = v'' - v' = v - (\cos \varphi - 1) \left(y + \frac{a}{3} \right) + z \sin \varphi \\ \delta_z = w'' - w' = - \left(x - \frac{a}{3} \right) \sin \varphi + \left(y + \frac{a}{3} \right) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

(29)式から相対変位ベクトルの06辺の垂直成分 δ_n と水平成分 δ_s は次式のごとく求められる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta_x + \delta_y \cos \varphi + \delta_z \sin \varphi) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta_x + \delta_y) \\ &\doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(u + v) + \left\{ \left(x - \frac{a}{3} \right) - \left(y + \frac{a}{3} \right) \right\} (\cos \varphi - 1) \right. \\ &\quad \left. + 2z \sin \varphi \right] \\ \delta_s &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\delta_x^2 + (\delta_y - \delta_x)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} (v - u) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

これらの式は要素重心の変位により表されているが、以後の計算の便宜のため $z=0$ 面内の各要素の変位を最長辺、つまり正方形の各辺の中点1および2の変位に変換する。すなわち中点1の y 方向の変位を u_0 、中点2の x 方向の変位を u_0 とすれば、変位の幾何学的関係から

$$\left. \begin{aligned} u + \frac{a}{6} (\cos \varphi - 1) = u_0 \\ v + \frac{a}{6} (\cos \varphi - 1) = v_0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

であり

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(u_0 + v_0) + \left\{ \left(x - \frac{a}{2} \right) - \left(y + \frac{a}{2} \right) \right\} (\cos \varphi - 1) + 2z \sin \varphi \right] \\ \delta_s &= \frac{1}{\sqrt{2}} (v_0 - u_0) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

となる。ここでまた φ を消去するため w を平板の中心の変位にとれば

$$w = \frac{a}{2} \sin \varphi \doteq \frac{a}{2} \varphi \quad (33)$$

の関係がある。この関係を(32)式に代入するとげつきよく次のような式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(u_0 + v_0) - 2 \left(x - \frac{a}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(y + \frac{a}{2} \right) \left(\frac{w}{a} \right)^2 + \frac{4wz}{a} \right] \\ \delta_s &= \frac{1}{\sqrt{2}} (v_0 - u_0) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

この式から判るように δ_s は一定であるが δ_n は座標 (x, y) の 1 次関数で与えられることになるが、今 $x = -y = a/4$ 、つまり $\overline{06}$ の中点 M の変位を代表値にとり近似すると

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (u_0 + v_0) + \frac{4wz}{a} + \frac{w^2}{a} \right\} \quad (35)$$

となる。そこで中点 M の板厚方向に $z = \pm h/2$ および $z = 0$ の中央面の変位 δ_n を考えることにし、それぞれ δ_{+1} 、 δ_{-1} 、 δ_0 で表せば次のような式が得られる。

この式から判るように δ_s は板厚方向に変化しないが、 $\delta_n(z)$ は z の一次関数として与えられる。そこで中点 M の板厚方向に $z = \pm h/2$ および $z = 0$ の中央面の相対変位 δ_n を考え、それぞれ δ_1 、 δ_{-1} 、 δ_0 で表せば次のような式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= (v - u) / \sqrt{2} + \sqrt{2} \lambda h w / a \\ &\quad + w^2 / \sqrt{2} a (\lambda = -1, 0, +1) \\ \delta_s &= -(u + v) / \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

ただし変位 (u_0, v_0) の下つき添字 0 は以後省略して (u, v) と書くことにする。

(36) 式を用いて相対変位の増分形を求めてみると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \delta_i^* &= \Delta \delta_i (\text{linear}) + \Delta \delta (\text{nonlinear}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (v - u) + \frac{\sqrt{2} \lambda h}{a} \Delta w \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{a} w \Delta w + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\Delta w)^2}{a} \quad (\lambda = -1, 0, +1) \\ \Delta \delta_s &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\Delta u + \Delta v) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

今 $z = \lambda(h/2)$ における単位断面積当たりの垂直応力を σ_i 、剪断応力を τ とすれば、応力増分と相対変位増分の関係は次式により与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_i &= k_{11} \Delta \delta_i + k_{12} \Delta \delta_s \\ \Delta \tau &= k_{21} \Delta \delta_i + k_{22} \Delta \delta_s \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

