

端面の変形と粒状体のダイレイタンシー特性を考慮した 粒状体の圧縮強度について

On Compression Strength of Granular Material Accounting for Deformation of
Boundaries and Dilatancy Characteristics of Granular Material

龍岡 文夫*

Fumio TATSUOKA

1. ま え が き

これまで、剛な摩擦のある端面ではさまれた粒状体の圧縮および伸張強度を応力特性曲線法で解き¹⁾、その結果を使いやすい形でまとめた²⁾。しかし、これまでの解析では、端面が変形する場合を取り扱っていないし、また、粒状体の変形特性を全く考慮に入れていなかった。本報告では、これらが粒状体の破壊強度に及ぼす影響について考察した結果を述べる。

2. 解 析

粒状体のダイレイタンシー (dilatancy) 特性、および端面の接線方向の変形性を取り入れて解析するが、これらが粒状体の破壊強度に及ぼす影響はすべて端面での摩擦係数 μ への影響として表現する。したがって、前報²⁾で示した結果(式および図)は、 μ の正負の値にかかわらず、そのまま今回の場合も適用できる。

今、端面での摩擦係数 μ を次のように定義しなおす。

$$\left. \begin{array}{l} \mu^* > 0 \text{ のとき,} \\ \mu = (\mu_0, \mu^* \text{ の絶対値の小さい方の値}) > 0 \\ \mu^* < 0 \text{ のとき,} \\ \mu = (-\mu_0, \mu^* \text{ の絶対値の小さい方の値}) < 0 \\ \text{ただし, } \mu_0 > 0: \text{粒子と端面の間の物理} \\ \text{的摩擦係数で一定値,} \\ \mu^* = \arctan(\tau_n/\sigma_n)_{\max} \end{array} \right\} \quad (2-1)$$

ここで、 τ_n 、 σ_n は端面で粒状体に働らくせん断応力と鉛直応力で図 1 (a) の場合 $\tau_n > 0$ 、(b) の場合に $\tau_n < 0$ と定義する。したがって、 μ^* は正の場合と、負の場合がありうる。 μ^* は粒状体内部での破壊によって決まる値である。 μ^* は以下述べるように端面の接線方向の伸縮性と粒状体のダイレイタンシー特性、そのときの粒状体の内部摩擦角の関数となる。

今、粒状体のダイレイタンシー特性を次式であらわす。

* 東京大学生産技術研究所 第 5 部

$$R = K \cdot D \quad (2-2)$$

ここで、 $R = \sigma_1/\sigma_3$ 、 $D = -\dot{\epsilon}_3/\dot{\epsilon}_1$ (平面ひずみの場合) で、 K は粒状体の種類により決まり、たとえば、豊浦砂では大体 3.6 である。より厳密には平均主応力の変化によるひずみの変化も考慮しなければならないが、今回は単純化して考察する。 R と K から D が求まったとすると、 $-\dot{\epsilon}_3$ で除して正規化したひずみの増分のモールドは一義的に決まり図 2 (a) のようになる。ここで、ダイレイタンシーの程度を次式であらわすダイレイタンシー角 ν であらわすとする。

$$\sin \nu = -\frac{\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3}{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3} = \frac{R - K}{R + K} \quad (2-3)$$

ρ と ν の関係を図 3 に示す。 ν は $R = R_{\max}$ のときに最大値 ν_{\max} となる。 $K = 3.6$ 、 $\rho = \rho_{\max} = 45^\circ$ のとき (すなわち $R_{\max} = 5.83$ のとき)、 $\nu_{\max} = 13.7^\circ$ となり ρ_{\max} より小さい。このために、次に述べるように μ_0 が非常に大きくなって、 $\mu = \mu^* < \rho$ となる。

今、端面の接線方向のひずみの増分を $\dot{\epsilon}_x$ であらわす。 $\dot{\epsilon}_x > 0$ は圧縮をあらわす。今、端面と粒子の間のすべりが無い、すなわち μ_0 が十分大きいとする。すると図 2 (a) で B 点はひずみ増分状態 ($\dot{\epsilon}_x$ 、 $\dot{\gamma}_{xy}/2$) をあらわす。すると、図に示すように端面と直交する方向 (y -方向) と $\dot{\epsilon}_1$ 方向のなす角度 ψ は、次式から求められる。

