UDC 531.232.01

不連続体力学のすすめ（その4）
—“剛体-バネ”モデルによる有限回転変位問題の解析—

Development of Discontinuous Mechanics (IV)

—Analysis of the finite rotation problems in solid mechanics—

川　井　忠　彦*
Tadahiko KAWAI

固体の載荷の極限状態における変形や応力分布の実用的解析法を確立するために“剛体-バネ”モデルと称する新離散化モデルを提案したが，その場合要素の回転変位は微小であるという仮定に立脚して理論が展開されてきた．本小論は有限回転変位の場合まで適用し得るようにこれまでの理論の拡張を試みたので，その概要を報告する．

1．有限回転変位を受ける剛体変位関数

本解説（その2）で説明したように“剛体-バネ”モデルとは図1に示すような任意形状の3次元剛体ブロックを，その接触面上に分布させた2種類のバネ，すなわち接触面の法線方向の相対変位と接線方向の相対変位にもとづいて反力を発生するバネ系で連結されたモデルである.[1)]

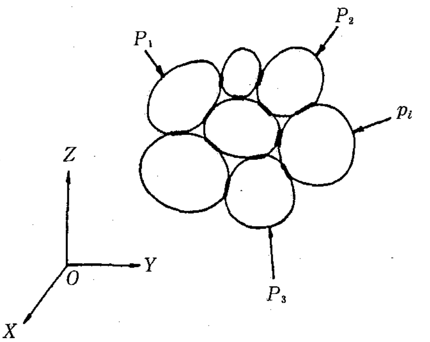


図1　3次元剛体要素の集合モデル

そして，このバネ系に適当な応力-歪みの関係式，たとえば完全弾塑性や Mohr-Coulomb の関係式を導入すれば，従来の有限要素法の標準的手法に従って，その剛性方程式が導かれるのである．

図2に示すような2つの相隣る3次元“剛体-バネ”モデルを考え，有限角変位を伴う変形を受ける場合の変位場を考える．

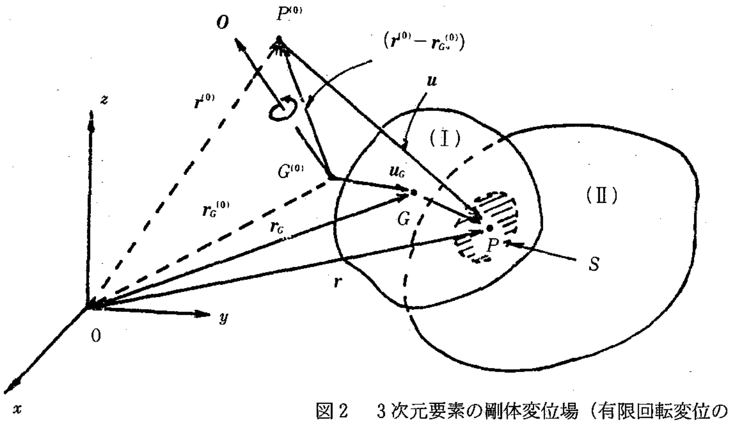
まず剛体要素が並進変位 $\boldsymbol{u}_G(u_g, v_g, w_g)$ と有限角変位 (θ, ϕ, χ) を行った後の要素内の任意の点の変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ の表示式を求めてみよう．

変位前の剛体要素内の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}^{(0)}$ とすれば

$$\boldsymbol{r}^{(0)}=\boldsymbol{r}_G^{(0)}+(\boldsymbol{r}^{(0)}-\boldsymbol{r}_G^{(0)})=\boldsymbol{r}_G^{(0)}+\boldsymbol{\rho} \tag{1}$$

ここに　$\boldsymbol{r}_G^{(0)}$：重心点の位置ベクトル（肩付の(0)は変位前を表す）

また　$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}^{(0)}-\boldsymbol{r}_G^{(0)}$ は重心点に関する固体内の任意点の位置ベクトルで，固体が剛体であれば変位の前後で変化しない．さて変位後の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は一般に次式のごとく与えられる．



