

# 周期変動流中の翼面圧力分布に関する研究

## —第2報 平板翼近似—

Pressure Distributions around an Airfoil in Periodically Fluctuating Air Flows

—2nd Report, A Flat Plate Approximation—

吉 識 晴 夫\*・神 川 信 久\*\*・筒 井 康 賢\*\*\*・高 間 信 行\*

Haruo YOSHIKI, Nobuhisa KAMIKAWA, Yasukata TSUTSUI and Nobuyuki TAKAMA

### 1. ま え が き

著者らは前報<sup>1)</sup>で周期変動流中に置かれた単独翼まわりの圧力分布の実験について報告した。本報では、翼型を最も基本的な平板翼と仮定して求めた計算結果と実験結果との比較を行う。

### 2. 平板翼近似による理論解析

単独翼まわりの流れが正弦的に一様変動する場合を、二次元非粘性非圧縮性流体の非回転流で考える。図1の直交座標系で、翼弦中央を座標原点に、翼弦を  $x$  軸に取る。点  $C_0$  は原点から距離  $l$  の風洞上の点 ( $x=l \sin \alpha$ ,  $y=-l \cos \alpha$ )、 $C_1$  は翼上流無限遠点、 $C_2$  は  $C_0$  に対応する上流無限遠点である。なお、後流中の渦は  $x$  軸上を一様流速度で運ばれるものとする。

二次元直角座標での基礎式は次のとおりである。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -(1/\rho) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -(1/\rho) \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

ここに、 $x, y$  は直角座標、 $t$  は時刻、 $u, v$  は  $x, y$  方向速度、 $p$  は圧力、 $\rho$  は密度である。迎え角を  $\alpha$ 、一様流速度を  $U$  とし、擾乱速度  $u', v'$  を導入すると、 $u = U \cos \alpha + u', v = U \sin \alpha + v'$  となる。翼型を平板で近似し、翼面上での境界条件を用いると、翼上下面 ( $-1 \leq x \leq 1$ ) での擾乱速度は、

$$u'_{\pm} = u'(x, y = \pm 0, t) = \pm (1/2) \gamma_a(x, t) \quad (5)$$

$$v'_{\pm} = v'(x, y = \pm 0, t) = -U \sin \alpha \quad (6)$$

となる。ここに、 $U$  は時間平均流速  $U_{\infty}$  と流速の変動振幅  $\delta$ 、変動の角振動数  $\omega$  により、 $U = U_{\infty}(1 + \delta \cos \omega t)$  で与えられる。また、翼面上の渦分布  $\gamma_a$  は準定常渦分布  $\gamma_0$  と後流中の渦により誘起される渦分布  $\gamma_{bw}$  の和とし

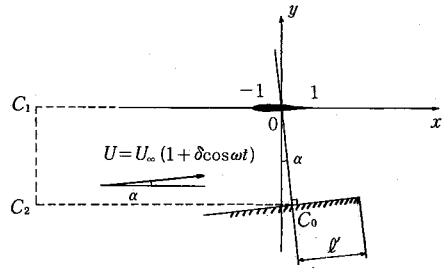


図1 座 標 系

て、 $\gamma_a(x, t) = \gamma_0(x, t) + \gamma_{bw}(x, t)$  で与えられる。また、翼より上流 ( $x \leq -1$ ) の擾乱速度は、平板翼の場合、 $u'(x, y = 0, t) = 0$  となる。

以上より、擾乱速度の2次の項まで考慮すると、翼上下面の圧力  $p_{\pm} = p(x, y = \pm 0, t)$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) は、

$$\begin{aligned} p_{\pm} - p_{c0} = & -\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x U \cos \alpha dx \\ & -\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^x u'_{\pm} dx - \rho U \cos \alpha u'_{\pm} \\ & -\rho U \sin \alpha v'_{\pm} - (1/2) \rho (u'_{\pm}^2 + v'_{\pm}^2) \quad (7) \end{aligned}$$

と求まる。ここに、 $p_{c0}$  は点  $C_0$  における圧力である。(付録参照)

