

光線の形式的量子論

——光線方程式と波動方程式——

Formal Quantum Theory of Light Rays

——Ray Equation and Wave Equation——

濱崎 襄 二*

Joji HAMASAKI

光線の形式的量子論は、光線の量子化の概念を導入し、光線に伴った波動として光波を理解しようとする理論的手法である。このことは、量子力学において、古典的な粒子の運動方程式に量子化の概念を導入し、これによって粒子に伴った波動を理解したのと同様である。本文では、光線の形式的量子論の基本となる部分について、例題を掲げて解説を試みる。

1. 序

近年レーザ光の工学的応用が盛んになり、他方ではリモートセンシングに刺激されて高性能光学部品が強く要求されるにつれて、光ファイバー、光回路素子、屈折率変化形レンズ系、高性能回折格子など、空間的に連続的な屈折率変化を伴った媒質中を伝播する光波の工学的応用は、ますますその重要性を増している。

複雑な波面を持った波動の振舞いは、古くから光学や音響学の分野の研究対象とされ、光線の観点からの解析法として幾何光学 (Geometrical Optics あるいは Ray Optics)、波動の観点からの解析法として波動光学 (Wave Optics) が知られている。また、電磁波に関する Maxwell の方程式において、波長が無限小となった極限として、光線方程式 (Ray Equation) が得られることも知られている¹⁾。そのため、従来、光線方程式は波動の概略の振舞いを記述すると理解されており、詳細な振舞いについては光線方程式とは独立に波動方程式 (Wave Equation) を解かなければならないと考えられていた。

他方、初期の量子力学の発展段階において、光線と光波との対応関係は、粒子とこれに伴った波動との関係を見出すための大きな手がかりであった。この際に、媒質に固定された直角座標の任意の一つ x を特定の座標軸に選び、この x に関して光線方程式を整理するとき、光路に関しても粒子の運動に関する場合と同一形式の Hamilton の方程式が得られていたことは、重要な手がかりの一つであった。その後、量子力学の確立に伴って、量子力学的手法は古典的光学とは独立した体系にまとめられ、量子力学的手法が古典的光波の解析に積極的な意

味で応用された例は稀であった。

1969年に、米国ベル電話研究所の Gloge と Marcuse は、光線と光波との対応関係と粒子と波動との対応関係の類似に基づき、“光線の形式的量子論”を提唱した²⁾。彼等は、媒質に固定された直角座標の一つ x を特定な座標軸に選び、量子力学における時間変数をその座標の空間変数 x で置き換え、量子化により波動方程式が導かれることを示し、量子力学における Planck の定数が“光線の形式的量子論”においては真空中の波長で置き換えられることを示した。しかし、上述の座標の選び方が特殊であるため、光線方程式と波動方程式の一般的な関連を示すに到らず、したがって、光波の解析法における量子力学的手法の適用範囲については一般的な結論を与えていない³⁾。その後、Ray Optics の手法が媒質中を伝播する光波に関する応用上重要な特性を定量的に解析する際に重要であるということが認識され、この方面の研究が積極的に進められた⁴⁾。

本文では、光線の形式的量子論の基礎的事項について記述を試みる。光線方程式において、新たにおのおの光路に個有な媒介変数 τ を定義するならば、特定な直角座標によらなくても一般の広義座標に関して、Newton の運動方程式と同形の光線方程式が得られ、解析力学の手法がそのまま光路の解析に適用されることを示す。この際、光路に関する Hamiltonian の値は常に零となる点が質点運動の場合と異なる。さらに、量子力学と同形の光線量子化条件を承認するならば、Schroedinger の波動方程式が導かれたのと同様にして、光線に対応したスカラー波動方程式が導かれる。その解を求める際には、解析力学と量子力学との対応関係と同様な対応関係が利用できる。

量子力学における消滅・生成演算子、ket ベクトルと

* 東京大学生産技術研究所 第3部

bra ベクトル, 密度行列などは光線の形式的量子論においても定義される。これらの重要な概念とその応用例については, 別の機会に述べることにしたい。

2. Newton 形の光線方程式

屈折率 n が位置ベクトル \vec{r} のみの関数であるような等方性媒質中において, 図 1 に示したように一点 P_1 から発して他点 P_2 に到る一本の光路 C は次の変分原理 (Fermat の原理) によって定められる。

$$\delta \int_C n ds = 0, \quad n = n(\vec{r}) \quad (1)$$

ここに, δ は変分記号, s は光路 C に沿って P_1 から測った長さである。媒質に固定された直角座標系による \vec{r} の成分を (x, y, z) とすれば, P_1 と P_2 とを結ぶ任意の曲線の方程式は, 媒介変数 u を用いて

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u) \quad (2)$$

と表される。ここに u は, P_1 と P_2 とが曲線の形によらずに一義的に定まるように選ぶものとする。光路 C はこのような曲線の一つである。 u に関する微分を $'$ で表すならば,

$$\left. \begin{aligned} ds &= (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} du = \sqrt{(\vec{r}')^2} du, \\ \delta n &= \delta \vec{r} \cdot \nabla n, \quad \delta \vec{r}' = (\delta \vec{r})' \end{aligned} \right\} (3)$$

ここに, ∇ は直角座標成分が $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ であるようなベクトル演算子である。

式(3)を用いて変分原理(1)の Euler の方程式を求めると, 次の光線方程式が得られる。

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (4)$$

\vec{r} は光路上の任意の一点の位置ベクトル, n と ∇n はそれぞれその点における屈折率と屈折率傾斜を表す。式(4)は古典幾何光学の基本方程式であって, 光線の追跡の問題は, 与えられた初期条件のもとでこの方程式を解くことに帰着する。

式(4)を Newton の運動方程式と同形の形式に変形

$$\left. \begin{aligned} n &= n(\vec{r}) \\ &= n(x, y, z) \end{aligned} \right\}$$