$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^{(0)}+\boldsymbol{u}$
$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_G+(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\rho}$
S：接触面
肩つきの(0)は変形前の状態を表し，
下つきの0は図心を示す
$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}^{(0)}-\boldsymbol{r}_G^{(0)}$ は位置ベクトル（重心原点）
$\boldsymbol{T}$ は剛体固定座標系と基準座標系の間の座標変換マトリックス

図2　3次元要素の剛体変位場（有限回転変位の場合）

* 東京大学生産技術研究所　第2部

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_G+\boldsymbol{T}\boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{r}_G=\boldsymbol{r}_G^{(0)}+\boldsymbol{u}_G \\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^{(0)}+\boldsymbol{u} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

ここに $\boldsymbol{T}$ は要素重心に固定した座標系が基準座標系に対して角変位 (θ, ϕ, χ) を行った後の (3×3) の座標変換マトリックスを表わす．また $\boldsymbol{u}_G$ および $\boldsymbol{u}$ は重心ならびに任意の点の変位ベクトルを表す．従って

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^{(0)}=(\boldsymbol{r}_G-\boldsymbol{r}_G^{(0)})+\boldsymbol{T}\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_G+(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\rho} \qquad (3)$$

今要素重心に固定した座標系が x 軸，y 軸，そして z 軸のまわりに θ，ϕ，χ だけ回転した場合，もとの座標系との間の座標変換マトリックス $\boldsymbol{T}$ は一般に座標軸の回転順序に依存し異なった表示式を与える．

すなわち剛体の力学でよく用いられるEulerの角表示を用いてこの座標変換マトリックス $\boldsymbol{T}$ は図3を参考にして次式のごとく与えられる．[2)]

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y,z)=u_0+l_\xi x+l_\eta y+l_\zeta z-x \\ v(x,y,z)=v_0+m_\xi x+m_\eta y+m_\zeta z-y \\ w(x,y,z)=w_0+n_\xi x+n_\eta y+n_\zeta z-z \\ \text{ここに}\quad l_\xi=\cos\Theta\cos\Phi\cos\Psi \\ \qquad l_\eta=-\cos\Theta\cos\Phi\sin\Psi \\ \qquad\qquad +\sin\Phi\cos\Psi \\ \qquad l_\zeta=\sin\Theta\cos\Phi \\ \qquad m_\xi=\cos\Theta\sin\Phi\cos\Psi \\ \qquad\qquad +\cos\Phi\sin\Psi \\ \qquad m_\eta=-\cos\Theta\sin\Phi\sin\Psi \\ \qquad\qquad +\cos\Phi\cos\Psi \\ \qquad m_\zeta=\sin\Theta\sin\Phi \\ \qquad n_\xi=-\sin\Theta\cos\Psi \\ \qquad n_\eta=\sin\Theta\sin\Psi \\ \qquad n_\zeta=\cos\Theta \end{array}\right\} \qquad (4)$$

（4）式における l_ξ，$l_\eta\cdots$，n_ζ は，運動前の物体固定座標軸 x，y，z と運動後の物体固定座標軸 ξ，η，ζ のなす方向余弦であり，u_0，v_0，w_0 は原点の並進変位成分である．都井は（4）式の各方向余弦を，座標軸非回転の条件を表す

$$\Theta=0,\quad \Phi+\Psi=0 \qquad (5)$$

をまわりにTaylor展開して，Θ および $\Phi+\Psi$ に関する2次項まで考慮し，さらに

$$\left.\begin{array}{l} \theta=-\Theta\sin\{(\Phi-\Psi)/2\} \\ \phi=\Theta\cos\{(\Phi-\Psi)/2\} \\ \chi=\Phi+\Psi \end{array}\right\} \qquad (6)$$

なる変換を施して，次のような3次元近似剛体変位関数を導いた．

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y,z)=u_0-y\chi+z\phi-\dfrac{x}{2}(\phi^2+\chi^2) \\ \qquad +\dfrac{y}{2}\theta\phi+\dfrac{z}{2}\theta\chi \\ v(x,y,z)=v_0-z\theta+x\chi-\dfrac{y}{2}(\chi^2+\theta^2) \\ \qquad +\dfrac{z}{2}\phi\chi+\dfrac{x}{2}\phi\theta \\ w(x,y,z)=w_0-x\phi+y\theta-\dfrac{z}{2}(\theta^2+\phi^2) \\ \qquad +\dfrac{x}{2}\chi\theta+\dfrac{y}{2}\chi\theta \end{array}\right\} \qquad (7)$$