$$\psi = \pi/4 + \nu/2 - \eta \quad (2-4)$$

ここで、 η は端面の接線方向 ($x-x'$ 方向) と、伸び縮みのない方向 (s 方向) とのなす角度であり、次式から求められる。

$$\sin(\nu - 2\eta) = \sin \nu - (1 + \sin \nu) \cdot \beta \quad (2-5)$$

ここで、

$$\beta = \dot{\epsilon}_x/\dot{\epsilon}_3 \leq 1 \quad (2-6)$$

である。 $\beta = 1$ のときは (2-5) 式から、 $\eta = \nu/2 + \pi/4$ となり、(2-4) 式から、 $\psi = 0$ となり、 σ_1 と $\dot{\epsilon}_1$ の方向が一致していれば ($\delta = 0$)、結局 $\mu^* = 0$ 、 $\mu = 0$ となる。 $\beta < 1$ に対しては、 η には 2 つの解がありうる。1 つは図 1 (a) およ

研究速報

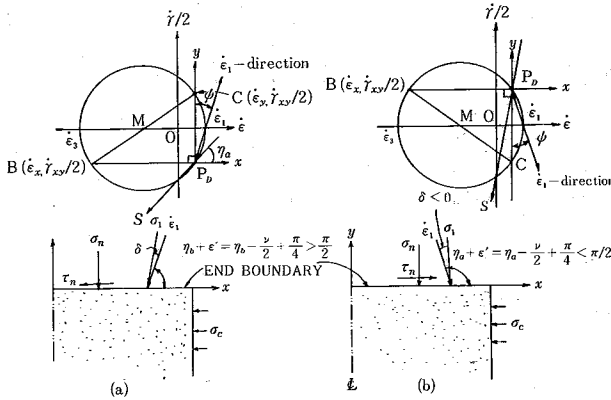


図1 σ_1 方向と ϵ_1 方向が一致したときの端面に作用する2つの応力状態

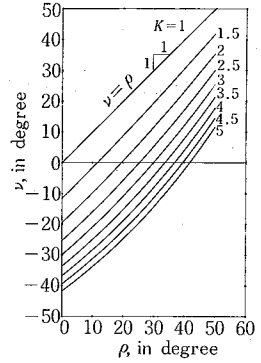


図3 ρ と ν の関係

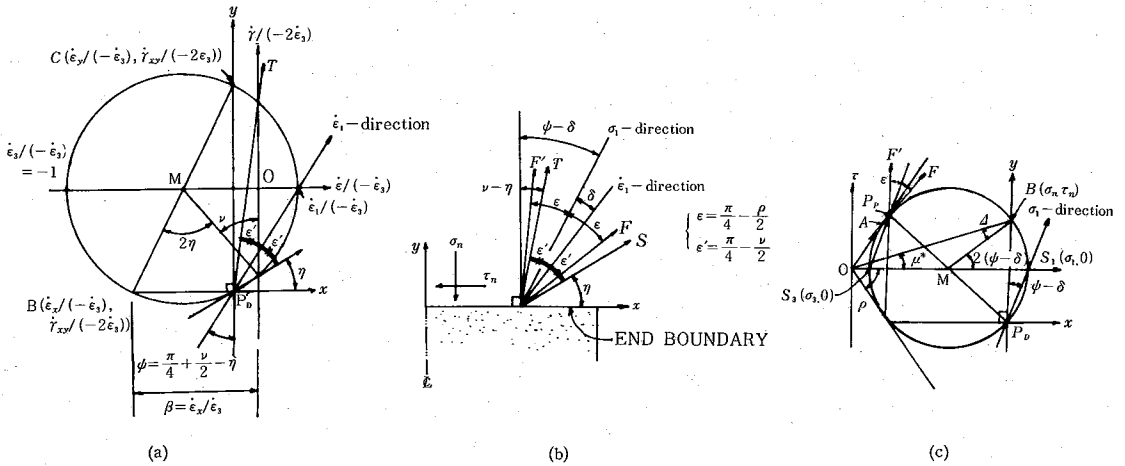


図2 (a)端面の接線方向の変形があるときの正規されたひずみの増分のモール円, (b)端面でのひずみ増分と応力状態, (c) σ_1 方向と ϵ_1 方向が δ なすときの応力のモール円

び図2の状況に対するもので $\eta_a < \nu/2 + \pi/4$ である。この場合は端面が比較的剛であり、端面で粒状体の変形が拘束されている。もう1つの解は $\eta_b > \nu/2 + \pi/4$ であり、図1(b)の状況に対するもので、端面の接線方向に対する変形性の方が粒状体のそれより大きく、粒状体の変形が促進されている。これは、端面がヤング率の小さい厚い弾性体からできている場合にありうる。 η_b と η_a の関係は同一の β の値に対して

$$\eta_b = \pi/2 + \nu - \eta_a \quad (2-7)$$

であらわせられる。図1(b)の状況は非常に特殊な状況であり、以降特にことわらなければ、図1(a)、図2の状況($\eta = \eta_a$)について述べていることにする。