次に、上下面の圧力差と圧力和の形に直すと、

$$\begin{aligned} \Pi = p_- - p_+ = & \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^x \gamma_a(x, t) dx \\ & + \rho U \cos \alpha \gamma_a(x, t) \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{c0} = p_- - p_{c0} + p_+ - p_{c0} = & -2\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x U \cos \alpha dx + \rho U^2 \sin^2 \alpha \\ & - \frac{1}{4} \rho \gamma_a(x, t)^2 \quad (9) \end{aligned}$$

となる。

平板翼と仮定したことから、準定常渦分布  $\gamma_0$  は、

$$\begin{aligned} \gamma_0(x, t) = & 2U \sin \alpha \sqrt{(1-x)/(1+x)}, \\ & (-1 \leq x \leq 1) \quad (10) \end{aligned}$$

で与えられ、後流中の渦により誘起される渦分布  $\gamma_{bw}$  は

\* 東京大学生産技術研究所 第2部

\*\* (株)小松製作所

\*\*\* 通産省機械技術研究所

研究速報

Kármán & Sears<sup>2)</sup>により,

$$\gamma_{bw}(x, t) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_1^\infty \frac{\gamma_w(\xi, t)}{\xi-x} \sqrt{\frac{\xi+1}{\xi-1}} d\xi, \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (11)$$

と与えられる。ここに、 $\gamma_w$  は後流中 ( $1 \leq x$ ) の渦分布で、 $\delta^2$  の項まで考慮すると、

$$\begin{aligned} \gamma_w(x, t) &= \frac{1}{2} \delta^2 \Gamma_s R_e \left\{ \frac{e^{-ikx}}{K_0(ik) + K_1(ik)} \right\} \\ &- \delta \Gamma_s R_e \left\{ \frac{e^{-ikx} e^{i\omega t}}{K_0(ik) + K_1(ik)} \right\} - \frac{1}{2} \delta^2 \Gamma_s \\ &R_e \left\{ \left[ \frac{e^{-ikx}}{K_0(ik) + K_1(ik)} - \frac{e^{-i2kx}}{K_0(i2k) + K_1(i2k)} \right] e^{i2\omega t} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

と求まる。<sup>3)</sup>ここに、 $\Gamma_s = 2\pi U_\infty \sin \alpha$  で、無次元振動数  $k$  は半弦長  $b$  と  $U_\infty, \omega$  により、 $k = \omega b / U_\infty$  と与えられる。 $K_0, K_1$  は 0 次、1 次の第 2 種変形ベッセル関数、 $R_e\{\}$  は実数部、 $i$  は虚数単位を示す。

これ以降は、 $\alpha$  は小さいものとして、 $\cos \alpha \cong 1, \sin \alpha \cong \alpha$  とする。ここで、式(10)~(12)を式(8)、(9)に代入して、 $\delta^3$  以下を省略すると、

$$\begin{aligned} \Pi &= G \sqrt{1-x^2} \delta R_e \{ i k e^{i\omega t} \} \\ &+ G \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left[ \delta R_e \{ [C(k) - 1] e^{i\omega t} \} \right. \\ &+ \left. \frac{\delta^2}{2} R_e \{ [2C(k) - C(2k) - 1] e^{i\omega t} \} \right] \\ &+ G \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left[ 1 + \frac{\delta^2}{2} + 2\delta R_e \{ e^{i\omega t} \} \right. \\ &+ \left. (\delta^2/2) R_e \{ e^{i2\omega t} \} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} K_{co} &= -\frac{G}{\alpha} x \delta R_e \{ i k e^{i\omega t} \} \\ &+ G \alpha \frac{x}{1+x} \left[ 1 + \frac{\delta^2}{2} + 2\delta R_e \{ e^{i\omega t} \} \right. \\ &+ \left. \frac{\delta^2}{2} R_e \{ e^{i2\omega t} \} \right] + G \alpha \frac{1-x}{1+x} \left[ \delta R_e \{ B \} \right. \\ &+ \left. \delta^2 R_e \{ C \} - \frac{\delta^2}{2} R_e \{ D \} - \frac{\delta^2}{2} R_e \{ B \}^2 \right] \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ここに、

