

骨組構造離散化極限解析用プログラム “FRAME-1” の概要

Outline of the Computer Program for Collapse Load Analysis of Framed Structures “FRAME-1”

川 井 忠 彦*・椎 名 章 二*
Tadahiko KAWAI and Syozi SHIINA

1. は し が き

1976年川井によって提案された“剛体-バネ”モデルの実用性の立証は、まず骨組構造の静的および動的崩壊解析用プログラムの開発によって始められた。

すなわち川井研究室では3年前に、椎名と上田真稔(竹中工務店技術研究所), 児島盛一郎(富士重工群馬製作所)ならびに神尾洋一(東洋エンジニアリング)が協同で、任意形状の立体骨組構造の静的・動的崩壊解析用テストプログラムを開発した。そして半年にわたるデバックとプログラム修正、テストランを経て“FRAME-1”と名付けるパイロットプログラムが出来上がった。

以下にこのプログラムの理論的基礎ならびに仕様の概要を述べることにする。

2. 梁要素の剛性行列

新しい離散化モデルの理論的基礎については、本誌ですでにたびたび述べているので、^{4),8),9)}ここでは開発された剛体-バネモデルの梁要素の概要を述べるに留めたい。

梁要素の最も一般的な剛性行列 $[K]$ は、その3次元一般式のスペシャリゼーションにより容易に次の形に導かれている。

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{xx}^c] & 0 & 0 & 0 \\ & [K_{yy}^c] & 0 & 0 \\ & & [K_w] & 0 \\ \text{SYM.} & & & [K_\theta] \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここに $[K_{xx}^c]$, $[K_{yy}^c]$ は、断面の慣性主軸まわりの曲げ剛性マトリックス, $[K_w]$ は軸剛性マトリックス, $[K_\theta]$ は St. Venant 振りの剛性マトリックスである。

重心の剛体変位 (u, ϕ) を節点変位とする x 軸まわりの曲げ剛性マトリックスを $[K_{xx}^c]$ とすると、次式のごとく与えられる (図-1 参照)。

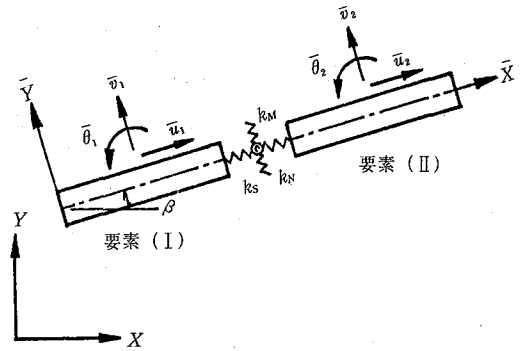


図-1 新しい梁モデル

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & \frac{l_1}{2}K_1 & -K_1 & \frac{l_2}{2}K_1 \\ & K_{15} + \frac{l_1}{4}K_1 & -\frac{l_1}{2}K_1 & -K_{15} + \frac{l_1 l_2}{4}K_1 \\ & & K_1 & -\frac{l_2}{2}K_1 \\ & \text{SYM.} & & K_{15} + \frac{l_2^2}{4}K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1G} \\ \phi_1 \\ u_{2G} \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

$$\parallel [K_{xx}^c] \quad (2)$$

ここに,

$$K_1 = \frac{2GA}{l_1 + l_2}, \quad K_{15} = \frac{2EI_{xx}}{l_1 + l_2} \quad (3)$$

である。

この式は重心の剛体変位 $[u_{1G}, \phi_1, u_{2G}, \phi_2]^T$ を節点ベクトルとする剛性マトリックスであり、骨組構造解析の場合図-2 に示すような梁の両端の変位 $[u_0, u_{1L}, u_{1R}, u_2]^T$ を節点変位ベクトルにとった剛性マトリックスの方が便利である。この場合の剛性方程式は次式のごとく与えられる。

* 東京大学生産技術研究所 第2部

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ X_{1L} \\ X_{1R} \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_{15}}{l_1^2} & -\frac{K_{15}}{l_1^2} & -\frac{K_{15}}{l_1 l_2} & \\ & K_1 + \frac{K_{15}}{l_1^2} & -K_1 + \frac{K_{15}}{l_1 l_2} & \\ & & \frac{3}{4}K_1 + \frac{K_{15}}{l_1^2} + \frac{l_1^2}{4l_2^2}K_1 & \\ \text{SYM.} & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_{1L} \\ u_{1R} \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

この式は簡単でありながら剪断変形の影響をも考慮に入れた梁の曲げ剛性マトリックスであり、²⁾ Hughes の処罰法と低減積分法を併用して導いた梁の簡易要素と同等であることが最近都井⁹⁾により証明された。またこの要素で剪断変形を無視した要素の剛性マトリックスは次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1^2} & -\frac{1}{l_1} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) & \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \\ & \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)^2 & -\frac{1}{l_1} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \\ \text{SYM.} & & \frac{1}{l_2^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