この近似剛体変位関数を，固体力学における2次の微小量まで考慮に入れた3次元の歪み-変位関係式に代入し，3次以上の高次項を無視するとすべての有限ひずを成分が零となることは容易に確認できる．なお（4）式から（7）式を誘導する過程の詳細は巻末の文献[3)]を参照されたい．

（7）式と（3）式を比較してマトリックス $[\boldsymbol{T}-\boldsymbol{I}]$ は次式のごとく与えられる．

$$[\boldsymbol{T}-\boldsymbol{I}]$$
$$=\left[\begin{array}{c:c:c} -\dfrac{1}{2}(\phi^2+\chi^2) & -\chi+\dfrac{1}{2}\phi\theta & \phi+\dfrac{1}{2}\chi\theta \\ \hdashline \chi+\dfrac{1}{2}\theta\phi & -\dfrac{1}{2}(\chi^2+\theta^2) & -\theta+\dfrac{1}{2}\chi\phi \\ \hdashline -\phi+\dfrac{1}{2}\theta\chi & \theta+\dfrac{1}{2}\phi\chi & -\dfrac{1}{2}(\theta^2+\phi^2) \end{array}\right] \qquad (8)$$

上式で θ，ϕ，χ に関する2次の項を全部省略すれば

$$[\boldsymbol{T}-\boldsymbol{I}]=\boldsymbol{O}\times\boldsymbol{\rho} \qquad (9)$$

となってよく知られた微小回転の剛体変位場の式が出てくることになる．

2．回転変位が有限な場合の“剛体-バネ”モデルの理論

前節で導いた（7）式を用い，有限回転変位を伴う剛体要素の変位場は次式のごとく与えられる．

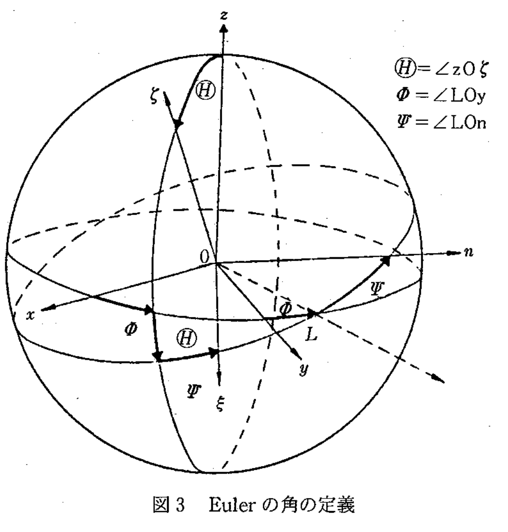


図3　Eulerの角の定義

$$\left.\begin{aligned}
U(x,y,z)&=u_0-\frac{1}{2}(x-x_0)(\phi^2+\chi^2)\\
&\quad+(y-y_0)(-\chi+\frac{1}{2}\phi\theta)\\
&\quad+(z-z_0)(\phi+\frac{1}{2}\chi\theta)\\
V(x,y,z)&=v_0+(x-x_0)(\chi+\frac{1}{2}\theta\phi)\\
&\quad-\frac{1}{2}(y-y_0)(\chi^2+\theta^2)\\
&\quad+(z-z_0)(-\theta+\frac{1}{2}\chi\phi)\\
W(x,y,z)&=w_0+(x-x_0)(-\phi+\frac{1}{2}\theta\chi)\\
&\quad+(y-y_0)(\theta+\frac{1}{2}\theta\chi)\\
&\quad-\frac{1}{2}(z-z_0)(\theta^2+\phi^2)
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