ここに k_{ij} は剛体要素間を結合するバネのバネ定数である。

$z = \lambda(h/2)$ における単位断面積に仮想仕事の原理を適用し、変位増分に関する 3 次以上の高次項を省略すると、次の増分形仮想仕事方程式が得られる。

$$\begin{aligned} &\Delta \sigma_i \delta (\Delta \delta_i) + \Delta \tau \delta (\Delta \delta_s) + \sigma_i \delta (\Delta \delta_i) \\ &= \Delta P \delta (\Delta v) + \{ P \delta (\Delta v) - \sigma_i \delta (\Delta \delta_i) - \tau \delta (\Delta \delta_s) \} \end{aligned} \quad (39)$$

ここに右辺第 1、2 項は応力増分、第 3 項は初期応力、右辺第 1 項は外力増分 (図 8 において $P = -\sigma a h / 2$)、第 2 項は前段階の不均衡力のなす仮想仕事である。(37) 式、(38) 式を (39) 式に代入すると次の増分形剛性方程式が得られる。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2}(k_{11} + 2k_{12} + k_{22}) & \frac{1}{2}(k_{22} - k_{11}) & -\frac{1}{a}(k_{11} + k_{12})(w - \lambda h) & & & \\ \hline & \frac{1}{2}(k_{11} - 2k_{12} + k_{22}) & \frac{1}{a}(k_{11} - k_{12})(w - \lambda h) & & & \\ \hline & & \frac{2}{a^2} k_{11}(w - \lambda h) & & & \\ \hline & \text{SYM} & & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \Delta P \\ 0 \end{array} \right) + \dots \quad (40-a)$$

$$+ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline & 0 & 0 & & & \\ \hline \text{SYM} & & \frac{\sqrt{2} \sigma_i}{a} & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \Delta P \\ 0 \end{array} \right) + \dots$$

または $[k^{(i)}] \{\Delta u\} = \{\Delta f\} \quad (40-b)$

で表される。(40) 式では不均衡力の項は省略されている。全断面の剛性方程式は、(40) 式の剛性マトリックスに適当な重み w_i を乗じて加え合わせることにより

$$\frac{ah}{\sqrt{2}} (w_{-1} [k^{(-1)}] + w_0 [k^{(0)}] + w_{+1} [k^{(+1)}]) \{\Delta u\} = \{\Delta f\} \quad (41)$$

となる。ここに $w_{-1} = w_{+1} = 1/4$ 、 $w_0 = 1/2$ とした場合は台形則による数値積分に相当し、 $w_{-1} = w_{+1} = 1/6$ 、 $w_0 = 2/3$ とした場合は Simpson 則に相当する。ほかに、積分点の位置を変え、Gauss 積分等によることももちろん可能である。弾性状態におけるバネ定数は、点 M における直歪み ϵ_i と剪断歪み γ を相対変位成分を用いて

$$\Delta \epsilon_i = \Delta \delta_i / (a / \sqrt{2}), \quad \Delta \gamma = 2 \Delta \delta_s / (a / \sqrt{2}) \quad (42)$$

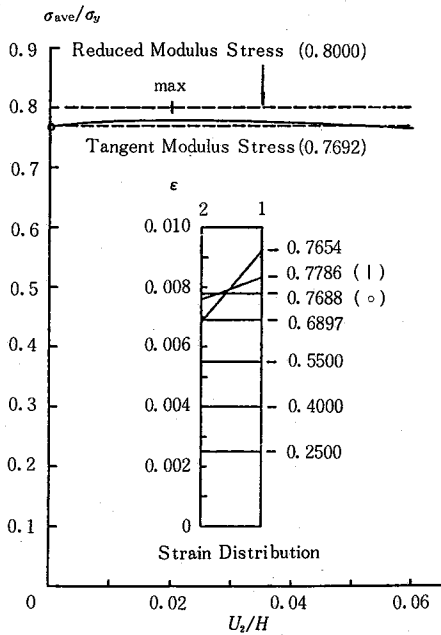


図9 平板の圧縮座屈における計算最大応力と理論座屈応力との比較

と近似し、平面応力問題の構成式に代入することにより

$$\begin{matrix} k_{11} = \sqrt{2}E/a = k_1 & k_{12} = 0 \\ k_{22} = \sqrt{2}E/a = k_2 & k_{21} = 0 \end{matrix} \quad (43)$$