$$\begin{aligned} C(k) &= K_1(ik) / K(ik), \\ R_e\{B\} &= R_e \{ I e^{i\omega t} / K(ik) \}, \\ R_e\{C\} &= R_e \{ I e^{i2\omega t} / K(ik) \}, \\ R_e\{D\} &= R_e \{ I e^{i2\omega t} / K(i2k) \}, \\ G &= \rho U_\infty \Gamma_s / \pi, \end{aligned}$$

$$I = \int_1^\infty \{ e^{-ik\xi} / (\xi-x) \} \sqrt{(\xi+1)/(\xi-1)} d\xi,$$

$$K(iz) = K_0(iz) + K_1(iz)$$

で、 $C(k)$  は Theodorsen 関数<sup>4)</sup>である。

圧力を大気圧  $p_a$  との差で考えると、

$$K_a = p_- - p_a + p_+ - p_a = K_{co} + 2\rho l' \partial U / \partial t \quad (15)$$

となる。ここに、 $l'$  は点  $C_0$  から風洞出口までの距離である。式(13)~(15)で  $\Pi$  と  $K_a$  が求まれば、翼面上の圧力は、

$$p_\pm - p_a = (K_a \mp \Pi) / 2 \quad (16)$$

と求まり、圧力係数  $C_{P\pm}$  は、

$$C_{P\pm} = (p_\pm - p_a) / (\rho U_\infty^2 / 2) \quad (17)$$

と与えられる。また、式(13)を翼面上で積分すれば、翼に働く揚力を求めることができる。

### 3. 実験結果との比較検討

計算では翼の位置を  $-1 \leq x \leq 1$  としたが、実験との比較では翼弦長  $c$  を用い、 $0 \leq x/c \leq 1$  と表示する。また、式(15)の計算では管端補正を行い、 $l' = 258\text{mm}$  とした。式(13)、(14)より、 $\delta$  の比較的小さい範囲では、2 次の周波数成分は小さくなるので、前報同様に時間平均値と基本周波数成分について考察を行う。前報の実験条件を表 1 に示す。表中の記号は以下の図に用いた記号である。

#### 3.1 時間平均圧力

時間平均圧力  $C_P$  の分布を図 2 に示す。(a)は  $\alpha = 0^\circ$ 、(b)は  $\alpha = 5^\circ$ 、(c)は  $\alpha = 7^\circ$  で、記号は実験値を、実線は  $\delta = 0.1, k = 0.1 \sim 0.6$  の計算値を示す。式(13)、(14)より明らかな様に、計算では  $k$  は影響せず、 $\delta^2/2$  の項を無視すれば定常流の値と一致する。また、計算は  $\delta = 0.1$  としたが、実験範囲の  $\delta = 0.1 \sim 0.2$  では  $C_P$  は約 2% の差しかないで、この計算値と実験値を比較しても妥当である。なお、(a)の計算では  $\alpha = 0.1^\circ$  としたため、実線が 2 本となっている。これらの図より、吸込側の  $C_P$  は実験と計算で比較的良く一致しているが、 $\alpha = 0^\circ$  と圧力側では不一致が大きい。これは、平板翼近似では翼厚効果を考慮できないためと思われる。

#### 3.2 圧力振幅

前報と同様に、基本周波数成分の変動振幅  $| \Delta C_{P1} |$  を流速の変動振幅比  $\delta$  で割った値の分布を図 3 に示す。(a)は  $\alpha = 0^\circ$ 、(b)は  $\alpha = 7^\circ$  の圧力側、(c)は  $\alpha = 7^\circ$  の吸込側で、記号は実験を、実線は前図と同じ条件の計算を示す。(a)の計算は  $\alpha = 0.1^\circ$  の吸込側を示す。式(13)、(14)で分かるように、計算では  $\delta$  の影響はない。また、 $\alpha$  の影響は吸込側の前縁付近を除くと比較的小さいことが分かった。 $k$  が大きくなると、全体に振幅は大きくなるが、これは前 2 式の右辺第 1 項、すなわち、いわゆる付加質量の