したがって，2要素間の相対変位ベクトル $\boldsymbol{\delta}^T=\lfloor\delta_x, \delta_y, \delta_z\rfloor$ は次式のごとく与えられる．ここでは紙面の都合により x 成分のみを示す．

$$\begin{aligned}
\delta_x=U_2-U_1&=(u_2-u_1)-\frac{1}{2}\{(x-x_2)(\phi_2^2+\chi_2^2)\\
&\quad-(x-x_1)(\phi_1^2+\chi_1^2)\}+\Big\{(y-y_2)(-\chi_2\\
&\quad+\frac{1}{2}\phi_2\theta_2)-(y-y_1)(-\chi_1+\frac{1}{2}\phi_1\theta_1)\Big\}\\
&\quad+\Big\{(z-z_2)(\phi_2+\frac{1}{2}\chi_2\theta_2)\\
&\quad-(z-z_1)(\phi_1+\frac{1}{2}\chi_1\theta_1)\Big\}
\end{aligned} \qquad (11)$$

このようにして求められた相対変位ベクトル $\boldsymbol{\delta}$ が要素境界面上にとられた局所座標系 (t, b, n) に関し $(\delta_t, \delta_b, \delta_n)$ で表され，これらの変位成分に対応する境界バネの反力が (f_t, f_b, f_n) で表されるとして，次のような応力-歪み関係式を導入する（図4参照）．

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} f_t \\ \hdashline f_b \\ \hdashline f_n \end{array}\right\}}_{\boldsymbol{f}_0} = \underbrace{\left[\begin{array}{c:c:c} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ \hdashline k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ \hdashline k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{array}\right]}_{\boldsymbol{k}_0} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \delta_t \\ \hdashline \delta_b \\ \hdashline \delta_n \end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\delta}_0} \qquad (12\text{-a})$$

または

$$\boldsymbol{f}_0=\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{\delta}_0 \qquad (12\text{-b})$$

この関係式を基準座標系で表した式を次式のごとく定義すれば

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{k}\boldsymbol{\delta} \qquad (13)$$

$\boldsymbol{k}$ は次式のごとく与えられる．

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{A} \qquad ここに \quad \boldsymbol{f}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_0\,;\ \boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\delta}_0 \qquad (14)$$

である．

今物体力 $\bar{\boldsymbol{p}}^{(0)}$，表面力 $\bar{\boldsymbol{f}}^{(0)}$ を受けて固体が変形し，変位場 $\boldsymbol{u}^{(0)}$ が生じ，各剛体要素に境界反力 $\boldsymbol{f}^{(0)}$，境界相対変位 $\boldsymbol{\delta}^{(0)}$ が生じていると仮定する．今物体力を $\bar{\boldsymbol{p}}^{(0)}+\varDelta\bar{\boldsymbol{p}}$，表面力が $\bar{\boldsymbol{f}}^{(0)}+\varDelta\bar{\boldsymbol{f}}$ まで増加して，固体の変位 $\boldsymbol{u}^{(0)}+\boldsymbol{u}$ に変化し，各剛体要素の境界反力および相対変位が $\boldsymbol{f}^{(0)}+\varDelta\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{\delta}^{(0)}+\varDelta\boldsymbol{\delta}$ になったとしよう．この場合の仮想仕事方程式は次式のごとく与えられよう．

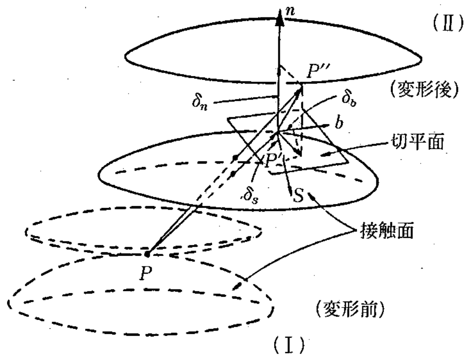


図4　剛体要素(I)，(II)の接触面上の一点 P の相対変位

$$\begin{aligned}
&\sum_{S_b}\iint_{S_b}\delta(\boldsymbol{\delta}^{(0)}+\varDelta\boldsymbol{\delta})^T(\boldsymbol{f}^{(0)}+\varDelta\boldsymbol{f})ds\\
&-\sum_e\iiint_V\delta(\boldsymbol{u}^{(0)}+\varDelta\boldsymbol{u})^T(\bar{\boldsymbol{p}}^{(0)}+\varDelta\bar{\boldsymbol{p}})dV\\
&-\sum_e\iint_{S_b}\delta(\boldsymbol{u}^{(0)}+\varDelta\boldsymbol{u})^T(\bar{\boldsymbol{f}}^{(0)}+\varDelta\bar{\boldsymbol{f}})dS=0
\end{aligned} \qquad (15)$$