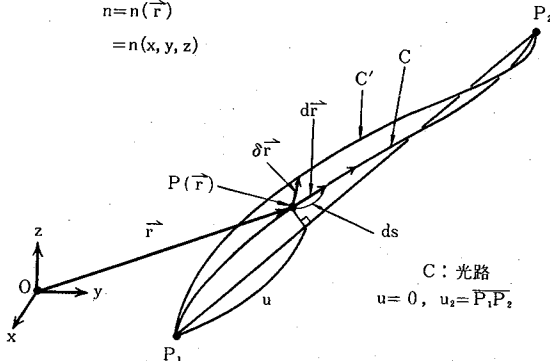


図 1 不均質屈折率媒質中の光路
C: 光路, C': C の僅かな変形
(媒介変数 u の選択の一例)

するため, 次の式

$$\frac{d}{d\tau} = n \frac{d}{ds}, \quad \text{すなわち} \quad \tau = \int_C \frac{1}{n} ds \quad (5)$$

によって定義された変数 τ を導入する。この τ は光路 C が次々と定まると同時に定まっていく変数であるので, 光路 C に個有な変数と考えなければならない。式(4)の両辺に n を乗じ, 式(5)を用いて表すならば,

$$\dot{\vec{r}} = \nabla \frac{n^2}{2}, \quad \cdot = \frac{d}{d\tau} \quad (6)$$

ここに, \cdot は τ による微分を表すものとする。

τ を質点運動における時間変数と見なすならば, 式(6)は Potential $-n^2/2$ の保存力場に置かれた単位質量の質点に関する Newton の運動方程式と同一形式を持っている。したがって, 光路の決定には解析力学の手法が直ちに適用できることが明らかであろう。この際に, 直角座標の特定の座標に比例するように τ を選ぶ必要はまったくない。また, 非相対論的質点運動では, 時間は一つの独立な座標 (時間軸) として与えられていたので, すべての可能な運動に共通であったが, 光路の解析における τ は光路に依存した変数であるので, それぞれの光路にはそれぞれの τ が付属している。すなわち, τ は相対論的質点運動の Minkovsky 空間における world line に沿った長さに対応する量である。しかし, このことは解析力学の手法を適用するに当たって障害となるものではない。

3. Hamilton 形の光線方程式

解析力学の手法に従って, まず, Lagrangian \mathcal{L} は次のように定義される。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}})^2 + \frac{1}{2} n^2, \quad n = n(\vec{r}) \quad (7)$$

\vec{r} は光路上の一点の位置ベクトルであり, s は光路に沿った長さであるから, $(d\vec{r})^2$ の値と $(ds)^2$ の値は相等しい。すなわち,

$$(\dot{\vec{r}}/ds)^2 = 1 \quad (8)$$

したがって, $\dot{\vec{r}} = n d\vec{r}/ds$ の関係より, 式(7)で定義された \mathcal{L} の値は常に n^2 に等しい。この結果から, 質点運動における Hamilton の原理は, 光路においては式(1)の Fermat の原理にほかならないことが判る。式(7)における \mathcal{L} のように, 一般に \vec{r} と $\dot{\vec{r}}$ の関数は力学では Dynamical Variable と呼ばれるものであるが, このような関数を扱うときには, その関数形と関数値とを明確に区別していることが重要である。

一般に自由度 3 の広義座標系 (q_1, q_2, q_3) (略して q と記す) を用いた場合, 直角座標 x, y, z が q_i ($i=1, 2, 3$) で表され, τ を陽に含まないならば, $(\dot{\vec{r}})^2$ は q と \dot{q} との関数であるが, \dot{q} に関しては二次齊次式である。また, n^2 は q の関数であって \dot{q} を含まない。このように q, \dot{q} で表した \mathcal{L} の関数形を $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ と表すことにすると, 広義

座標 q_i に共役な運動量 p_i は次式によって定義される。

$$p_i = \partial \mathcal{L}(q, \dot{q}) / \partial \dot{q}_i, \quad i=1, 2, 3 \quad (9)$$

ここに、「運動量」という質点力学の術語を借用して p_i を定義したが、もともと式(7)の \mathcal{L} は元を持たない量であるから p_i は力学における運動量の元を持った量ではない。 p_i を要素とし広義座標から導かれる単位ベクトルを用いて構成された運動量ベクトル \vec{p} は、実際には、光路の方向を示すベクトルであって波数ベクトルに比例するものである。

以下では、式(7)において $(\dot{r})^2$ は q の二次斉次式であり n^2 は q を含まない場合(すなわち、 q を x, y, z で表した式に r が陽に含まれない場合)をもつば扱うことにする。このとき、 p_i ($i=1, 2, 3$) (略して p と記す) は q の一次斉次式となるから、これらを \dot{q}_i について解くことにより、 \dot{q}_i は p の一次斉次式で表される。

光路の Hamiltonian \mathcal{H} は次の式で定義される。

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (10)$$

ただし、この式に現れる \dot{q} は p と q とで表すものとする。前記の場合には、

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2} (\dot{r})^2 - \frac{1}{2} n^2 \quad (11)$$

となる。この \mathcal{H} の値は式(8)により常に零である。この性質は式(5)に由来するものであって光路に特有な性質であり、非相対論的質点運動と著しく異なるところである。光路を決定する Hamilton 形の光線方程式は式(11)の $\mathcal{H}(q, p)$ を用いて次式で表される。

$$\dot{q}_i = \partial \mathcal{H} / \partial p_i, \quad \dot{p}_i = -\partial \mathcal{H} / \partial q_i, \quad i=1, 2, 3 \quad (12)$$

q, p の任意の関数 $F(q, p)$ の変化率を記述する微分方程式は、次のように表される。

$$\dot{F} = (F, \mathcal{H}) \quad (13)$$

ここに、 u, v を共に q, p の関数とすると、Poisson の括弧式 (u, v) は次式で定義される。

$$(u, v) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) \quad (14)$$

以上、光路と質点運動との差異のみに重点を置いて、解析力学の手法によって Hamilton 形の光線方程式(12) (あるいは(13))が得られることを略述した。解析力学の基礎的事項については力学の書物⁹⁾を参照されたい。

