

乱流促進体まわりの流れの数値予測に関する研究 (第1報)

— 数値計算の安定性に関する考察 —

Study on Numerical Prediction of the Flow around Turbulence Promotors (1st Report)

— Consideration of Numerical Stability —

狩野正徳*・小林敏雄*・石原智男*
Masanori KANO, Toshio KOBAYASHI and Tomo-o ISHIHARA

1. ま え が き

複雑な流体運動、特に乱流の運動は実験データの蓄積を基に実験的に解析される場合が多い。これは流体の運動を支配する方程式が非線形であり、微視的な運動をうまく表現できないことが主な理由である。これに対し流体機器の巨大化あるいは作動流体の多様化に伴い、実験での実験解析が困難な場合が増加し、理論解析あるいは数値解析法の確立が重要となってきた。現状では模型による実験データを基礎に、場合に応じた近似解法を用いて理論的裏付けを行う方法が流体運動の予測の主流であるが、最近の電子計算機の大容量高速化は流体運動の数値シミュレーションの可能性を生じさせ、乱流計算の試みも報告されるようになってきた。^{1)~4)}しかし乱流計算においては、乱流モデルの普遍性が欠如していること、流れの境界が単純でなければならないこと、あるいは数値計算上の不安定性が存在することなど多くの問題を残している。本研究は乱流計算の有力な方法の一つである Large Eddy Simulation (LES) を用い、軸対称管路よりも複雑な流路形状をもつ乱流促進体まわりの流れの数値予測を試みようとするものである。特に大容量数値計算の場合にはその実行に先立ち、安定した精度のよい数値計算のための条件を考察することが必要となる。

本報では、ナビエ・ストークス方程式を SMAC 法を用いて計算する場合について、初期に存在する誤差が時間方向に計算を進めるにしたがい成長あるいは減衰する過程を線形解析の見地から示し、減衰条件を定めるとともに、計算結果の精度を考察することを目的とする。

2. 基礎方程式と差分近似

乱流促進体としては図 1 に示す矩形促進体を対象とし、まず第一に非圧縮性流体の流れの数値解析を試みる。

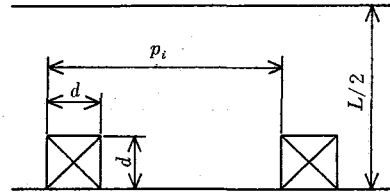


図1 モデル流路

連続の式および運動方程式は

$$\begin{aligned} \partial u_i / \partial x_i &= 0 \\ \partial u_i / \partial t + \partial (u_i u_j) / \partial x_j &= -\partial p / \partial x_i + \nu \partial^2 u_i / \partial x_j^2 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで u_i は x_i 方向の流速、 p は圧力を密度で割った量、 ν は動粘性係数である。差分計算は SMAC 法⁵⁾による。SMAC 法は、圧力をポアソン式によって計算する MAC 法⁶⁾をアルゴリズムの観点から単純化した方法で、圧力に対する境界条件を必要としないため MAC 法よりも複雑な境界をもつ流れ場に適用しやすい。また、MAC 法と同様に移流項には保存形が用いられており、差分式においても運動量および運動エネルギーは保存される。格子形式はスタガー・システムを採用する。すなわち流速は格子面の中央において定義し、圧力は格子間中点において定義する。基礎方程式を空間的には中心差分、時間的には数値粘性のない Adams-Bashforth スキームを用いて差分化する。二次元の場合を例示すると

$$\begin{aligned} (u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n) / \delta t &= 3(F_{cui,j}^n + F_{vui,j}^n) / 2 - (F_{cui,j}^{n-1} + F_{vui,j}^{n-1}) / 2 \\ (v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n) / \delta t &= 3(F_{cvi,j}^n + F_{vvi,j}^n) / 2 - (F_{cvi,j}^{n-1} + F_{vvi,j}^{n-1}) / 2 \\ (u_{i,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^n) / h + (v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j-1}^n) / h &= 0 \\ -F_{cui,j} &= [\{ (u_{i+1,j} + u_{i,j}) / 2 \}^2 \\ &\quad - \{ (u_{i,j} + u_{i-1,j}) / 2 \}^2] / h \\ &\quad + [\{ (u_{i,j+1} + u_{i,j})(v_{i+1,j} + v_{i,j}) / 4 \} \\ &\quad - \{ (u_{i,j} + u_{i,j-1})(v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1}) / 4 \}] / h \end{aligned}$$

