研究速報
UDC 621.92.01：539.219.2.01：536.21.01

クリープフィード研削時に生じる残留応力の解析（第1報）
——非定常熱伝導問題の境界要素解析——

Analysis of Residual Stress During Creep Feed Grinding (1st Report)
——Boundary Element Analysis of Unsteady Heat Transfer Problems——

谷　泰弘*・仙波卓弥*・佐藤壽芳*
Yosuhiro TANI, Takuya SEMBA and Hisayoshi SATO

1. 緒　　言

研削加工時においては，組織変化に伴う体積変化やバニシ効果ならびに熱変形の相互作用により加工面に残留応力が生成される.[1] 特に，高能率研削の一つとして近年注目を浴びているクリープフィールド研削では，高切込みおよび低送り速度のために，研削焼けや割れが生じかすく，加工変質層が非常に大きな問題となっている．この研削時残留応力を解明しようとする理論的研究は従来から盛んに行われているが，[2),3)] それらは解析範囲を工作物表層の研削干渉領域に限定したきわめて微視的なものであり，数値計算上での熱境界は必ずしも実際のそれとは一致していないのが現状である．

本報告では，研削により生じる熱応力を数値解析する基礎として，非定常熱伝導問題を境界要素（BEM）解析し，実際問題への適用の可否についての検討を試みる．すなわち，厳密解との比較により，工学上許容される程度の近似解を得るために必要とされる数値積分法についての考察を行う．

2. 基礎方程式

時間依存性を有する支配方程式は，ラプラス変換等の変換法もしくは基本解を直接時間積分する直接法のいずれかの手法により離散化することが可能である.[4)] ここでは，時間差分に際し比較的粗い時間刻みの選択が可能であるとされているBrebbiaの直接解法[5)]に従い，境界要素型平衡方程式を誘導する．

内部発熱による熱の移動を無視すると，二次元等方性体に対し非定常熱伝導方程式は

$$\partial u/\partial t = K\nabla^2 u, \quad K = k/\rho C \tag{1}$$

と与えられる．ただし，kは熱伝導率，ρは比重，Cは比熱である．また，温度指定境界Γ_1，熱流束指定境界をΓ_2，対流境界をΓ_3とすると，境界条件は，

$$\left.\begin{aligned} &u=\bar{u} \;;\; on \;\; \Gamma_1 \\ &q=\partial u/\partial n=\bar{q}/k \;;\; on \;\; \Gamma_2 \\ &q=\alpha(U_\infty - U)/k=\bar{\bar{q}}/k \;;\; on \;\; \Gamma_3 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

と表される．ここに，αは熱伝達率，U_∞はΓ_3と接する環境の温度である．支配方程式(1)に対応する境界積分方程式は，たとえば式(1)を重み付き残差法により数値積分することにより，

$$c^i u^i + K\int_0^t \int_\Gamma u q^* d\Gamma d\tau = K\int_0^t \int_\Gamma q u^* d\Gamma d\tau + \left[\int_\Omega u u^* d\Omega\right]_{\tau=0} \tag{3}$$

と導かれる.[5)] ここに，c^iは定点iを含む境界の幾何学的形状により決定される積分定数，u^*は基本解関数，q^*は$\partial u^*/\partial n$であり，二次元問題に対しては，

$$\left.\begin{aligned} &u^* = 1/4\pi K(t-\tau)\cdot\exp\{-r^2/4K(t-\tau)\} \\ &q^* = \partial u^*/\partial n = -l/8\pi K^2(t-\tau)^2\cdot\exp\{-r^2/4K(t-\tau)\} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

と与えられている．ただし，lは定点iから動点jまでの法線距離である．いま，微小な時間間隔内においてuおよびqの値はほとんど変化しないものと考えれば，式(3)は，

$$c^i u^i + K\int_\Gamma u \int_0^t q^* d\tau d\Gamma = K\int_\Gamma q \int_0^t u^* d\tau d\Gamma + \left[\int_\Omega u u^* d\Omega\right]_{\tau=0} \tag{5}$$

と書き替えることができる．式(5)の時間積分項は容易に数値積分され，

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^t q^* d\tau = -l/2\pi K r^2\cdot\exp(-r^2/4K\Delta t) \\ &\int_0^t u^* d\tau = 1/4\pi K\cdot\int_a^\infty 1/x\cdot\exp(-x)dx \\ &\qquad = E_i(a)/4\pi K, \quad a=1/4K\Delta t \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