表 1 実験条件

Symbol	○	÷	△	×	◇	⊕
$k$	0.5	0.4	0.3	0.2	0.2	0.2
$\delta$	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1	0.1

研究速報

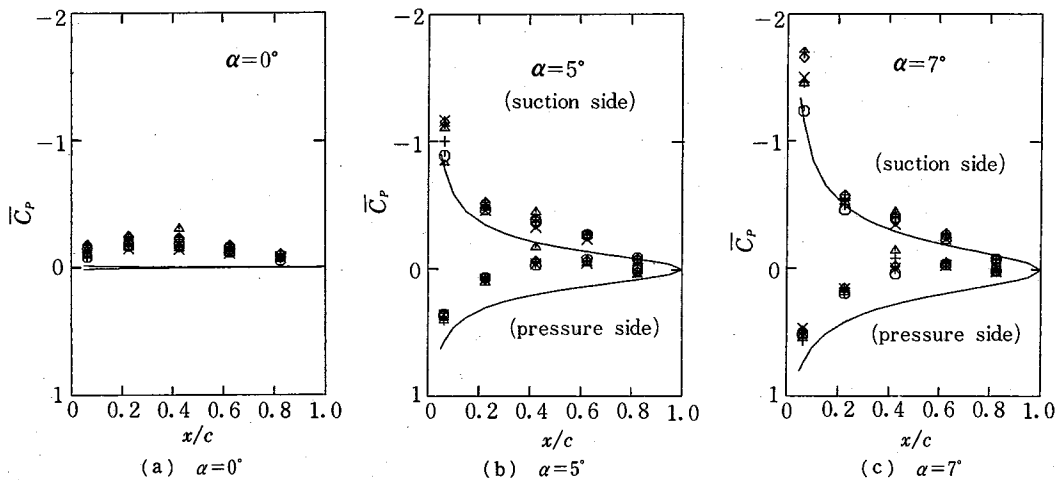


图2 時間平均压力分布

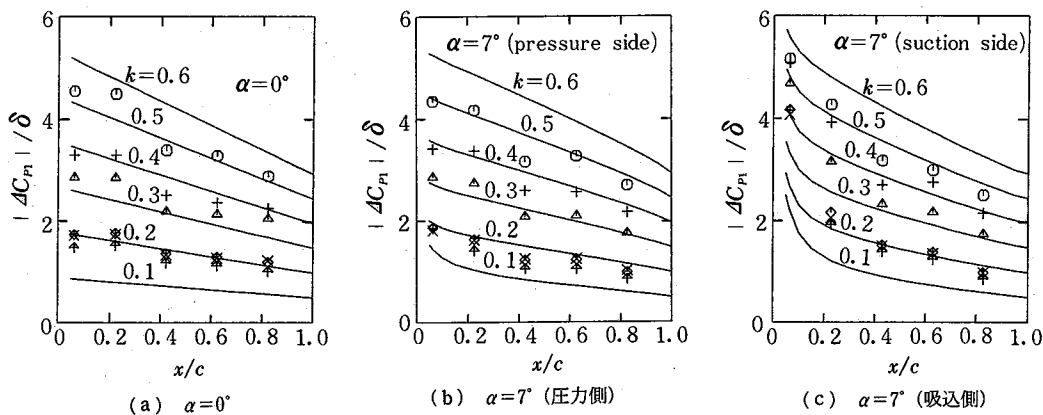


图3 压力振幅分布

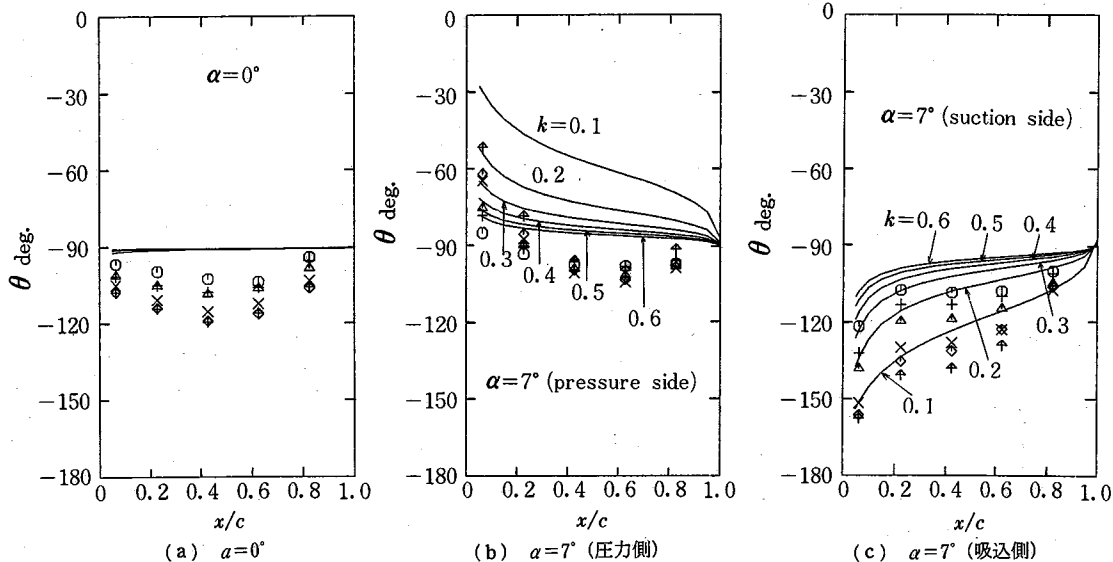


图4 位相差分布

効果が支配的になることを示している。図より、吸込側の前縁近くを除くと、実験と計算は比較的良く一致していることが分かる。また、前縁近くの振幅が吸込側で急激に大きくなる傾向は計算でも示されている。

3.3 圧力変動の流速変動に対する位相差

前報と同様に位相差  $\theta$  を定義し、 $-180^\circ \sim 180^\circ$  の間で求めると図 4 となる。実験条件、計算条件とも図 3 と同一である。実験は、減速域では位相進みが小さくなる傾向にあり、増速域では位相進みが大きくなる傾向にあることを示している。一方、平板翼の計算は  $\alpha = 0^\circ$  と圧力側で、実験結果の上記傾向を定性的に示していない。これは、翼厚分布を考慮できないためと考えられる。