と決定される。ただし、ここでは Poisson 比 ν は零を仮定している。

塑性状態におけるバネ定数は Mises の降伏条件式

$$\bar{\sigma} = f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} = \sigma_p \quad (44)$$

を塑性ポテンシャルとして、塑性流れ則を適用することにより、次式のように定まる。 $(\sigma_p$ は材料の比例限における応力を表す)

$$\left. \begin{matrix} k_{11} = k_1 - 4\sigma^2 k_1^2 / S \\ k_{12} = k_{21} = -12\sigma\tau k_1 k_2 / S \\ k_{22} = k_2 - 36\tau^2 k_2^2 / S \end{matrix} \right\} \quad (45)$$

ここに

$$S = 4\bar{\sigma}^2 H' + 4\sigma^2 k_1 + 36\tau^2 k_2$$

(45)式における H' は歪み硬化係数であり、切線係数 E_t と次の関係にある。

$$H' = E_t E / (E - E_t) \quad (46)$$

切線係数 E_t と相当応力 $\bar{\sigma}$ の関係は、図5に示しているように、比例限 σ_p 以後、降伏応力 σ_y に達する間は

$$E_t/E = -10\bar{\sigma}/(3\sigma_y) + 10/3$$

と表されるものとする。また、除荷の判定基準は

$$\sigma_1 k_1 \Delta\delta + 37k_2 \Delta\delta_s \leq 0 \quad (47)$$

である。

さて以上に述べた定式化に従い、微小な初期撓み $w = w^{(0)}$ を有する平板 ($a=1, E=200, \sigma_y=1, a$: variable) の

塑性座屈挙動のコンピューター・シミュレーションを行い、得られた最高荷重値をこれまでに行われた数種の塑性座屈理論に基づく理論解と比較した。

その結果を図9に示す。

この結果から判断される主要な事項は次の2点である。

(i) $w^{(0)}/a \rightarrow 0$ のとき、数値解は塑性流れ理論に基づいた最も精密な理論解と考えられる Handelman-Prager の解に漸近してゆく。

(ii) 実際の平板の初期撓みと考えられる $w^{(0)}/a = 10^{-3}$ 程度では、Bleich の \sqrt{r} 公式などが比較的本解析結果に近い。なお、本解析においては(41)式の計算に台形則を用いた。

あとがき

著者の提案した剛体-バネモデルを用い、有限回転変位の影響を考慮した理論を組み立ててゆくと、その梁の2要素モデルが塑性座屈理論の明快な解説を与えたチャンネルモデルを含んでいること、またその4要素平板モデルを用いて平板の塑性座屈挙動のシミュレーションが容易に行えることが判った。この研究から数値的に追跡することの困難な非弾性安定問題に対して、剛体-バネモデルの低自由度力学モデルを用いた計算機シミュレーションにより、その現象把握、定性的理解が可能となるものと予想される。

(1983年5月10日受理)

参考文献

- 1) 木原博監修：“塑性設計法” 森北出版 (1960)
- 2) Shanley, F., Weight-Strength Analysis of Aircraft Structures, The Rand Series, McGraw-Hill, 1952
- 3) 山本善之：日本機械学会誌, 60巻, 467号 (1957)
- 4) 吉識雅夫, 藤田 譲, 日本造船学会論文集, 106号 (1959) 163
- 5) 大坪英臣：日本造船学会論文集, 130号 (1971)
- 6) 川井忠彦：日本造船学会論文集, 141号 (1977)
- 7) Washizu K., Variational Method in Elasticity and Plasticity, 2nd Ed., Pergamon Press (1975)
- 8) 山田嘉昭：塑性・粘弾性, コンピュータによる構造工学講座II-2-A (1972)
- 9) Kawai T., Application of New Discrete Models to Analysis of the Structural Stability Problems, proc. of the U.S.-Japan Seminar on Inelastic Instability of Steel Structures and Structural Elements held in Tokyo, May 25-29, 1981
- 10) 川井忠彦：“固体力学諸問題の離散化極限解析” 生研セミナーテキストコース76
- 11) 都井 裕, 川井忠彦：薄肉構造の離散化極限解析 (その3) - 平板剛体要素モデルによる安定問題のシミュレーション -, 日本造船学会論文集第152号 (1982)