* 東京大学生産技術研究所 第2部

研 究 速 報

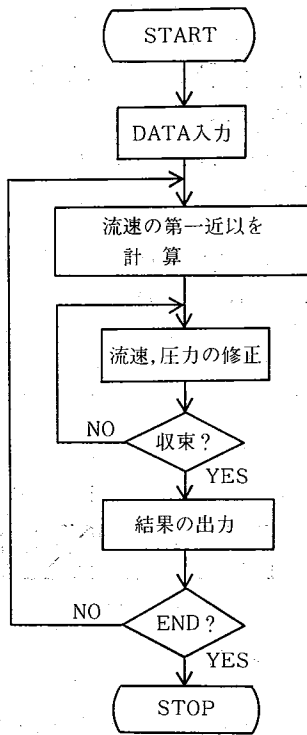


図2 フロチャート

$$\begin{aligned}
 -F_{v_{i,j}} &= \left\{ \left[(v_{i,j+1} + v_{i,j}) / 2 \right]^2 \right. \\
 &\quad \left. - \left[(v_{i,j} + v_{i,j-1}) / 2 \right]^2 \right\} / h \\
 &\quad + \left\{ (v_{i+1,j} + v_{i,j})(u_{i,j+1} + u_{i,j}) / 4 \right\} \\
 &\quad - \left\{ (v_{i,j} + v_{i-1,j})(u_{i-1,j} + u_{i,j}) / 4 \right\} / h \\
 F_{v_{i,j}} &= -(P_{i+1,j} - P_{i,j}) / h \\
 &\quad + \nu (u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) / h^2 \\
 F_{v_{i,j}} &= -(P_{i,j+1} - P_{i,j}) / h \\
 &\quad + \nu (v_{i+1,j} + v_{i,j+1} + v_{i-1,j} + v_{i,j-1} - 4v_{i,j}) / h^2
 \end{aligned} \tag{2}$$

これを与えられた境界条件の下に解くことになる。計算手順を図2に示す。

3. 線形解析による安定性評価

前述のように本研究においては差分計算法としてSMAC法を用い、差分スキームとして空間的には中心差分、時間的にはAdams-Bashforth型スキームを用いる。まず、この差分計算の安定性について線形解析によって評価する⁷⁾。すなわち基礎方程式として三次元 Burgers の式

$$\begin{aligned}
 \partial w / \partial t &= -u_i (\partial w / \partial x_i) + (1/Re) (\partial^2 w / \partial^2 x_i) \\
 (i=1, 2, 3. Re: \text{レイノルズ数})
 \end{aligned} \tag{3}$$

を用い、初期に存在する誤差が計算の実行とともに変化する過程を調べる。Burgersの式はNS方程式や渦度輸送方程式を一般化した形をもち、圧力項がないため扱いやすいうえにほぼ両者の特徴を備えている。ここで $u_i =$ 一定と仮定する。このとき(3)式は線形方程式となり解をフーリエ級数の各波数項の重ね合わせによって求めることができる。したがってここではある波数の解のみについて考えることにする。

初期値が

$$w_0 = A_0 \exp \left\{ j \sum_{i=1}^3 K_i x_i \right\} \quad (j = \sqrt{-1}) \tag{4}$$

であるとき(3)式の解は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
 w &= A_0 \exp \left[- \sum_{i=1}^3 (j K_i u_i \right. \\
 &\quad \left. + K_i^2 / Re) t \right] \exp \left[j \sum_{i=1}^3 K_i x_i \right]
 \end{aligned} \tag{5}$$

この式の w はNS方程式における流速、渦度輸送方程式における渦度、あるいは Re を Pe (ペクレ数) に置き換えることにより温度に対応する量である。差分計算と比較するために $t = n \delta t$ とおく。これは時間刻み δt で計算した場合の n ステップ目の値に相当する。このとき(5)式は

$$w^n = A_0 b^n \exp \left[j \sum_{i=1}^3 (K_i x_i) \right] \tag{6}$$

となる。ここに

$$\begin{aligned}
 b &= \exp \left\{ -(\lambda + j\xi) \right\} \\
 \lambda &= \sum_{i=1}^3 K_i^2 \delta t / Re, \quad \xi = \sum_{i=1}^3 K_i u_i \delta t
 \end{aligned} \tag{7}$$

b は単位ステップ当たりの解の増幅率と位相変化率を示す。すなわち線形解析解の増幅率 $|b|$ 、位相変化率 $\text{Im}[\ln b^{-1}]$ は

$$\begin{aligned}
 |b| &= e^{-\lambda} \\
 \text{Im}[\ln b^{-1}] &= \xi
 \end{aligned} \tag{8}$$