ここに肩付の(0)は前の載荷状態を表し，また $\varDelta\delta=\varDelta\delta^{(1)}+\varDelta\delta^{(2)}$，$\delta^{(i)}\,(i=1,2)$ は，相対変位の1次，2次成分を表す．

以下にその x 成分のみを示す．

$$\begin{aligned}
\varDelta\delta_x^{(1)}&=(\varDelta u_2-\varDelta u_1)+\{(z-z_2)\varDelta\phi_2\\
&\quad-(z-z_1)\varDelta\phi_1\}-\{(y-y_2)\varDelta\chi_2\\
&\quad-(y-y_1)\varDelta\chi_1\}-\{(x-x_2)(\phi_2^{(0)}\varDelta\phi_2\\
&\quad+\chi_2^{(0)}\varDelta\chi_2)-(x-x_1)(\phi_1^{(0)}\varDelta\phi_1\\
&\quad+\chi_1^{(0)}\varDelta\chi_1)\}+\frac{1}{2}\{(y-y_2)(\phi_2^{(0)}\varDelta\theta_2\\
&\quad+\theta_2^{(0)}\varDelta\phi_2)-(y-y_1)(\phi_1^{(0)}\varDelta\theta_1+\theta_1^{(0)}\varDelta\phi_1)\}\\
&\quad+\frac{1}{2}\{(z-z_2)(\chi_2^{(0)}\varDelta\theta_2+\theta_2^{(0)}\varDelta\chi_2)\\
&\quad-(z-z_1)(\chi_1^{(0)}\varDelta\theta_1+\theta_1^{(0)}\varDelta\chi_1)\}\\
\varDelta\delta_x^{(2)}&=-\frac{1}{2}[(x-x_2)\{(\varDelta\phi_2)^2+(\varDelta\chi_2)^2\}\\
&\quad-(x-x_1)\{(\varDelta\phi_1)^2+(\varDelta\chi_1)^2\}]\\
&\quad+\frac{1}{2}\{(y-y_2)(\varDelta\phi_2)(\varDelta\theta_2)\\
&\quad-(y-y_1)(\varDelta\phi_1)(\varDelta\theta_1)\}\\
&\quad+\frac{1}{2}\{(z-z_2)(\varDelta\chi_2)(\varDelta\theta_2)\\
&\quad-(z-z_1)(\varDelta\chi_1)(\varDelta\theta)\}
\end{aligned} \qquad (16)$$

また，総和記号の下の S_b は要素境界のバネ系の分布面全体，e は各要素内または要素境界面上についての積分の総和をとることを意味する．(16)式に(15)式を代入

し，高次項を省略すれば次式のごとき増分仮想方程式が得られる．

$$\begin{aligned}&\Sigma\iint_{S_b}\{\delta(\varDelta\boldsymbol{\delta}^{(1)})^T\varDelta\boldsymbol{f}+\delta(\varDelta\boldsymbol{\delta}^{(2)})^T\boldsymbol{f}^{(0)}\}dS_b\\&-\sum_e\iiint_V\{\delta(\varDelta\boldsymbol{u}^{(1)})^T\varDelta\bar{\boldsymbol{p}}\\&+\delta(\varDelta\boldsymbol{u}^{(2)})^T(\bar{\boldsymbol{p}}^{(0)}+\varDelta\bar{\boldsymbol{p}})\}dV\\&-\Sigma\iint_S\{\delta(\varDelta\boldsymbol{u}^{(1)})^T\varDelta\bar{\boldsymbol{f}}+\delta(\varDelta\boldsymbol{u}^{(2)})^T(\bar{\boldsymbol{f}}^{(0)}\\&+\varDelta\bar{\boldsymbol{f}})\}dS=\boldsymbol{R}\end{aligned}\tag{17-a}$$

ここに

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}=&-\Sigma\iint\delta(\varDelta\boldsymbol{\delta}^{(1)})^T\boldsymbol{f}^{(0)}dS\\&+\Sigma\iiint\delta(\varDelta\boldsymbol{u}^{(1)})^T\bar{\boldsymbol{p}}^{(0)}dV\\&+\Sigma\iint\delta(\varDelta\boldsymbol{u}^{(1)})^T\bar{\boldsymbol{f}}^{(0)}dS\end{aligned}\tag{17-b}$$