と表される．ただし，$E_i(a)$は指数積分関数である．式(6)を式(5)に代入すると，式(5)は，

$$c^i u^i - 1/2\pi\cdot\int_\Gamma lu/r^2\cdot\exp(-r^2/4K\Delta t)d\Gamma = 1/4\pi\cdot\int_\Gamma q E_i(a) d\Gamma + 1/4\pi K\Delta t\cdot\left[\int_\Omega u\exp(-r^2/4K\Delta t)d\Omega\right]_{\tau=0} \tag{7}$$

と変形される．式(2)に示した境界条件を考慮すると，式(7)は，

$$c^i u^i - 1/2\pi\cdot\int_\Gamma lu/r^2\cdot\exp(-r^2/4K\Delta t)d\Gamma$$

* 東京大学生産技術研究所　第2部

$$=1/4\pi\cdot\int_{\Gamma_1} qE_i(a)d\Gamma$$
$$+1/4\pi k\int_{\Gamma_2}\tilde{q}E_i(a)d\Gamma+1/4\pi k\int_{\Gamma_3}\tilde{\tilde{q}}E_i(a)d\Gamma$$
$$+1/4\pi K\Delta t\left[\int_{\Omega}u\exp(-r^2/4K\Delta t)d\Omega\right]_{\tau=0} \tag{8}$$

となる．ここに，$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$ である．いま，要素内で u ならびに q が一定であると考え，式（8）を一定要素を用いて離散化すると，たとえば式（8）の左辺第2項は，

$$1/2\pi\cdot\int_{\Gamma}lu/r^2\cdot\exp(-r^2/4K\Delta t)d\Gamma$$
$$=1/2\pi\cdot\sum_{j=1}^{N}\int_{-1}^{1}lu_j/r^2\cdot\exp(-r^2/4K\Delta t)|J|d\xi \tag{9}$$

となる．ここに，N は境界 $\Gamma(\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ のうちのいずれか）に属する要素の総数，$|J|$ はヤコビアンである．式（8）の右辺等1項〜第3項も同様に離散化される．また，式（8）の右辺第4項は，たとえば領域 Ω を線形な四角形要素を用いて分割したとすれば，

$$1/4\pi K\Delta t\cdot\left[\int_{\Omega}u\exp(-r^2/4K\Delta t)d\Omega\right]_{\tau=0}$$
$$=1/4\pi K\Delta t\cdot\sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{4}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\phi_l\exp(-r^2/4K\Delta t)$$
$$\times|J|d\xi_1 d\xi_2 u^j_{\tau=0} \tag{10}$$

と離散化される．ただし，M は領域要素の総数を表す．

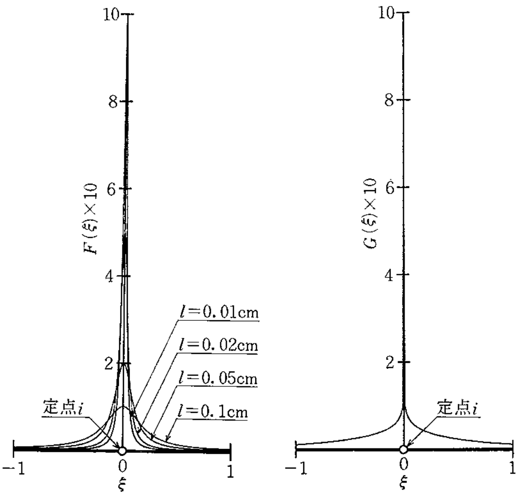
いま被積分関数を

$$F(\xi)=l(\xi)/r^2(\xi)\cdot\exp\{-r^2(\xi)/4K\Delta t\},$$
$$G(\xi)=E_i\{a(\xi)\} \tag{11}$$

とし，定点 i を含む要素上での $F(\xi)$ ならびに $G(\xi)$ の変化を図示すると，それぞれ図1（a），（b）に示すとおりとなる（$K=1/4$, $\Delta t=1$ の場合）．すなわち，いずれの被積分関数も定点近傍で特異性を有している．したがって，たとえば式（9）の数値積分に低次のGauss積分を用いると，定点近傍における関数値の急激な変化を無視した結果に陥る．そこで，岡本ら[6]と同様 $r\leqq l_c$ の範囲にある動点 j を含む要素に関しては，二重指数関数型の積分公式[7]を用いることとする．すなわち，$F(\xi)$ の積分を I とすると，I を

$$I=\int_{-1}^{1}F(\xi)|J|d\xi$$
$$\approx h|J|/2\pi\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}F\{\tan h(\pi/2\cdot\sin hnh)\}$$
$$\times\cos hnh/\cos^2(\pi/2\cdot\sin hnh),\quad r\leqq l_c \tag{12}$$