となる。一方(3)式を空間的に中心差分、時間的にAdams-Bashforth差分近似を用いて計算すると、(6)式の形の解は

$$\begin{aligned}
 b &= \left[1 - 3(\lambda + j\xi) / 2 \pm \{ 1 + 9(\lambda \right. \\
 &\quad \left. + j\xi) / 4 - (\lambda + j\xi)^2 \}^{1/2} \right] / 2 \\
 \xi_i &= K_i u_i \delta t, \quad \eta_i = \sin(K_i h) / (K_i h), \\
 \lambda_i &= K_i^2 \delta t / Re, \quad \nu_i = \{ \sin(K_i h / 2) / (K_i h / 2) \}^2 \\
 (h; \text{等間隔格子幅}) \\
 \xi &= \sum_{i=1}^3 \xi_i \eta_i, \quad \lambda = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \nu_i
 \end{aligned} \tag{9}$$

Adams-Bashforth差分は三点を用いるので解が二つ存在し、 $h, \delta t \rightarrow 0$ としたときに(5)式に近づく方が物理モードであり、他方が計算モードである。

ここで対象とする流れは Re の十分大きい流れであるから、 $\lambda \ll 1$ の場合についてだけ考える。図3は物理モー

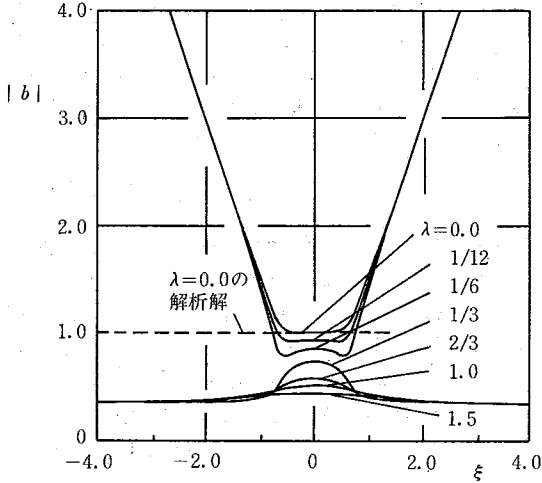


図3 物理モードの増幅率 |b|

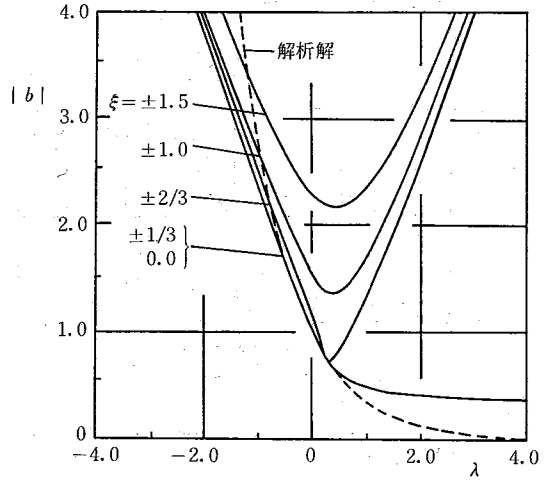


図5 物理モードの増幅率 |b|

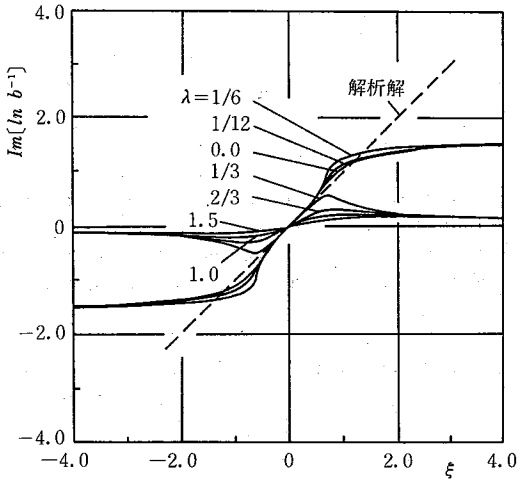


図4 物理モードの位相変化率 $Im[\ln b^{-1}]$

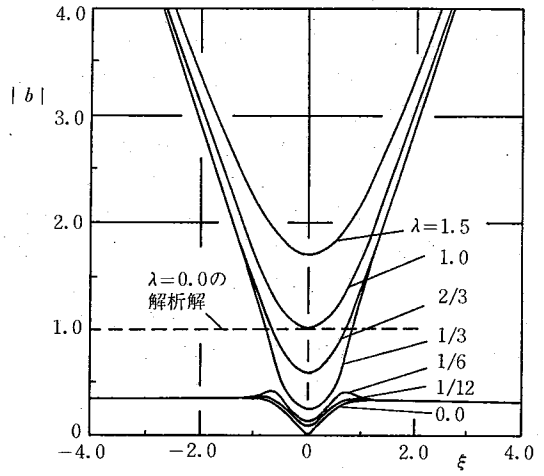


図6 計算モードの増幅率 |b|

ドの増幅率を表している。λ=0の解析解も併記してある。初期に発生した誤差が成長しないためには |b| ≤ 1.0 でなければならない、このとき ξ は |ξ| ≤ 0.032 である。格子幅 h で扱える波数の範囲は 0 ~ π/h であるから (9) 式より