4. 光路の決定法

屈折率 n が座標の関数として与えられたとき、光路の決定は、与えられた初期条件のもとで式(6)あるいは式(12)を解くことに帰着する。一般には解析的な解を求めることができないので、簡単な座標系を選んで数値的にこれらの微分方程式を逐次に解いていかなければならない。このようにして、 r を媒介変数とした形で光路が決定される。

解析的な解が求まる場合は特例であるが、このような特例は解に関する見通しの良さと厳密さの点で極めて重要である。以下では、解析的な解を求める方法について略述する。

一般に、Poisson の括弧式(14)を用いたとき、 $(u, v) = 0$ ならば u と v とは包含関係にあると呼ばれる。式(13)によれば、 \mathcal{H} と包含関係にあるような関数 $F(q, p)$ を求めることができたならば、その F は r の如何に拘らず一定でなければならない。このような F は中間積分と呼ばれる。力学におけるエネルギー積分、運動量積分などは中間積分の例である。

力学においては、自由度に等しい数の、互いに包含関係にある独立な中間積分を見出すことができる場合には、積分計算によって運動を決定することができることが知られている。光路においても、解析的な解として光路を決定するための条件は、自由度に等しい数の、互いに包含関係にある独立な中間積分を見出すことである。

次に \mathcal{H} と包含関係にある関数(中間積分)を求める際に有用な事項を列記する。

(a) \mathcal{H} 自身は中間積分である。実は式(11)の下で述べたように、 \mathcal{H} が等しくなる定数は零である。

(b) 特定の k について、 \mathcal{H} に q_k が陽に含まれていないならば、 q_k に共役な運動量 p_k は中間積分である。 q_k は循環座標と呼ばれる。

(c) (1, 2, 3) の中の特定の二つを k とし k 以外を総括して j と表したとき、 \mathcal{H} が

$$\mathcal{H}(q, p) = \mathcal{H}(\mathcal{H}(q_k, p_k), q_j, p_j) \quad (15)$$

の形に書き得るならば、 $\mathcal{H}(q_k, p_k)$ は中間積分である。

(d) 独立な 2 つの中間積分 $u(q, p), v(q, p)$ が \mathcal{H} 以外に見い出され、Poisson の括弧式 (u, v) が恒等的に零ではないならば、 (u, v) は中間積分である。

正準変換(Canonical Transformation)は求解においても解の性質を知る上においても重要事項であるが、本文では割愛することにする。

例題 1

直角座標系 $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$ において、屈折率分布が次の式、

$$n^2 = n_0^2 (1 - \epsilon_x^2 x^2 - \epsilon_y^2 y^2), \quad n_0, \epsilon_x, \epsilon_y \text{ は定数} \quad (16)$$

で与えられた場合は、Graded Index Fiber あるいはレンズ様媒質と呼ばれる不均質媒質の最も重要な一例である。

この場合には、式(7)より \mathcal{L} は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} n_0^2 (1 - \epsilon_x^2 x^2 - \epsilon_y^2 y^2) \quad (17)$$

で与えられるので、共役な運動量は式(9)より

$$p_x = \dot{x}, \quad p_y = \dot{y}, \quad p_z = \dot{z} \quad (18)$$

となる。これらを用いて式(11)の \mathcal{H} を q, p で表現するならば、

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_x^2 + n_0^2 \varepsilon_x^2 x^2) + \frac{1}{2}(p_y^2 + n_0^2 \varepsilon_y^2 y^2) + \frac{1}{2} p_z^2 - \frac{1}{2} n_0^2 \quad (19)$$

となる。よって光線方程式(12)は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= p_x, & \dot{y} &= p_y, & \dot{z} &= p_z, \\ \dot{p}_x &= -n_0^2 \varepsilon_x^2 x, & \dot{p}_y &= -n_0^2 \varepsilon_y^2 y, & \dot{p}_z &= 0 \end{aligned} \right\} (20)$$

式(19)に中間積分に関する事項を適用してみると、 z, p_z については(b)が、 x, p_x の組と y, p_y の組についてはそれぞれに対して(c)が適用可能である。したがって、 c_x, c_y, c_z を光路の定数とすると、

$$\left. \begin{aligned} p_x^2 + n_0^2 \varepsilon_x^2 x^2 &= c_x^2, & p_y^2 + n_0^2 \varepsilon_y^2 y^2 &= c_y^2, \\ p_z &= c_z, & c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 &= n_0^2 \end{aligned} \right\} (21)$$

最後の関係は(a)によって求められる。

直角座標を用いた場合には一般に、

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \dot{x} = n dx/ds, & p_y &= \dot{y} = n dy/ds, \\ p_z &= \dot{z} = n dz/ds \end{aligned} \right\} (22)$$

であるから、幾何学的考察により p は光路の方向余弦にその点の屈折率を乗じたものである。

$z=0$ における量に添字 0 を付して表示すると、 $z=0$ における入射点と入射方向によって x_0, y_0, p_{x0}, p_{y0} は確定するので、式(21)の第 1, 2 式より光路の定数 c_x^2, c_y^2 が確定する。したがって、式(21)の第 4 式より c_z^2 も確定する。 c_z の符号は $z=0$ において光線が $+z$ 方向に入射しているとき正で、逆のときには負となる。

本例題では、光線方程式(20)が定係数一次斉次常微分方程式であるので、これを直接積分して光路を決定することも容易である。式(20)の第 3 式と式(21)の第 3 式より $\dot{z} = c_z$ であるから

$$n dz/ds = c_z dz/dz \quad (22')$$

したがって、式(20)の第 1, 4 式より、

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} x \\ p_x \end{bmatrix} = \frac{1}{c_z} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -n_0^2 \varepsilon_x^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p_x \end{bmatrix} \quad (23)$$