と近似する．ここに h は刻み幅，l_c は定点 i から動点 j までの距離を表す．一方，上記の特異積分を $r\leqq l_c$ の範囲についてのみだけでなく，$r>l_c$，すなわち全要素についても適用することは演算時間上得策ではない．そこで，$r>l_c$ の範囲にある動点を含む要素に関しては高次のGauss積分を用いることとする．すなわち，I を



（a）$F(\xi)$ の変化特性　　（b）$G(\xi)$ の変化特性

図1　定点を含む要素上での被積分関数の変化

$$I=\int_{-1}^{1}F(\xi)|J|d\xi\approx\sum_{j=1}^{n}F(\xi_j)|J|w_j,\ r>l_c \tag{13}$$

と近似する．ただし，n は選点の数，w_j は重み係数である．上記の数値積分を $G(\xi)$ についても行い整理すると，式（8）より，

$$c^i u^j+\sum_{j=1}^{E}H_{ij}'u_j=\sum_{j=1}^{E}G_{ij}q_j+P_i \tag{14}$$

なる境界要素型の平衡方程式を得る．ここに E は境界要素の総数を表す．また，積分定数 C_i は剛体変位条件[8]より決定される．すなわち，一様な初期温度（$\boldsymbol{U}_{\tau=0}=1\cdot\boldsymbol{I}$）を有する対象の境界に，一様な温度（$\boldsymbol{U}=1\cdot\boldsymbol{I}$）が付加された場合に生じる温度勾配 $\boldsymbol{q}$ は0であることから，

$$c^i=-\sum_{j=1}^{E}H_{ij}'+P_i \tag{15}$$

と決定される．いま，c^i+H_{ii}' を新たに H_{ii} とおけば，式(14)は

$$\sum_{j=1}^{E}H_{ij}U_j=\sum_{j=1}^{E}G_{ij}q_j+P_i \tag{16}$$

となる．したがって，式(16)を全境界要素について足し合わされることにより，全体の平衡方程式を得ることができる．式（8）から明らかなように，初期温度（温度履歴）は式（8）の右辺第4項に含まれているのみであり，H_{ij} ならびに G_{ij} の値は解析過程下において変化しない．したがって，最適時間刻みを Δt_{opt} とすれば Δt_{opt} は解析前に前もって決定することができる．ここでは，中桐[9]と同様，固有値計算により求めた P 条件数[10]が最小となるよう Δt_{opt} を決定することとした．

3．解析結果と理論解との比較

解析対象の形状が単純でしかも境界条件が簡単な，きわめて特殊な場合については，式（1）を直接数値積分す

ることにより理論解を得ることが可能である．ここでは，解析法の検証として図2に示す矩形板を例にとり，理論解とBEM解との比較を行う．ただし，解析対象は鉄($c<0.5\%$)とし，$k=0.116$(cal/cms°c)，$\rho=7.86$(g/cm^3)，$c=0.107$(cal/g°c)としている．

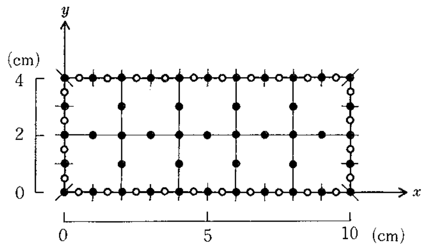


図2　要素分割例（境界要素数=28，領域要素数=10）

3.1　境界で温度が与えられた場合

初期温度が0(°C)に保たれた半無限体の一端($x=0$)の温度が$t=0$で瞬間的にU_0(100°C)まで上げられ，その後U_0が一定に保たれた場合，物体内の温度は

$$u(x,t)U_0\{1-\mathrm{erf}(x/\sqrt{Kt})\} \tag{17}$$

で与えられる.[11] ここに，$\mathrm{erf}(x/\sqrt{Kt})$は，Gaussの誤差関数である．上記の問題を，まずBrebbiaと同様.[5] 一定要素・Gauss 6点積分を用いて境界要素解析すると，図3に白丸で示す結果を得る．縦軸は温度，横軸は時間，パラメータは温度指定境界($x=0$)からの距離を表す．比較のため，理論解を実線で同図に付記している．ただし，内部領域の分割には四角形線形要素を使用した．また，この問題に対し，P条件数の変化特性は図4の白丸に示すとおりとなることから，Δt_{opt}は5(s)とした．