今、 σ_1 方向と ϵ_1 方向が一致していない一般的状況を考える。両方向のなす角度 δ を図2(b)に示すように定

義する。少なくとも単純せん断変形では、 δ の値は粒状体のせん断が進行するにつれて減少してゆくが、 $R = R_{max}$ のときもゼロではないのが一般的である。³⁻⁷⁾ 図2(c)に示すモールの応力円を、図2(b)に示す σ_1 方向に S_1 点($\sigma_1, 0$)から直線を引いて応力円と交わる点が極 P_D である。 y 方向の応力 σ_n 、せん断応力 τ_n を示す点Bは図2(c)に示すB点であらわせられる。ここで、

$$\sin \Delta = \sin \mu^* / \sin \rho \quad (2-7)$$

$$\mu^* + \Delta = 2(\psi - \delta) \quad (2-8)$$

$$(\tau_n / \sigma_n)_{max} = \tan \mu^* \quad (2-9)$$

の関係を用いると、次の関係が得られる。

$$\tan \mu^* = \frac{\sin \rho \cdot \cos(\nu - 2\delta - 2\eta)}{1 - \sin \rho \cdot \sin(\nu - 2\delta - 2\eta)} \quad (2-10)$$

十分塑性変形が進行して $\delta = 0$ になったとすると、

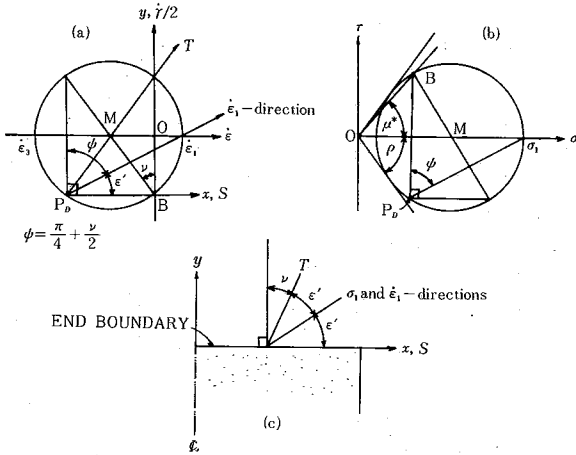


図4 $\eta = \delta = 0$ のときの端面における応力・ひずみ状態

$$\tan \mu^* = \frac{\sin \rho \cdot \cos(\nu - 2\eta)}{1 - \sin \rho \cdot \sin(\nu - 2\eta)} \quad (2-11)$$

が得られる。端面が剛なとき、あるいは ϵ_x が ϵ_3 に比べて無視できるほど小さくなり $\beta = 0$ となったときは $\eta = 0$ であり、このときは、

$$\tan \mu^* = \frac{\sin \rho \cdot \cos \nu}{1 - \sin \rho \cdot \sin \nu} \quad (2-12)$$

となる(図4)。図2のF, F'は応力比 τ/σ が最大になる面(応力の特性方向)を示したものである。ここで、 $(\tau_n/\sigma_n)_{\max}$ は τ_n/σ_n の最大値であり、このとき $\rho = \rho_{\max}$, $\nu = \nu_{\max}$ となっているとは限らないので、(2-10)、(2-11)、(2-12)では ρ_{\max} , ν_{\max} を用いず単に ρ , ν を用いた。それは、 $(\tau_n/\sigma_n)_{\max}$ は ρ , ν , η , δ の関数であり、 η , δ は $\rho = \rho_{\max}$ になった以降急速に減少し、その結果 μ^* は増加するようになることがあると思われるからである。また、(2-10)式から、次のようなことが導かれる。

- (1) 他の条件が同一であれば、 ρ が大きいほど μ^* は大きい。同一の砂であり K が一定だとすると、(2-3)式から、密になり ρ が大きくなるほど ν の値も大きくなるから、より一層 μ^* も大きくなりうる。
- (2) 他の条件が同じであると、 K が小さく ν が大きくて粒状体の膨張性が大きいほど (dilative であるほど)、 μ^* は大きくなりうる。
- (3) 他の条件が同じであれば、 η (あるいは β) が大きいほど、すなわち端面の接線方向の伸び特性が大きいほど μ^* は小さくなる。 $\delta = 0$ と仮定すると、測定された見掛けの粒状体の内部摩擦角 ρ^* と真の内部摩擦角 ρ (あるいは ρ_{\max}) の関係は次のようになる。すなわち、 $\eta = \eta_0 < \nu/2 + \pi/4$ のときは