$z=0$ における初期値 x_0, p_{x0} を用いて上式を積分すると、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ p_x \end{bmatrix} &= \exp \left\{ \frac{1}{c_z} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -n_0^2 \varepsilon_x^2 & 0 \end{bmatrix} z \right\} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_{x0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(n_0 \varepsilon_x z / c_z) & \frac{1}{n_0 \varepsilon_x} \sin(n_0 \varepsilon_x z / c_z) \\ -n_0 \varepsilon_x \sin(n_0 \varepsilon_x z / c_z) & \cos(n_0 \varepsilon_x z / c_z) \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} x_0 \\ p_{x0} \end{bmatrix} \quad (24) \end{aligned}$$

ここに、第 1 の表現における指数関数記号 $\exp\{A\}$ は、 A が行列である場合には冪級数展開形式で定義されるものとする。 y, p_y についても式(24)と同形の結果が得られ、

この結果と式(24)を合わせると光路が決定される。

式(24)によれば、 x, p_x は z に関して正弦波状に変化し、その周期と振幅は媒質定数 n_0, ε_x と初期値 x_0, p_{x0} および c_z で定まる。前述のとおり c_z は x_0, p_{x0} のみならず y_0, p_{y0} の関数であるから、光路の x 成分を表す x, p_x は、 y 成分の初期値 y_0, p_{y0} の影響を受ける。しかしながら、式(21)の第 4 式によれば、 x_0, p_{x0}, y_0, p_{y0} が共に微小なときには $c_z = \pm n_0$ と近似できる。このような近軸近似が可能な範囲では (x, p_x) と (y, p_y) とを全く独立に扱うことができるので、問題を単純化することができる。

例 題 2

球座標 $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi)$ において、屈折率分布が次の式

$$n^2 = n_0^2 / \{1 + (r/a)^2\}^2, \quad n_0, a \text{ は定数} \quad (25)$$

で与えられる場合は、Maxwell's Fish Eye と呼ばれる完全結像系である。

この場合には、 $(\vec{r})^2$ が

$$(\vec{r})^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi} \sin \theta)^2 \quad (26)$$

で与えられることに留意して式(7)より \mathcal{H} を求め、式(9)より (r, θ, φ) に共役な運動量を求めると

$$p_r = \dot{r}, \quad p_\theta = r^2 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \quad (27)$$

となる。これを用いて式(11)の \mathcal{H} を q, p で表現するならば、

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \{ p_r^2 + (p_\theta^2 + p_\varphi^2 / \sin^2 \theta) / r^2 \} - \frac{1}{2} n^2(r) \quad (28)$$

ここに、 $n^2(r)$ は n^2 が r のみの関数であることを示す。光路を決定する光線方程式(12)は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= p_r, & \dot{\theta} &= p_\theta / r^2, & \dot{\varphi} &= p_\varphi / (r \sin^2 \theta), \\ p_r &= (p_\theta^2 + p_\varphi^2 / \sin^2 \theta) / r^3 + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} n^2(r), \\ p_\theta &= p_\theta^2 \cos \theta / (r^2 \sin^3 \theta), & p_\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} (29)$$

式(28)に中間積分に関する事項を適用してみると、 φ, p_φ については(b)が適用される。そこで式(28)の p_φ が定数であると見なすと θ, p_θ について(c)が適用される。このようにして、中間積分は次のとおりに求められる。

$$\left. \begin{aligned} p_\varphi &= c_\varphi, & p_\theta^2 + c_\varphi^2 / \sin^2 \theta &= c_\theta^2, \\ p_r^2 + c_\theta^2 / r^2 - n^2(r) &= 0 \end{aligned} \right\} (30)$$

ここに、 c_φ, c_θ は光路の定数である。式(30)の第 1, 2 式および式(29)の第 2, 3 式を用いると、

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}} = \pm (c_\theta^2 - c_\varphi^2 / \sin^2 \theta)^{1/2} \frac{\sin^2 \theta}{c_\varphi} \quad (31)$$

この式は $t = \cot \theta$ とおくことにより直ちに積分されて次の式を得る。

$$\frac{\cot \theta}{\sin(\varphi - \varphi_0)} = \frac{\sqrt{c_\theta^2 - c_\varphi^2}}{c_\varphi} \quad (= \tan i) \quad (32)$$

図 2 の球座標系において球面幾何学の公式を用いると、光路は傾斜角 i の平面曲線となっていることが知られ

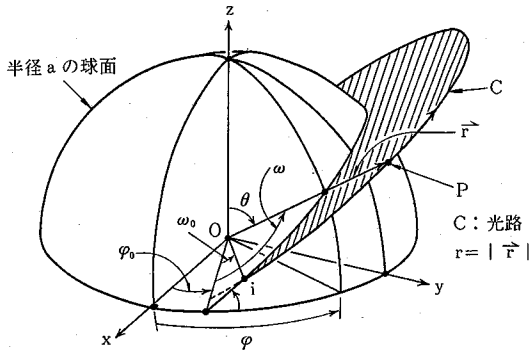


図2 球対称屈折率分布の媒質中の光路
i: 光路傾斜角 ω: 離角

る。i の値は式(32)で定められ、この光路が z の正の向きに z=0 の面 (θ=π/2) を横切るときその交線の φ 座標が定数 φ₀ である。平面上の曲線の形は、図示の離角 ω と動径 r の関係で表現される。離角 ω は、

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega &= \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) \\ \sin \omega &= \cos \theta / \sin i \end{aligned} \right\} (33)$$

よって、θ, φ と関係づけられ、また c_φ は

$$c_\varphi = c_0 \cos i \quad (34)$$

次に、平面上の光路を求める。式(29)の第1, 3式と式(30)の第1, 3式を用いると、

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{\pm(n^2(r) - c_0^2/r^2)^{1/2}}{1 + \tan^2 i \sin^2(\varphi - \varphi_0)} \cdot \frac{r^2}{c_\varphi} \quad (35)$$

式(32), (33)を用いると、

$$\left. \begin{aligned} 1 + \tan^2 i \sin^2(\varphi - \varphi_0) &= 1 / \sin^2 \theta, \\ d\varphi &= d\omega \cdot \cos i / \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} (36)$$