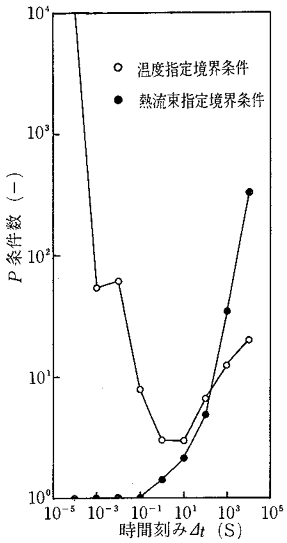


図4　時間刻みΔtとP条件数との関係

図3に白丸で示した結果からも明らかなように，BEMより得られた温度分布は理論解に比べ高めであり，良い一致は得られていない．この不一致の原因の一つにまず積分精度を挙げることができる．そこで，他の条件は先とまったく同様とし，$r\leqq l_c=0.5$(cm)すなわち定点を含む要素に関してのみ特異積分を行うと，図3に角で示す結果を得る．同図に白丸で示されている結果と比較すると，わずかに理論解に接近した結果は得られているようであるが，本質的な改善とは成り得ていない．

そこで次に，領域要素の変位関数を線形から非線形(2次関数)へ変化させた．すなわち，式(4)からも明らかなように基本解で与えられる温度は，領域内で指数関数的に変化するものである点に留意し，領域内の温度変化を非線形に内挿することとした．この場合に得られたBEM結果を図3に黒丸で示した．領域内の温度変化を線形に近似した場合と比べると，極めて理論解に接近した結果が得られている．

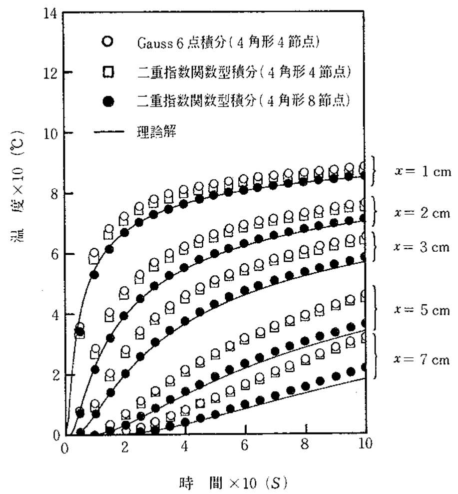


図3　BEM解と理論解との比較

したがって，境界積分に際しては少なくとも定点を含む要素に対し特異積分を行うこと，ならびに，面積積分に際しては高次の変位関数を用いることにより工学上有意義な解が得られるものと考えられる．ただし，この対象に限定すれば，単にGauss積分の次数を上げることのみによっても図3に黒丸で示した結果と同等あるいはそれ以上に理論解に接近した結果を得ることは可能である．しかしながら，寸法の異なる境界要素が混在する問題に，Gauss積分を単独で用いることは積分精度上好ましくない．以下，特異積分とGauss積分とを併用した場合についてBEM解と理論解との比較を行う．

3.2　境界で熱流束が与えられた場合

初期温度が0(°C)に保たれた半無限体の一端($x=0$)

研究速報

に，一定熱流束 q_0(1 cal/cm²s)が $t=0$ で瞬間的に付加され，その後 q_0 が一定に保たれた場合，物体内の温度 $u(x, t)$ は

$$u(x,t)=2q_0\sqrt{Kt/\pi}/k\cdot\exp(-x^2/4Kt)-q_0x/k\cdot\{1-\mathrm{erf}(x/2\sqrt{Kt})\} \quad (18)$$

で与えられる.[11] 上記の問題を境界要素解析し，式(18)との比較を行うと，図5に黒丸で示す結果を得る．縦軸は温度，横軸は時間，パラメータは熱流束指定境界($x=0$)からの距離を表す．ただし，この問題に対し P 条件数の変化特性は図4に黒丸で示すとおりとなることから Δt_{opt} は 1 (s) とした．