この要素の収束性は山本⁷⁾によって証明されている。

梁の軸方向の変形や捩り変形に対する剛性マトリックスは、従来の有限要素法で用いられているものとまったく同じである。すなわち軸剛性マトリックス \bar{K}_w は次式のごとく与えられる。

$$\begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここに

$$K_2 = \frac{2EA}{l_1 + l_2} \quad (7)$$

であり、St. Venant の捩り変形に対する剛性マトリックスは次式のごとく与えられる。

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_9 + K_{10} & -(K_9 + K_{10}) \\ -(K_9 + K_{10}) & K_9 + K_{10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} K_9 + K_{10} &= \frac{2GI_p}{l_1 + l_2} \\ I_p &= I_{xx} + I_{yy} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

で I_p は断面の極慣性モーメントを表す。

さて空間骨組構造解析を行う場合、各梁要素は通常局所座標系で定義されているから、それを全体座標系に変換してから構造全体の剛性マトリックスを組み立てて行わねばならない。すなわち局所座標系と全体座標系の間には次の変換公式が成立する。

$$\{\bar{X}\} = [T]\{X\}, \{\bar{U}\} = [T]\{U\} \quad (10)$$

ここに上つき「」は局所座標系を示している。この場合

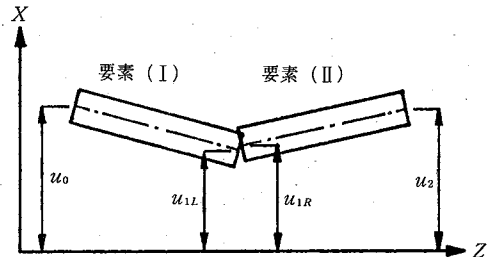


図-2 剛体梁要素における節点変位

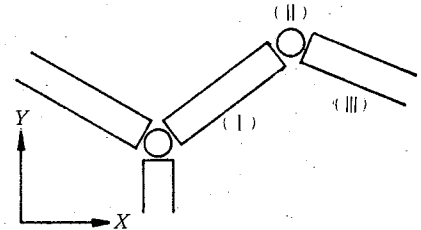


図-3 接合要素 (ピン要素)

局所座標系に関する梁の剛性マトリックス $[\bar{K}]$ と、全体座標系に関する梁剛性マトリックス $[K]$ との間には次の変換公式が成立する。

$$[K] = [T]^T [\bar{K}] [T] \quad (11)$$

以上のようにして直線梁に関する新しい梁モデルの剛性マトリックスを導くことができた。しかし、実際には二つの要素 (I 要素と II 要素) が図-1 に示されるような直線的に結ばれているものばかりでなく、隅角部のように角度を持って結ばれていたり、また直線であっても材料定数の異なる部材と結ばれているケースもたびたび生ずる。本モデルは重心に自由度を設定し、エネルギーを要素接合点で評価するためこのような場合には注意を要する。そこで、このような場合の取り扱い方法を述べる。

いま、図-3 に示される (II) 要素のような質量や長さのないピン要素を導入する。このピン要素はヒンジとまったく性質が異なり、単なる接合の意味しか持たない。このとき、(I)-(II) 要素間で直線梁の剛性行列が作成でき、また、(II)-(III) 要素間でも同様な関係が成立する。以上から、(II) 要素という仮想要素を仲介して (I) 要素と (III) 要素の結合がはかられる。

以上示した梁要素の利点は剛体変位場の仮定から重心に変位パラメータを持ったため、他の“剛体-バネ”モデル

研 究 速 報
の要素と何ら区別することなく混合して用いることができ、しかも、このように簡単な要素ながら剪断変形の影響も自動的に考慮されている。

3. 破壊条件の考え方

“剛体-バネ”モデルの梁要素では断面力として、軸力、剪断力、曲げおよび振りモーメントの6つを取り扱う。この断面力を得るために要素接合点で、3種類のバネ (k_N, k_S, k_M) を設定する。

いったん、このバネの受け持つ断面力が所定の条件値に達すると、塑性ヒンジが発生し、それ以降所定の条件を満足しなければならなくなる。まず、そのときの構成式について考えてみる。

ここでは議論を簡単にするため、平面骨組の場合について考えると梁の断面力は、軸力 N 、剪断力 S と曲げモーメント M の三つである。そこで、梁の降伏条件式を次式のごとくおく。

$$f(N, S, M) = 0 \tag{12}$$

f は塑性流れ理論におけるいわゆる塑性ポテンシャルである。山田の理論¹²⁾に従うとこの梁要素のヒンジ発生後の剛性マトリックスは次式により計算される。

$$k_{ij}^{(e)} = k_{ij}^{(e)} \delta_{ij} - \frac{1}{\sum k_i^{(e)} \bar{f}_i^2} \bar{f}_i \bar{f}_j k_i^{(e)} k_j^{(e)} \tag{13}$$