であるから、式(34)を用いて式(35)は、

$$\frac{dr}{d\omega} = \pm \{n^2(r) - c_0^2/r^2\}^{1/2} r^2 / c_0 \quad (37)$$

この式に式(25)を代入した微分方程式は t=(r²-a²)/ar とおくことにより積分されて、次の結果を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sin(\omega - \omega_0) &= A(r^2 - a^2)/(ar), \\ A &= c_0 / (n_0^2 a^2 - 4c_0^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} (38)$$

ここに、積分定数 ω₀ は r が増大しながら r=a となる離角である。この光路は原点を囲む円であって、ω=ω₁ のとき r=r₁ を通る任意の光路は、必ず ω=ω₁+π において r=a²/r₁ を通るという性質を持っている。また光路を表す円の半径およびその円の中心と原点との距離は、それぞれ a²n₀/(2c₀) および a/(2A) となる。

5. 光線方程式の量子化による波動方程式の導出

媒質の屈折率が位置の関数 n(r) であるならば、Hamiltonian $\mathfrak{H}(q, p)$ は式(11)によって与えられる。光路は、 \mathfrak{H} を用いて Hamilton 形光線方程式(12)によって決定されるので、この媒質中における光路の性質は、すべてこの \mathfrak{H} に含まれていると考えてよい。さらに、 \mathfrak{H} については式(11)の下および前々節(a)で述べたように、

次の関係が常に成立している。

$$\mathfrak{H}(q, p) = 0 \quad (39)$$

本節では上式に量子化条件を加えることによって、波動光学の基幹となるスカラー波動方程式が導かれることを述べよう。

光線の量子化においても量子力学の手法を踏襲し、位置座標 q, 運動量 p, それらの関数はすべて演算子として扱うものとし、直角座標を用いたときの p, q の成分に対して次の交換関係が成立することを要請する。すなわち、光線に関する量子化条件は、

$$\left. \begin{aligned} [q_i, q_k] &= [p_i, p_k] = 0 \\ [q_i, p_k] &= -j\lambda \delta_{ik} \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (i=1, 2, 3) \\ (k=1, 2, 3) \end{matrix} \quad (40)$$

δ_{ik} は Kronecker のデルタ

ただし、j=√-1, λ=λ₀/(2π), λ₀ は真空中の波長であり、真空中の波数 k₀ は k₀=2π/λ₀=(λ)⁻¹ で与えられる。また、演算子 u, v があるときそれらの交換子 [u, v] は次式で定義される。

$$[u, v] = uv - vu \quad (41)$$

式(40)の交換関係式(量子化条件)を認めるならば、量子力学における手法と同様にして、演算子 \hat{r} の位置座標表示は、次の変換によって得られる⁶⁾。

$$\hat{r} \rightarrow j\lambda \nabla \quad (42)$$

式(11)の \hat{r} に上式を代入し、式(39)を演算子方程式と見なすと次の波動方程式が得られる。

$$\left(-\frac{1}{2}\lambda^2 \nabla^2 - \frac{1}{2}n^2\right)\psi = 0$$

すなわち、(∇²+k₀²n²)ψ=0 (43)

ここに、ψ は位置座標表示の波動関数であって、位置座標のスカラー関数である。式(43)は量子力学における Schrodinger の方程式にほかならない。ψ*ψ=|ψ|² は光線の(時間平均)存在確率密度関数と考えられる。* は共役複素数を表す。

Hamilton 形光線方程式(12)から中間積分

$$F(q, p) = C_F \quad (44)$$

が得られた場合には、波動関数 ψ_F について

$$F(q, p)\psi_F = C_F\psi_F \quad (45)$$

なる波動方程式が得られる。ψ_F, C_F は演算子 F(q, p) に関する固有関数、固有値である。

従来、波動方程式において波長を無限小としたときに光線方程式が導かれるという事実が強調されており、波動方程式と比較して光線方程式には著しい近似が含まれていると考えられてきたようである。しかし、実際には上述のとおり、量子化条件(40)を承認するならば、光線方程式の中間積分の一つである式(39)からスカラー波動方程式が導出できるのであるから、この量子化条件のもとでは光線方程式はスカラー波動方程式と少なくとも同等なものと考えなければならない。ただし、光線方程式

の中間積分が求まった後に、量子化条件下における光線の振舞いを定めるためには、その中間積分に対応した波動方程式を解かなければならない。なお、ここに示した波動方程式の導出法は一般の広義座標について成立することに注意されたい。

6. 波動方程式の解法

屈折率が位置の関数 $n(\vec{r})$ で与えられたとき、波動方程式(43)は一般には偏微分方程式となる。このため、常微分方程式で記述された光線方程式と比較して、波動方程式の数値解法は著しく複雑であり、また計算精度も劣っている。それゆえに波動方程式においては、解析的な解が得られる場合はもとより、常微分方程式に帰着されるような特例的な場合は、厳密性と見通しの良さの点で極めて重要な場合である。屈折率分布が複雑であるためこのような特例に当たらない場合には、まず、このような特例によって近似する手段を見出し、微小な違いについては摂動法を用いて波動の振舞いを考察するのが普通である。

常微分方程式に帰着できる場合の典型は、適当な直交曲線座標系を用いることによって、波動方程式が変数分離形となる場合である。最も簡単に重要な座標系として、直角座標系 (x, y, z) 、円柱座標系 (r, φ, z) 、球座標系 (r, θ, φ) をとると、これらの座標系における $(\vec{r})^2$ の表現式は、

$$\left. \begin{aligned} \text{直角座標系} \quad (\vec{r})^2 &= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \\ \text{円柱座標系} \quad (\vec{r})^2 &= p_r^2 + p_\varphi^2/r^2 + p_z^2 \\ \text{球座標系} \quad (\vec{r})^2 &= p_r^2 + p_\theta^2/r^2 + p_\varphi^2/(r \sin \theta)^2 \end{aligned} \right\} (46)$$