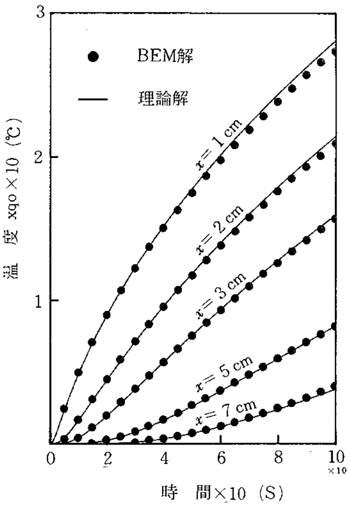


図5　BEM解と理論解との比較

図5に示したように，理論解と極めて良く一致した結果が得られている．これは，x 軸方向の温度変化が指数変化にしては比較的ゆるやかであり，2次の変位関数で十分その変化を追求し得たことに起因する．

3.3　境界で対流熱流束が与えられた場合

初期温度が0(℃)に保たれた半無限体の一端 ($x=0$) に，一定対流熱流束 $\alpha(U_\infty - U)$ が $t=0$ で瞬間的に付加され，その後 U_∞(100℃)が一定に保たれた場合，物体内の温度 $u(x, t)$ は，

$$\left.\begin{aligned} u(x,t)&=U^\infty[1-\mathrm{erf}(\chi)-\{\exp(dx/k+\alpha^2Kt/k^2)\}\\ &\quad\times\{1-\mathrm{erf}(\chi+\alpha\sqrt{Kt}/k)\}],\\ \chi&=x/2\sqrt{Kt}\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

と与えられる.[11] ここでは強制対流を想定し α を0.01 (cal/cm²s°c) とし，BEM解と理計解との比較を試みた．ただし，(3.2) の場合と比較して解くべき係数マトリックスの値はまったく同一であることから，Δt_{opt} は 1(s) としている．

図6にBEM解と理論解との比較を図示した．縦軸は温度，横軸は時間を表す．パラメータには熱流束流入境界からの距離を用いている．図5に示した結果と同様の理由により，良い近似の得られていることが判る．

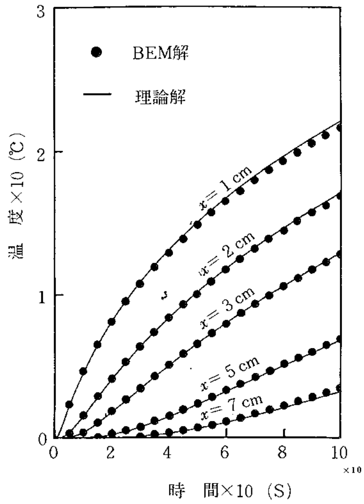


図6　BEM解と理論解との比較

4. 結　言

研削により生じる境界条件の変化（体積変化）に留意すると，現実の研削過程下における熱の移動は極めて複雑であり，本来理論解析の及ぶ現象とは考えられない．一方，研削により発生する熱量を移動熱流束に置換し，より実際に近い境界条件を設定し得たとすれば，熱分布の概要を把握することは可能であると思われた．

本報告では，上記の現象を境界要素解析する基礎として，理論解とBEM解との比較を行い，数値積分に際し考慮すべき点についての考察を試みた．その結果，境界積分に関しては少なくとも定点を含む要素に関し特異積分を行うこと，ならびに，領域要素については高次の変位関数を使用する必要があること，の2点が明らかとなった．

(1983年3月28日受理)

参考文献

1) 米谷；残留応力の発生と対策，養賢堂，(1981)
2) 江田ほか2名，精密機械，45, 11,（1979）67
3) 江田ほか2名；精密機械，47, 3,（1981）50
4) 鷲津ほか2名；境界要素法一基礎と応用，丸善，(1982)
5) C. A. Brebbia, L. C. Wrobel; Recent Advances in Numerical Methods in Fluids, Swansea, (1979) 1
6) 岡本ほか3名；日本機械学会講演論文集, 830-1, (1983) 4
7) 森；数値積分，情報処理センター，(1981)
8) C. A. Brebbia; The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, (1978).
9) 中桐；たとえば第22回生研講習会テキスト，生産技術研究奨励会，(1983) 29
10) 戸川；マトリックスの数値計算，オーム社 (1971)
11) J. P. Holman; Heat Transfer, McGraw-Hill, (1976)