ただし、吸込側では  $k$  の増大と共に位相進みが小さくなり、後縁に向って位相進みが小さくなる傾向は、実験と定性的に合っている。なお、計算では  $\delta$  の影響はほとんどなく、 $\delta = 0.1$  の計算と実験を比較しても構わない。また、計算では  $k$  の増大と共に圧力側、吸込側共に  $\theta = -90^\circ$  の一様分布に近付く傾向、すなわち、付加質量の効果が支配的になることを示している。

4. む す び

流速が正弦的に一様変動する流れ場に置かれた単独翼まわりの圧力分布を、平板翼近似の計算で求め、前報の実験結果と比較した。その結果、圧力振幅は平板翼近似により実験結果をかなり良く推定できるが、圧力側の時間平均圧力と位相差については、翼厚を考慮しないため、やや定性的に不十分であることが明らかとなった。

[付 録]

式(4)を用い、式(2)を  $x$  に関し積分すると、

$$p = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^x u dx - \frac{1}{2} \rho [u^2 + v^2]_{-\infty}^x + C(y, t) \tag{a}$$

式(4)を用い、式(3)を  $y$  に関し積分すると、

$$p = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^y v dy - \frac{1}{2} \rho [u^2 + v^2]_0^y + C'(x, t) \tag{b}$$