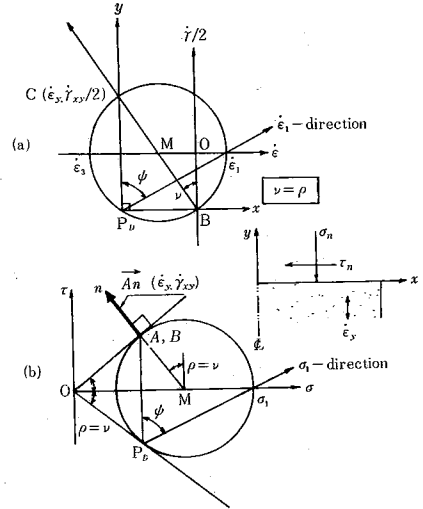


図5 $\eta = \delta = 0, \nu = \rho$ のときの端面における応力・ひずみ状態

$\mu^* > 0$ となる。したがって、 $\rho^* > \rho$ となる。²⁾しかし、 $\eta = \eta_0 > \nu/2 + \pi/4$ のときは、(2-11)式から $\mu^* < 0$ となり図1(b)の状態となり、(2-1)式から $\mu < 0$ となる。 $\mu < 0$ を前報²⁾の諸式に代入すると、結局 $\rho^* < \rho$ が得られる。すなわち、見掛けの強度が実際の強度よりも小さくなる。

3. パラメーター K および η (あるいは β) と μ^* の関係についての考察

端面が十分に剛で、 $\beta = 0$ すなわち $\eta = 0$ となっており、かつ $\delta = 0$ であるときの ν と ρ の関係を K をパラメーターとして示したのが図3である。 $K = 1$ のときは(2-3)式から $\nu = \rho$ 、さらに(2-12)式から $\mu^* = \rho$ となる。この条件は Associated Flow Rule もしくは Normality Condition と言われているものであり(図5)、図5(b)のA点であらわされているひずみ増分ベクトル \vec{An} 方向は図5(a)のBC方向と平行でありBC方向は図5(b)のOA方向に直交している。なぜなら、図5(b)の \vec{An} の方向は、図5(a)のBC方向と平行であり、BC方向は図5(b)のOA方向に直交している。しかし、実際の粒状体では $K = 1$ は小さすぎる値である。 $K > 1$ のときは、(2-3)式から $\nu < \rho$ となる。今、 $\rho = \rho_{\max}$, $\nu = \nu_{\max}$ のとき、 $\tau_n/\sigma_n = (\tau_n/\sigma_n)_{\max}$ になったとすると、

$$\mu^* = \arctan\left(\frac{\sin \rho_{\max} \cdot \cos \nu_{\max}}{1 - \sin \rho_{\max} \cdot \sin \nu_{\max}}\right) < \rho_{\max} \quad (3-1)$$

となる。図6は $\eta = \delta = 0$ のときの μ^* と $\rho = \rho_{\max}$ との関係((3-1)式)を K をパラメーターとして示したもので、 $K = 3.5$ のとき、 $\rho = 30^\circ \sim 50^\circ$ の範囲で μ^* は ρ より大略 5° 小さいことが分かる。

次に η (あるいは β) の影響について考える。図-7は

研究速報

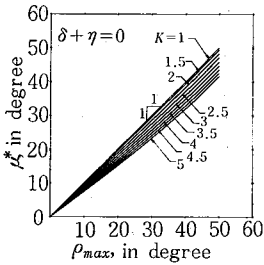


図6 δ=η=0のときの ρ(ρ_max)と μ*の関係

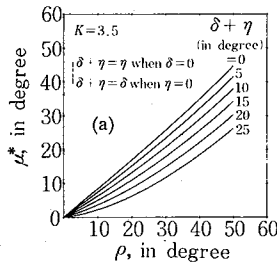


図7 η, δあるいはη+δまたはβの μ*~ρ 関係に及ぼす影響

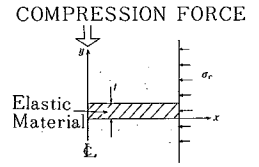
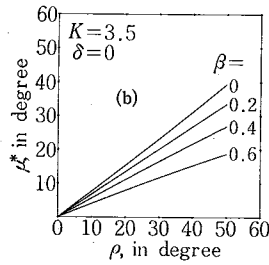