$\boldsymbol{R}$ は前荷重段階における等価不平衡外力である．

さて，バネ定数 k_{ij} は，弾性変形の場合にはこれまで行ってきた方法に従って決定すればよいし，塑性変形を伴う場合，その剛性行列は次の材料の降伏条件式：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})=0,\quad \boldsymbol{\sigma}^T=\llcorner\tau_t,\ \tau_b,\ \sigma_n\lrcorner\tag{18}$$

を塑性ポテンシャルとして山田の方法[4]に従い，次式のごとく求めることができる．

$$k_{ij}^{(p)}=k_i^{(e)}\delta_{ij}-\frac{1}{\sum_i k_i^{(e)}\bar{f}_i^{e}}\bar{f}_i\bar{f}_j k_i^{(e)}k_j^{(e)}\tag{19}$$

ここに，$\bar{f}_i=\partial f/\partial\sigma_i$ であり $\sigma_i=(\tau_t,\ \tau_b,\ \sigma_n)$ である．また $k_i^{(e)}$ は弾性域におけるバネの剛性マトリックスの成分を表している．

(17)式は最終的に次のような増分平衡方程式に帰着される．

$$(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}_0+\boldsymbol{K}_G)\varDelta\boldsymbol{u}=\varDelta\bar{\boldsymbol{F}}-\boldsymbol{R}\tag{20}$$

ここに $\boldsymbol{K}$ は系全体の始めの剛性マトリックス，$\boldsymbol{K}_0$ は初期変位マトリックス，$\boldsymbol{K}_G$ は幾何剛性マトリックス，$\varDelta\boldsymbol{u}$, $\varDelta\bar{\boldsymbol{F}}$ は変位および外力増分を示している．

したがって(20)式を解いて，その解を次々に加えて合わせてゆくことにより有限な角変位を伴う“剛体-バネ”モデル系の変形や応力分布が計算されることになる．

(13)式は従来の有限要素法における構造物の大変形あるいは座屈後の問題を取り扱う増分解析の基礎方程式とまったく同じ形をしている．ゆえにこの方法により，これまでほとんど手のつけられなかった粒状体の有限角変位を考慮した変形問題が取り扱えることになる．したがって竹内の提案した tension crack analysis の方法[5]を拡張し，任意の降伏条件式 $f(\sigma,\tau)=0$ を考慮し得るよう計算アルゴリズムが拡張できるならば，これまで解明の困難であった粒状体の変形機構，特に粒子間のㇼりや回転の変形に及ぼす影響がつぶさに調べられるものと思われる．また本方法は土質，粉体力学のみならず金属転位輪，高分子材料の力学さらに鉄筋コンクリートやFRPに代表される複合材料の最終強度の研究にも将来応用されるであろう．

3．“剛体-バネ”モデルによる初期歪み問題の解析

一般に固体の変形は外力すなわち物体力や表面力の作用によって起こるものであるが，外力の作用がなくても固体の変形は起こり得る．その典型的な例を挙げると次のとおりである．

（i）　不均一温度場によって発生する熱応力問題

（ii）　溶接や塑性加工によって発生する残留応力問題

（iii）　構造物建造時に寸法誤差等によって発生する組立応力

さて図5に示すような任意の3次元物体を考え，それを図示したように有限要素の集合体に理想化しよう．この3次元物体をバラバラにしてそれを寄せ合わせて一体にするのに，もし外力の作用がなければ内部に変形を生ずることなく一体化できるのは明らかであるが，今バラバラ