となる。これらの形式に合わせて、屈折率分布が次式のように定められていると仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \text{直角座標} \quad n^2 &= u(x) + v(y) + w(z) \\ \text{円柱座標} \quad n^2 &= u(r) + v(\varphi)/r^2 + w(z) \\ \text{球座標} \quad n^2 &= u(r) + v(\theta)/r^2 + w(\varphi)/(r \sin \theta)^2 \end{aligned} \right\} (47)$$

ここに u, v, w は () 内の座標のみの任意関数である。式(46)、(47)を用いて Hamiltonian \mathfrak{H} を構成してみると、4 節で述べたところから従って容易に中間積分が求められることがわかる。したがって前節で述べたとおり直ちに分離された形の波動方程式が求められる。すなわち、式(47)の形で屈折率が与えられている場合には、たかだか常微分方程式を解くことによって、波動方程式の解が得られる。

例題 3

4 節の例題 1 に挙げた媒質中の波動を扱ってみよう。中間積分は式(21)のとおりであるから、これらから変数分離された波動方程式が直ちに得られる。

直角座標系では、式(20)の第 1, 2, 3 式は常に成立するので、式(42)を適用すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (x, y, z) = (p_x, p_y, p_z) \\ &\rightarrow j\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (48)$$

式(21)の第 1 式に現れた演算子 p_x^2 については、

$$\begin{aligned} (\vec{r})^2 &= x^2 + y^2 + z^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \\ &\rightarrow -\lambda^2 \nabla \cdot \nabla \end{aligned} \quad (49)$$

であるから、 p_x^2 は $-\lambda^2 \nabla \cdot$ の x に関する微分演算子と ∇ の x 成分の積である。すなわち

$$p_x^2 \rightarrow -\lambda^2 \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} = -\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (50)$$

である。直角座標系ではこのように p_x^2 は式(48)から得られた $p_x = j\lambda \partial/\partial x$ の単なる自乗となるが、一般の直交曲線座標系では $\nabla \cdot$ に含まれる微分演算子と ∇ の微分演算子とは異なることに注意しなければならない。式(50)を用いると、式(21)の第 1 式より、次の常微分方程式が得られる。

$$d^2 \psi_x / dx^2 + k_0^2 (c_x^2 - n_0^2 \epsilon_x^2 x^2) \psi_x = 0 \quad (51)$$

ここに ψ_x は x に関する固有関数、 c_x^2 は ψ_x の固有値である。

式(51)は Weber の微分方程式と呼ばれるものの一種である。式(51)は、次の変数変換、

$$\left. \begin{aligned} \psi_x &= \phi_x(x) \exp(-ax^2), \quad a = n_0 k_0 \epsilon_x / 2, \\ x &= \beta t, \quad 4a\beta = 2 \end{aligned} \right\} (52)$$

によって、次の Hermite の微分方程式となる。

$$\left. \begin{aligned} d^2 \phi_x / dt^2 - 2td\phi_x / dt + 2n\phi_x &= 0, \\ 2n &= \beta^2 (k_0^2 c_x^2 - 2a) \end{aligned} \right\} (53)$$

$x \rightarrow \infty$ のとき $\phi_x \rightarrow 0$ となるという境界条件を与えるならば、式(53)の n は整数値 ($n \geq 0$) をとらなければならないので、 ϕ_x は t に関する Hermite の多項式 $H_n(t)$ に定数 N_{xn} を乗じたものとなる。

$$\psi_x(t) = N_{xn} H_n(t)$$

定数 N_{xn} は次の正規化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_x|^2 dx = 1 \quad (54)$$

によって求められる。このようにして求めた ψ_x は量子数 n により特徴づけられるので ψ_{xn} と記すと、

$$\left. \begin{aligned} \psi_{xn}(x) &= N_{xn} H_n(\sqrt{n_0 k_0 \epsilon_x} x) \exp(-n_0 k_0 \epsilon_x x^2 / 2) \\ N_{xn} &= \{\sqrt{n_0 k_0 \epsilon_x} / (\sqrt{\pi} 2^{n/2} n!)\}^{1/2} \\ c_{xn}^2 &= (2n+1) n_0 \epsilon_x / k_0 \end{aligned} \right\} (55)$$

c_{xn}^2 は式(21)より、演算子 $p_x^2 + n_0^2 \epsilon_x^2 x^2$ の固有関数 ψ_{xn} に属する固有値である。

式(21)の第 2 式からもまったく同様にして固有関数 $\psi_{ym}(y)$ とその固有値 c_{ym}^2 が求められる。ここに m は演算子 $p_y^2 + n_0^2 \epsilon_y^2 y^2$ の固有関数の量子数である。

式(21)の第 3 式に式(48)を適用すると、

$$d\psi_z / dz + jk_0 c_z \psi_z = 0 \quad (56)$$

これより、直ちに、 N_z を正規化定数として次式を得る。

$$\psi_z(z) = N_z \exp(-jk_0 c_z z) \quad (57)$$

C_x, C_y, C_z の間には式 (21) の第 4 式の関係があるから、量子数 n, m が与えられたとき C_z の値 C_{znm} は

$$C_{znm} = \pm [n_0^2 - \{(2n+1)\epsilon_x + (2m+1)\epsilon_y\} n_0 / k_0]^{1/2} \quad (58)$$

N_z を定める正規化条件として、単位長を積分領域とすることにし、

$$\int_0^1 |\psi_z|^2 dz = 1 \quad (59)$$

を用いるならば、

$$N_{znm} = 1 \quad (60)$$

式 (58), (60) を用いると、演算子 p_z に関する固有関数の中量子数 n, m を持つもの ψ_{znm} は、

$$\psi_{znm}(z) = N_{znm} \exp(-jk_0 C_{znm} z) \quad (61)$$

したがって、波動方程式の解は

$$\left. \begin{aligned} \psi(x, y, z) &= \sum_{n,m} A_{nm} \psi_{nm}(x, y, z) \\ \psi_{nm}(x, y, z) &= N_{xn} N_{yn} N_{znm} \psi_{xn}(x) \psi_{ym}(y) \psi_{znm}(z) \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