ここで、 $f_i = \partial f / \partial \sigma_i$ であり、 $\sigma_i = (N, S, M)$ である。また、 $k_i^{(e)}$ は弾性時におけるバネの成分を表している。

さて、上記の関係に対し、一般的によく用いられている以下の破壊規準を適用する。

$$f = \pm \left(\frac{M}{M_{px}} \right) + \left(\frac{P}{P_y} \right)^2 - 1 \tag{14}$$

ここで、 M_{px} : 全塑性曲げモーメント

P_y : 全断面塑性軸力

である。この破壊規準が最も適切か否かの議論は当然残ると思うが、ここではそのことについて深く立ち入らない。いま塑性化後の構成式を、

$$[D^p] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ & k_{22} & k_{23} \\ & & \text{SYM. } k_{33} \end{bmatrix} \tag{15}$$

と表せば、それぞれの成分は(13)式により以下のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= k_N - \frac{1}{F} \left(\frac{2P}{P_y^2} \right)^2 k_N^2 \\ k_{22} &= k_S, \quad k_{12} = k_{23} = 0 \\ k_{33} &= k_M - \frac{1}{F} \left(\frac{1}{M_{px}} \right)^2 k_M^2 \\ k_{13} &= \mp \left(\frac{2P}{P_y} \right) \left(\frac{1}{M_{px}} \right) k_N k_M \\ F &= \left(\frac{2P}{P_y^2} \right)^2 k_N + \left(\frac{1}{M_{px}} \right)^2 k_M \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

ここに (k_N, k_S, k_M) は軸力、剪断力および曲げモーメントに抵抗する3種類のバネ定数で以下のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} k_N &= 2EA/l \\ k_S &= 2\alpha GA/l \quad (\alpha \text{ は梁の有効剪断係数}) \\ k_M &= 2EI/l \quad (l = l_1 + l_2) \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

4. 数値計算法

上述のようにして塑性化後の梁の構成式が得られたが、次にこれを用いて行う材料非線形問題の数値計算法について述べる。有限要素法では、この種の方法に対して数多くの研究が発表されている。その中でどの方法を用いるのが良いのか一概に述べることはできないが、少なくとも組織的なアルゴリズムにする必要はある。

さて、本モデルを用いて極限解析を行う場合、従来の方法の中で最も合理的な方法は増分法であろう。有限要素法における増分法の代表的なアルゴリズムには山田の方法と Marçal の方法があり、本モデルに対してもこのアルゴリズムを適用することが可能である。

山田の方法は各増分段階でスプリングを一個ずつ降伏させてゆき、このスプリングを降伏させるのに必要な荷重増分を自動的に定める方法である。この方法を用いれば、計算時間は多少かかるものの、ヒンジの発生状況や最高荷重の精密な値等が得られる適切な方法である。

5. “FRAME-1” の仕様の概要

前節までで“剛体-バネ”モデルの理論の概要を述べたので、本節では骨組構造離散化極限解析用プログラム“FRAME-1”の仕様について述べる。

本プログラムで取り扱える解析種類は大別して次の4つである。

- (1) 静的弾塑性解析
- (2) 固有値解析
- (3) 動的弾性解析
- (4) 動的弾塑性解析

それぞれの解析法に関して2次元、3次元の取り扱いが可能であり、また荷重の設定も固定荷重、変動荷重が種々の組み合わせによって取り扱えるようになっている。

塑性解析の方法は山田の方法を用いており、バネを一つづつ降伏させるアルゴリズムとなっている。

降伏条件は、以下に示すようにごく一般的な5つの条件式が設定されており、適宜選択できるようになっている。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad f &= \left(\frac{N}{N_p} \right)^2 + \left(\frac{V_y}{V_{py}} \right)^2 + \left(\frac{V_z}{V_{pz}} \right)^2 + \left(\frac{M_x}{M_{px}} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{M_y}{M_{py}} \right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{pz}} \right)^2 - 1 \\ \textcircled{2} \quad f &= \left(\frac{M_y}{M_{py}} \right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{pz}} \right)^2 - 1 \\ \textcircled{3} \quad f &= \left(\frac{N}{N_p} \right)^2 + \left(\frac{M_y}{M_{py}} \right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{pz}} \right)^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad f = \left(\frac{N}{N_p}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{M_{py}}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{pz}}\right)^2 - 1$$

$$\textcircled{5} \quad f = \left(\frac{M_x}{M_{px}}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{M_{py}}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{pz}}\right)^2 - 1$$