となる。式(a)より、 $p(x = -\infty, y, t) = C(y, t)$  であるから、点  $C_1$  の圧力  $p_{c1}$  と点  $C_2$  の圧力  $p_{c2}$  は、

$$\begin{aligned} p_{c1} &= p(x = -\infty, y = 0, t) = C(y = 0, t) \\ p_{c2} &= p(x = -\infty, y = -l \cos \alpha, t) \\ &= C(y = -l \cos \alpha, t) \end{aligned}$$

となる。一方、式(b)より、

$$\begin{aligned} p_{c1} &= C'(x = -\infty, t) \\ p_{c2} &= -\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{-l \cos \alpha} v(x = -\infty, y, t) dy \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho [u(x = -\infty, y, t)^2 \\ &\quad + v(x = -\infty, y, t)^2]_0^{-l \cos \alpha} \end{aligned}$$

$$+ C'(x = -\infty, t)$$

となる。また、式(a)より、翼面上 ( $-1 \leq x \leq 1$ ) の圧力は、

$$\begin{aligned} p_{\pm} &= -\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^x u(x, y = \pm 0, t) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho [u(x, y = \pm 0, t)^2]_{-\infty}^x + v(x, y = \pm 0, t)^2 \\ &\quad + C(y = \pm 0, t) \end{aligned}$$

風洞上の点  $C_0$  の圧力は、

$$\begin{aligned} p_{c0} &= -\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{l \sin \alpha} u(x, y = -l \cos \alpha, t) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho [u(x, y = -l \cos \alpha, t)^2 \\ &\quad + v(x, y = -l \cos \alpha, t)^2]_{-\infty}^{l \sin \alpha} \\ &\quad + C(y = -l \cos \alpha, t) \end{aligned}$$

となる。翼面上の流速を形式的に、 $u_{\pm} = u(x, y = \pm 0, t)$ 、 $v_{\pm} = v(x, y = \pm 0, t)$  と書くと、

$$\begin{aligned} p_{\pm} - p_{c0} &= -\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{-1} u(x, y = 0, t) dx \\ &\quad - \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^x u_{\pm} dx \\ &\quad + \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{l \sin \alpha} u(x, y = -l \cos \alpha, t) dx \\ &\quad + \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{-l \cos \alpha} v(x = -\infty, y, t) dy \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho [u_{\pm}^2 + v_{\pm}^2] + \frac{1}{2} \rho [u(x = l \sin \alpha, \\ &\quad y = -l \cos \alpha, t)^2 \\ &\quad + v(x = l \sin \alpha, y = -l \cos \alpha, t)^2] \end{aligned}$$

となる。ここで、 $l$  が十分に大きいとすると、 $u(x, y = -l \cos \alpha, t) = U \cos \alpha$ 、 $v(x, y = -l \cos \alpha, t) = U \sin \alpha$  と近似でき、また、 $v(x = -\infty, y, t) = U \sin \alpha$  と考えられる。ここで擾乱速度  $u'$ 、 $v'$  を導入すると、

$$\begin{aligned} u_{\pm} &= U \cos \alpha + u'(x, y = \pm 0, t) = U \cos \alpha + u'_{\pm} \\ v_{\pm} &= U \sin \alpha + v'(x, y = \pm 0, t) = U \sin \alpha + v'_{\pm} \end{aligned}$$

と書ける。平板翼の場合は、翼上流 ( $x \leq -1$ ) では  $u(x, y = 0, t) = U \cos \alpha$  であるから、

$$\begin{aligned} p_{\pm} - p_{c0} &= -\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x U \cos \alpha dx \\ &\quad - \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^x u'_{\pm} dx - \rho U \cos \alpha u'_{\pm} \\ &\quad - \rho U \sin \alpha v'_{\pm} - \frac{1}{2} \rho [u'^2_{\pm} + v'^2_{\pm}] \end{aligned}$$

となり、式(7)が得られる。(1983年4月28日受理)

参 考 文 献

- 1) 吉識, 高間: 生産研究, 35-5 (昭58)
- 2) von Kármán, T. & Sears, W. R.: J. A. S., 5-10 (1938)
- 3) 筒井: 機論, 770-5 (昭52)
- 4) Theodorsen, T.: NACA, Rep. 496 (1935)