ここに、 A_{nm} は任意係数である。

本例題では固有関数 (55) ($\psi_{ym}(y)$ も同様) が得られたが、これらの関数は中間積分 (21) に準拠していることに注意しなければならない。式 (21) では、 c_x^2, c_y^2 が与えられているのみで、光線の初期値に関する情報は完全には含まれていない、すなわち初期値 x_0, y_0, p_{x0}, p_{y0} の中たとえば、 x_0, y_0 はまったくランダムであるような場合を扱っているのである。式 (55) の関数は量子数 n, m について正規直交性を持つ完備な関数系 $\{\psi_{xn}\psi_{ym}\}$ を構成することを示すことができるので、ある z_0 における初期条件 $\psi(x, y, z_0)$ が与えられたとき $\psi(x, y, z_0)$ を $\{\psi_{xn}\psi_{ym}\}$ で展開することは常に可能である。しかし、初期条件が与えられた波動の振舞いを知りたいとき、この関数系で扱うことは必ずしも最も適切とは限らない。 c_x^2, c_y^2 のほかに情報が与えられた場合、それらの情報を含んだ形で完備な関数系が求め得るならば、この関数系を用いる方が適切である場合が多い。

例題 4

4 節の例題 2 に挙げた媒質中の波動を扱う。中間積分は式 (30) であるから、これらに式 (42) を適用して分離された形の波動方程式が求められる。

前例題の式 (48) に対応する関係は次のとおりである。

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (r, r\hat{\theta}, r\hat{\phi} \sin \theta) = (p_r, p_\theta / r, p_\phi / (r \sin \theta)) \\ &\rightarrow j\lambda \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (63)$$

ϕ 成分については $p_\phi \rightarrow j\lambda \partial / \partial \phi$ であるから、式 (30) の第 1 式より、 ϕ 成分に関する常微分方程式は、

$$d\psi_\phi / d\phi = -jk_0 C_\phi \psi_\phi \quad (64)$$

ϕ に関する一価性を条件とし、さらに、

$$\int_0^{2\pi} |\psi_\phi|^2 d\phi = 1 \quad (65)$$

によって正規化定数を定めるならば、 ϕ に関する固有関数は、

$$\psi_{\phi m}(\phi) = (2\pi)^{-1} \exp(-jm\phi) \quad (66)$$

$$m = k_0 C_\phi m, \quad m \text{ は定数}$$

となる。 m は z 軸周りの角運動量に対応した量子数である。

次に、式 (30) の第 2, 3 式を考える。球座標では $(\vec{r})^2$ については式 (46) の第 3 式が成立し、 $\nabla \cdot, \nabla \cdot \nabla$ については

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \nabla \cdot \nabla &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

であるから、これらと $(\vec{r})^2 \rightarrow -\lambda^2 \nabla \cdot \nabla$ とを比較すると、式 (50) の下で述べたところによって、

$$\begin{aligned} p_r^2 &\rightarrow -\lambda^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \\ p_\theta^2 &\rightarrow -\lambda^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (68)$$

$$p_\phi^2 \rightarrow -\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

が得られる。

式 (30) の第 2 式に式 (68) の第 2 の関係を代入すると、 θ 成分に関する次の常微分方程式が得られる。

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \psi_\theta + k_0^2 \left(c_\theta^2 - \frac{c_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right) \psi_\theta = 0 \quad (69)$$

$t = \cos \theta$ と置いて変形すると Legendre の陪微分方程式が得られる。 $\theta = 0, \pi$ に特異点がないことを境界条件とし、

$$\int_0^\pi |\psi_\theta|^2 \sin \theta d\theta = 1 \quad (70)$$

によって正規化定数を定めると次の波動関数を得る。

$$\begin{aligned} \psi_\theta^l(\theta) &= \{(l+|m|)! / (2l+1)! / (2(l+|m|))\}^{1/2} \\ &\quad \times P_l^m(\cos \theta) \end{aligned} \quad (71)$$

$P_l^m(t)$ は t に関する Legendre の陪関数であり、 ψ_θ^l の l, m は ψ_θ が属している量子数を示す記号である。 c_θ^2 と量子数 l との関係は、

$$l(l+1) = k_0^2 c_\theta^2, \quad |m| \leq l \quad (72)$$

この式の第 2 の関係は、式 (32) における $c_\theta^2 \geq c_\phi^2$ に対応した関係であって、同一の l の値に対して一般には複数箇の m の値が存在し得ることを示している。 l は全角運動量に対応した量子数である。

式 (30) の第 3 式に式 (68) の第 1 の関係を代入すると、 r 成分に関する次の微分方程式が得られる。

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \psi_r + k_0^2 \left(n^2(r) - \frac{c_\theta^2}{r^2} \right) \psi_r = 0 \quad (73)$$

ここに $n^2(r)$ は式 (25) で与えられる。上式において、

$$\left. \begin{aligned} t &= [1 - (r/a)^2] / [1 + (r/a)^2] \\ \psi_r &= (a/r)^{1/2} \phi \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

なる変数変換を行い式(72)を用いると、次の Legendre の陪微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt}(1-t^2)\frac{d\phi}{dt} + \left(\nu(\nu+1) - \frac{(l+1/2)^2}{1-t^2}\right)\phi = 0 \quad (75)$$

ここに、

$$\nu(\nu+1) = k_0^2 n_0^2 a^2 / 4 \quad (76)$$

$r=0, \infty$ において発散しないという境界条件を満足する解を探してみると、 k を非負の整数とすると、任意係数を除いて次の解が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \phi(t) &= P_{l+k+1/2}^{l+1/2}(\cos u) \\ l+k+1/2 &= \nu \\ u &= \cos^{-1} t = 2 \tan^{-1}(r/a) \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