ここに、
 N_p : 全断面塑性軸力
 V_{py}, V_{pz} : 全断面塑性剪断力
 M_{px} : 全塑性ねじりモーメント
 M_{py}, M_{pz} : 全塑性曲げモーメント

次にプログラムについては図-4に示すように、大きく分けて3つのステップからなる。各ステップ間のつながりはファイルまたはMTを媒体としてつながっている。(# 12, # 13)

ここで各ステップの概要について説明する。

(A) INPUT 部

Input 部では、入力データの読み込みを行うと同時に各種のデータチェックを行う。もし実行不可能なエラーが発生した場合、エラーリスト出力し計算をストップする。

(B) PRE-PLOT 部

ここではデータチェックの意味あいも考えて、要素関係の構造図がプロッター出力できるようになっている。出力されるものは次のものである。

- 構造図
- 構造図+(剪断評価点, ピンフラッグ, 拘束条件)
- 構造図+節点番号
- 構造図+要素番号

(C) ANALYSIS 部

各種の解析と出力を行っている。

また連立1次方程式のソルバー (solver) については、圧縮型1次元配列を使った「DLINCB (DCBSUB)」(東大大型電算センターシステムライブラリー)を用い、固有値解析には Housholder - Bisection - Inverse Iteration 法により固有値, 固有ベクトルを求める「DEIGHS」(同センターライブラリー)を用いている。

また動的解析には、直接時間積分法の Newmark β 法を用いている。

6. む す び

“FRAME-1”の実用性は、本誌に紹介した「平和の像」の内部支持骨組構造の設計において、初めて本格的に実証されたが、このほかにも実際の建築骨組構造について地震荷重に対する耐力評価に使用され、満足すべき成果をいくつか得ている。今後はこれに壁や床の剛性を追加し、また地盤との連成を考慮し得る機能を挿入し、新耐震設計規準に合致した構造解析ができるようなプログラムにまで発展させようと考えている。

謝 辞

本骨組構造極限解析用プログラム“FRAME-1”の開発

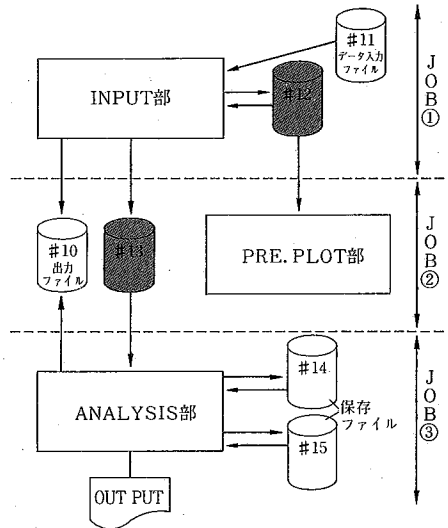


図-4 “FRAME-1”のジョブ・ステップ流れ図

にあたり、東大工学部都井裕助教授、協和コンサルタンツ竹内則雄研究室長の助言と多大な協力を賜った。末筆ながら関係諸氏に深甚なる謝意を表する次第である。

(1983年1月26日受理)

参 考 文 献

- 1) Kawai, T.: "New Element Models in Discrete Structural Analysis" 日本造船学会論文集, 第141号 (1977)
- 2) Kawai, T. and Chen, N.C.: "A Discrete Element Analysis of Beam Bending Problems Including the Effects of Shear Deformation" 生産研究, Vol. 30, No. 5 (1978)
- 3) 川井・都井: "はりおよび横衝撃応答問題に対する新しい離散化解析法" 日本機械学会論文集, 第389号 (1979)
- 4) 川井: "不連続体力学のすすめ(その1); (その2); (その3); 生産研究, Vol. 32, No. 6; Vol. 32, No. 7; Vol. 33, No. 4 (1980~1981)
- 5) 都井: "骨組・回転対称シェル構造の動的非線形解析" 日本造船学会論文集, 第147号 (1980)
- 6) 渡辺: "変分差分法によるせん断変形を含んだRBSM梁要素の導出" 川井研究室研究会資料 (1980)
- 7) Yamamoto, Y.: "A Solution Method for the Finite Element Method" NAUT Rept. 4011, (1982)
- 8) 川井編: 生研セミナーテキスト [固体力学諸問題の離散化極限解析] コース76 (1982.1)
- 9) 川井編: 生研セミナーテキスト [薄肉梁および骨組構造の新離散化解析] コース79 (1982.11)
- 10) 信原・桜井著: 骨組構造解析入門, コンピュータによる構造工学講座I-2-A, 培風館 (1970)
- 11) 川井著: マトリックス法振動および応答, コンピュータによる構造工学講座I-4-B, 培風館 (1971)
- 12) 山田著: 塑性・粘弾性, コンピュータによる構造工学講座II-2-A, 培風館 (1972)