図8 粒状体の中の薄い弾性体

$K=3.5$ のときの μ^* と ρ の関係を $\eta < \nu/2 + \pi/4$ あるいは β をパラメーターにして示したものである。 β あるいは η が大きいほど μ^* の値は減少してゆくことが分かる。一般には端面での η (あるいは β) の値は一定ではないので、端面で μ^* (あるいは μ) の値は一定ではないであろう。

図7(a)から、 δ の μ^* に対する影響についても考察できる。(2-10)式から η と δ は同じように μ^* に影響するから、図7(a)で $\delta + \eta$ を δ に置きかえれば、そのまま $\mu^* \sim \rho$ 関係に及ぼす δ の影響を知ることができる。

4. 粒状体の変形の進行に伴う β の値の変化

粒状体のせん断変形の進行に伴う β の値について考察しておこう。図8のように薄い弾性体が粒状体の中にあつて、圧縮を受けるときの弾性体の平均的 x 方向のひずみ、すなわち $\bar{\epsilon}_x(x)$ は、次式で近似的に求まる。

$$\bar{\epsilon}_x(x) = -\frac{2}{E \cdot t} \int_0^x \tau_n(x) dx \quad (4-1)$$

ここで E , t はそれぞれ弾性体のヤング率、厚さである。したがって、 x の関数としての $\beta(x)$ は、 $\dot{\epsilon}_x(x) = \bar{\epsilon}_x(x)$ として

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \frac{\dot{\epsilon}_x(x)}{\dot{\epsilon}_3(x)} = \frac{\frac{2}{E \cdot t} \int_0^x \dot{\tau}_n(x) dx}{-\dot{\epsilon}_1(x) \cdot R(x) / K} \\ &= \frac{2K}{E \cdot t} \frac{\int_0^x \dot{\tau}_n(x) dx}{-\dot{\epsilon}_1(x) \cdot R(x)} \end{aligned} \quad (4-2)$$

$R(x)$ は x における σ_1/σ_3 の値であり、 σ_1 方向の回転の影響を無視すれば次式で近似できるであろう。

$$R = 1 + \epsilon_1(x) / \{1/E_0 + \epsilon_1(x)/(R_{max}-1)\} \quad (4-3)$$

$\epsilon_1(x)$ は x における ϵ_1 の値、 E_0 は $R \sim \epsilon_1$ 関係における初期剛性率である。 τ_n は図2(c)から、

$$\begin{aligned} \tau_n &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\psi = \frac{R-1}{2} \sigma_3 \cos(2\eta - \nu) \\ &= \frac{\epsilon_1}{1/E_0 + \epsilon_1/(R_{max}-1)} \frac{\sigma_3}{2} \cos(2\eta - \nu) \end{aligned} \quad (4-4)$$

(4-3), (4-4)式において ϵ_1 , τ_n , σ_1 , σ_3 , ψ , R , η , ν はすべて x の関数である。以上のことから、次のことが指摘できる。

- (1) 他の条件が同じであれば $E \cdot t$ が大きいほど β は小さい。
- (2) 他の条件が同じであれば、 σ_c が大きくて、 σ_3 が大きくなるほど β は大きい。
- (3) 他の条件が同じであれば粒状体の初期剛性 E_0 が大きいほど β は大きい。
- (4) 他の条件が同じであれば、粒状体の変形の進行とともに $\dot{R}/\dot{\epsilon}_1$ は急速に減じ、したがって、 $\dot{\tau}_n/\dot{\epsilon}_1 \cdot R$ は急速に減じ、 β は小さくなってゆくであろう。

5. まとめ

以上、実験的検証なしにかなり細かいところまで議論を進めた。今後、実験による検証を進める予定である。

(1982年12月13日受理)

参考文献

- 1) 龍岡文夫 (1981) : “変形を拘束された粒状体の破壊の塑性論的考察”, 生産研究, 33 卷 10 号, pp.17-20
- 2) 龍岡文夫 (1983) : “端面で変形を拘束された粒状体の圧縮および伸張強度について”, 生産研究, 35 卷 3 号, pp. 39-42
- 3) Cole, E.R.L. (1967) : “The Behaviour of Soils in Simple Shear Apparatus,” Ph.D. Thesis, Cambridge Univ.
- 4) Stroud, R.A. (1971) : “The Behaviour of Sand at Low Stress Levels in the Simple Shear Apparatus,” Ph. D. thesis, Cambridge Univ.
- 5)~7) 福島伸二, 龍岡文夫 (1981, 1982) : “土のねじり単純せん断試験(IV), (V), (VI)——砂の平面ひずみねじり単純せん断試験,” 生産研究, Vol.33, No.10, Vol.34, No.8, Vol.34, No.9