ここに、 $P_{l+k+1/2}^{l+1/2}(\sin u)$ は Legendre の陪関数であって、次式で表される。

$$P_{l+k+1/2}^{l+1/2}(\cos u) = \pi^{-1/2} 2^{-l+1/2} (\sin u)^{-l-1/2} \times \sum_{r=0}^l (-1)^r \frac{l!(k+r)! \sin((k+2r+1)u)}{r!(l-r)!(l+k+r+1)!} \quad (78)$$

この右辺の $\sum_{r=0}^l$ の部分は $\theta=0, \pi$ で $(2l+1)$ 次の零を持っているので、 $(\sin u)^{-l-1/2}$ が持つ $(l+1/2)$ 次の極を打ち消している。

式(76)と式(77)の第2式より $l+k$ は次の関係を満足しなければならない。

$$(l+k+1/2)(l+k+3/2) = n_0^2 k_0^2 a^2 \quad (79)$$

この式は、量子数 l が与えられたとき、真空中の波数 k_0 は量子数 k で定められる離散的な値しかとることはできないことを表している。また、 $l+k$ が等しいような (l, k) を持ったすべての姿態は同一の k_0 を持つ (すなわち縮退している) ことが知られる。

式(77)で求められた関数の直交性については若干の注意を要する。本例題のように波動が空間の限られた領域内に閉じ込められているとき、すなわち共振状態の空間が存在するときには、波動の固有関数の直交性について、波動方程式(43)から直接に次の関係が得られる。

$$\int_V n^2 \psi_i^* \psi_j dV = 0 \quad (k_{0i} \neq k_{0j}) \quad (80)$$

ここに n は屈折率、 ψ_i, ψ_j は2つの独立な閉じ込められた姿態を表す固有関数、 $*$ は共役複素数を表す。

本例題では球座標系において n^2 は r のみの関数で与えられているから、 r 成分の波動関数に関する正規直交関係は次のとおりとしてよい。

$$\int_0^\infty \psi_{ri} \psi_{rj} \frac{n^2}{n_0^2} r^2 dr = \delta_{ij}, \quad (81)$$

δ_{ij} は Kronecker のデルタ

この条件によって正規化定数を求めると次式を得る。

$$\psi_{rk}(r) = \left[\frac{2(l+k+1)k!}{a^3(2l+k+1)!} \right]^{1/2} P_{l+k+1/2}^{l-1/2} \left(\frac{1-(r/a)^2}{1+(r/a)^2} \right) \quad (82)$$

式(66)の第1式、式(71)、式(82)より、全体の波動関数は次のとおりとなる。

$$\left. \begin{aligned} \phi(r, \theta, \varphi) &= \sum_{m,l,k} A_{m,l,k} \psi_{m,l,k}(r, \theta, \varphi) \\ \psi_{m,l,k}(r, \theta, \varphi) &= \psi_{\varphi m}(\varphi) \psi_{\theta l}(\theta) \psi_{rk}(r) \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

ここに $A_{m,l,k}$ は任意定数である。量子数 m, l, k と中間積分に現れた定数 c_φ, c_θ および波数 k_0 との関係は式(66)の第2式、式(72)、式(79)で与えられる。

本例題においても、固有関数は中間積分(30)に準拠して求めたので、これらは、 c_φ, c_θ によるのみでは一義的に定まらないような光線の初期値(たとえば φ_0, ω_0) はまったくランダムであると考えた波動に関するものである。

式(38)において、 $c_\theta=0$ のとき $\omega=\omega_0$ 、すなわち光路は原点を通る直線となり、無限の広がりを持つ。式(72)によれば最小正值の c_θ^2 を与えるのは $l=0$ であるから、このような光路の集合に対応した波動は $l=0, m=0$ の固有関数で表される。また、式(38)より、 $c_\theta=n_0 a/2$ ならば、光路は原点を中心とし半径 a の円となる。式(72)、式(79)より l が与えられたとき $n_0^2 a^2 - 4c_\theta^2$ の最小正值は $k=0$ のときに得られるから、このような光路の集合に対応した波動は $k=0$ の固有関数で表される。

7. 結 語

光線の形式的量子論の基本的部分をまとめてみると次のとおりである。

(a) 光路に固有な媒介変数として、屈折率の逆数を光路に沿った長さで積分した量を導入し、この変数を粒子の運動における時間変数に対応させるならば、光線方程式は運動方程式とまったく同形である。このことは、光線の座標を一般の広義座標で記述したときにも成立する。

(b) 光路の Hamiltonian の値は常に零である。

(c) 量子力学における Plank の定数を真空中の波長で置き換えた形で、光線の量子化という概念を導入すると、光線に伴った波動を支配する方程式という意味で、光波に関するスカラー波動方程式が導かれる。

(d) 光線方程式の中間積分が存在するならば、それは光波の性質を定める量子数に対応するものとなる。

消滅・生成演算子、密度行列などの量子力学的手法の応用についても興味深い結果が得られているが、これらに関しては別の機会にゆずることとする。

(1982年12月6日受理)

参 考 文 献

- 1) M. Born and E. Wolf: "Principles of Optics", 3rd edition, Pergamon Press, New York, 1964
- 2) D. Groge and D. Marcuse: "Formal Quantum Theory of Light Rays", J. Opt. Soc. Am., Vol. 59, pp. 1629-

- 1631, 1969
- 3) D. Marcuse, "Light Transmission Optics", Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1972
 - 4) J.A. Arnaud, "Beam and Fiber Optics", Academic Press, New York, 1976
 - 5) 山内恭彦; "一般力学", 岩波書店, 東京, 1950
 - 6) W.H. Louisell; "Radiation and Noise in Quantum Electronics", McGraw Hill, New York, 1964
 - 7) 濱崎, "画像の情報量", 画像技術, Vol. 4, pp. 1~3, 1973
 - 8) 濱崎, 前田; "無損失レンズ様媒体の情報伝送容量", 昭和48年電子通信学会全国大会, 1010
 - 9) 濱崎, 前田; "短波長の波動の取扱い", 電気学会電磁界理論研究会資料, EMT-74-30, 1974