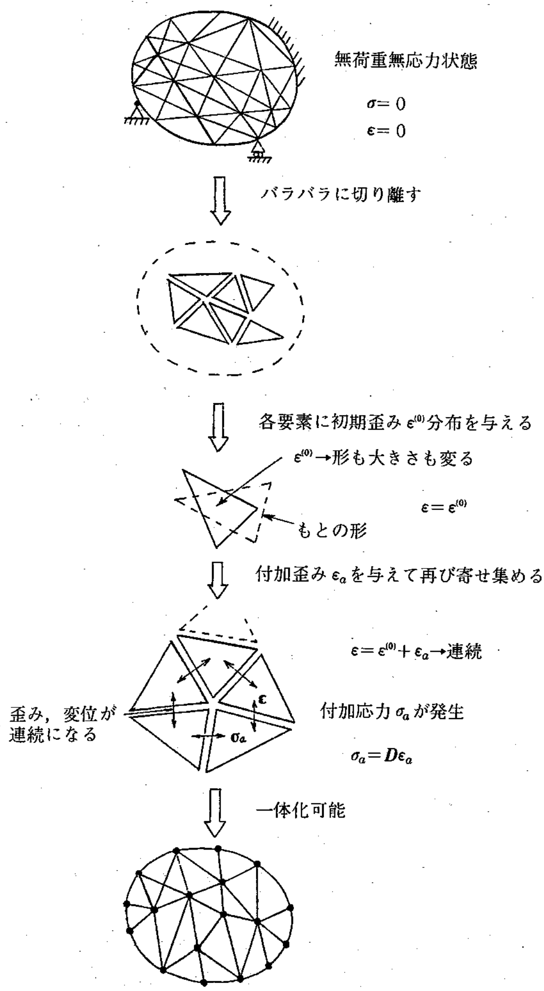


図5　初期歪み問題の考え方

にした状態で与えられた大きさの初期歪み分布 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ が与えられたと仮定しよう．そうすると各要素は変形し形も大きさも異なってくるので，単に寄せ集めただけでは一体にすることはできない．そのためには各要素に付加歪み $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ を加えて全体の歪み $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_a \tag{21}$$

が連続となるようにしなければならない．この付加歪み $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ によって付加応力 $\boldsymbol{\sigma}_a$ が発生するものとすれば，応力歪みマトリックスを $\boldsymbol{D}$ として

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon},\quad \boldsymbol{\sigma}_a=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_a \tag{22}$$

である．

さてこの問題において外力の作用がないとすれば仮想仕事の原理から次式が成り立つはずである．

$$\iiint_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}_a^T\boldsymbol{\sigma}_a dV=0 \tag{23}$$

ところが(21)式より明らかに

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_a=\delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{24}$$

であり，

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\sigma}_a=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_a=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_i\\ \text{ここに}\quad \boldsymbol{\sigma}_i=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_i\end{array}\right\} \tag{25}$$

であるから，(23)式はけっきょく次式のように書き換えられる．

$$\iiint_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}dV-\iiint_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_i dV=0 \tag{26}$$

この(26)式が一般の3次元物体に対する初期歪み問題の仮想仕事方程式である．

さて“剛体-バネ”モデルによる初期歪み問題に対する仮想仕事式は(26)式より次式のごとく与えられる．

$$\sum_s\iint\delta(\boldsymbol{\delta})^T\boldsymbol{f}dS-\sum_s\iint\delta(\boldsymbol{\delta})^T\boldsymbol{f}_i dS=0 \tag{27}$$

ここに総和記号の s は各要素境界面について総和をとることを意味し，また $\boldsymbol{f}_i$ は初期歪み分布 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ に基づいて発生する等価節点外力であり，次のようにして求めることができる．“剛体-バネ”モデルでは要素を剛体と考えているので初期歪み $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ による固体内の見掛けの応力 $\boldsymbol{\sigma}_i(=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_i)$ をこのままでは表現できない．しかし今各要素が初期剛体変位（有限回転変位をも含む）と一様な初期歪み $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ を受けて変形するものとすれば，それに基づく要素内の変位場は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{U}_i=\boldsymbol{u}_i+(\boldsymbol{T}_i-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\varepsilon}_i \tag{28}$$

したがって要素間の相対変位 $\boldsymbol{\delta}_i$ は次式のごとく与えられる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_i=\boldsymbol{U}_{i2}-\boldsymbol{U}_{i1}=[(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1)+\{(\boldsymbol{T}_2-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\rho}_2\\ -(\boldsymbol{T}_1-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\rho}_1\}]+\{\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\varepsilon}_1\}\end{aligned} \tag{29}$$

よって $\boldsymbol{\delta}_i$ によって生ずる見掛けの等価節点外力 $\boldsymbol{f}_i$ は

$$\boldsymbol{f}_i=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\delta}_i \tag{30}$$

で与えられることになる．

さて，前節に倣って初期歪み問題の増分法による解析法を考えてみよう．

初期歪み $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(0)}$ による見掛けの外力 $\boldsymbol{f}_i^{(0)}$ を受けて固体が変形し，変位場 $\boldsymbol{u}^{(0)}$ が生じ，各剛体要素に境界反力 $\boldsymbol{f}^{(0)}$，境界相対変位 $\boldsymbol{\delta}^{(0)}$ が生じていると仮定する．今，初期歪みが $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(0)}+\varDelta\boldsymbol{\varepsilon}_i$ まで増加し，見掛けの外力が $\boldsymbol{f}_i+\varDelta\boldsymbol{f}_i$ に変化し，固体の変位，剛体要素の境界反力および境界相対変位がそれぞれ $\boldsymbol{u}^{(0)}+\varDelta\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{f}^{(0)}+\varDelta\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{\delta}^{(0)}+\varDelta\boldsymbol{\delta}$ に変化したとしよう．

この場合の仮想仕事方程式は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}&\sum\iint\delta(\varDelta\boldsymbol{\delta})^T(\boldsymbol{f}^{(0)}+\varDelta\boldsymbol{f})dS\\ &\quad-\sum\iint\delta(\varDelta\boldsymbol{\delta})^T(\boldsymbol{f}_i^{(0)}+\varDelta\boldsymbol{f}_i)dS=0\end{aligned} \tag{31}$$

$\sum$ は要素境界のバネ系の分布面全体についての積分値で意味する．さて(16)式を(31)式に代入し，高次項を省略すれば次式のごとき増分仮想仕事方程式が得られる．

$$\begin{aligned}&\sum\iint\{\delta(\varDelta\boldsymbol{\delta}^{(1)})\varDelta\boldsymbol{f}+\delta(\varDelta\boldsymbol{\delta}^{(2)})^T\boldsymbol{f}^{(0)}\}dS\\ &\quad-\sum\iint\{\delta(\varDelta\boldsymbol{\delta}^{(1)})^T\varDelta\boldsymbol{f}_i\\ &\quad+\delta(\varDelta\boldsymbol{\delta}^{(2)})^T(\boldsymbol{f}_i^{(0)}+\varDelta\boldsymbol{f}_i)\}dS=-\boldsymbol{R}\end{aligned} \tag{32}$$

ここに

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}=&\sum\iint\delta(\varDelta\boldsymbol{\delta}^{(1)})^T\boldsymbol{f}^{(0)}dS\\ &-\sum\iint\delta(\varDelta\boldsymbol{\delta}^{(1)})^T\boldsymbol{f}_i^{(0)}dS\end{aligned} \tag{33}$$

で前荷重段階における等価不平衡外力の仮想仕事を表している．(32)式をマトリックス化すれば(20)式と同じ式が得られることは付言する必要があるまい．

4. 結　論

本小論において有限変位（正確には有限回転変位）を生ずる“剛体-バネ”モデル系の解析法について増分法に基づいた定式化を行い，併せて初期歪み問題の取扱い方についても言及した．この理論に基づいて塑性安定問題，熱応力，残留応力や残留変形の問題解析への応用が今後の研究課題であろう．

(1983年2月15日受理)

参考文献

1) 川井　忠彦：“不連続体力学のすすめ”（その1），（その2），（その3）生産研究32巻6，7号(1980年6月，7月），33巻4号（1981年4月）

2) 原島　鮮：力学　裳華房（改訂版），1965

3) 都井　裕，川井　忠彦“薄肉構造の離散化極限解析（その3）―平板剛体要素モデルによる安定問題のシミュレーション―”，日本造船学会論文集，第152号（1982），441.

4) 山田　嘉昭：“塑性・粘弾性”，有限要素法の基礎と応用シリーズ6，培風館，昭和55年12月

5) 川井　忠彦：“固体力学諸問題の離散化極限解析”生研セミナーテキスト（コース76），昭和57年1月18日～22日