$$\delta t \leq M_{in}[h / \{31.3(\sum_{i=1}^3 |u_i|)\}] \quad (10)$$

(10) 式を満たすように δt を定めれば、物理モードは発散しない。

λ=0の極限においては(10)式が減衰条件になるが、現実の流動現象には粘性の効果も期待できる。たとえば図1における流れにおいて代表長さ L、代表流速として断面平均流速を用い、動粘性および渦動粘性を含めたレイノルズ数 $Re_{ef} \sim 2160$ の場合には $h=1/50$, $\delta t \sim 1/1000$,

格子数を一方向に40以下で計算しようとするとき、 $\pi/(40h) \leq K_i \leq \pi/h$ の範囲の波数領域を扱うことになる。このとき λ は $6.42 \times 10^{-5} \leq \lambda \leq 4.17 \times 10^{-2}$ となるから、(9) 式より |b| ≤ 1.0 となるためには |ξ| ≤ 0.12 でなければならない、これから

$$\delta t \leq M_{in}[h / \{8.33(\sum_{i=1}^3 |u_i|)\}] \quad (11)$$

が減衰条件になる。

図4に物理モードにおける位相の変化を示す。併せて解析解も示してある。差分解は |ξ| ≤ 1.5 においては解析解と同じ傾向をもつが、|ξ| > 1.5 においては異なる傾向をもつ。K_i = π/(2h) において ξ は最大になるためこのとき位相誤差は最大になると思われる。このことは SMAC 法を含めて差分法の欠点であるが、今のところ位相誤差

研究速報

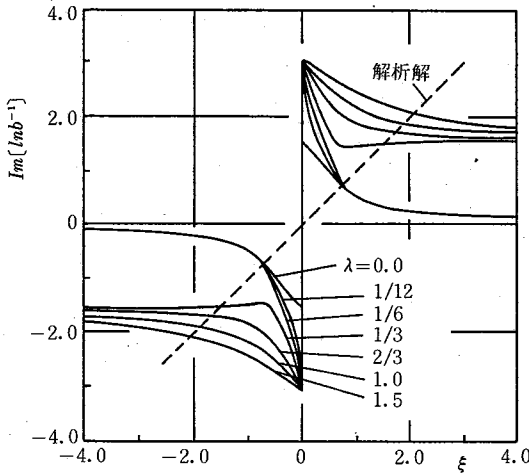


図7 計算モードの位相変化率 $Im[\ln b^{-1}]$

が原因で不安定性が生じた例はほとんど見当たらない。

図5は ξ をパラメタとして物理モードを示したものである。 λ の小さい場合には $|\xi| \leq 2/3$ においては差分解は解析解にかなり近い値となる。

図6に計算モードの増幅率を示す。 Re が大きい範囲では $|b| < 1.0$ となり、初期値に計算モードを持った誤差があったとしても時間とともに減衰する。したがって計算モードが原因で不安定になることはない。図7に計算モードの位相を示す。図より計算モードは、位相速度が物理現象とはまったく異なるものであるから、計算を行う場合計算モードが成長しないようにする必要がある。

leap-frog 差分を用いるといわゆる Energy splitting が生じ計算が不安定になることがある。これは計算モードの成長が原因であるといわれている⁸⁾。Adams-Bashforth 差分は Re の大きい範囲でこの不安定性を生じさせない。

4. ま と め

線形化された3次元 Burgers の式を対象とし、使用する差分法における初期誤差の発散、減衰の評価を行った。 $\lambda=0$ の極限においては(10)式が減衰条件になるが、現実の流動現象には粘性の効果を期待できる。たとえば $Re_{ef} \sim 2160$, $h=1/50$, $\delta t \sim 1/1000$, 格子数として一方向に40以下のとき(11)式が減衰条件になる。この種の減衰条件より差分計算における適当な空間分割数、時間分割数の予測を行うことができる。

この研究の一部は東京大学生産技術研究所選定研究費によって行われたものであることを付記する。

(1982年11月15日受理)

参 考 文 献

- 1) 河村, 日機論, 45 (1979), 1038
- 2) 村上, 加藤, 生産研究, 33 (1981), 101
- 3) K. Horiuchi, Ph. D. thesis, University of Tokyo, (1981)
- 4) P. Moin, J. Kim, J. Fluid Mech. 118 (1982), 341
- 5) C. W. Hirt, J. L. Cook, J. Comp. Phys., 10 (1972), 324
- 6) F. H. Harlow, J. E. Welch, Phys. Fluids, 8 (1965), 2182
- 7) 坂本, 東大工学部修士論文 (1975)
- 8) D. K. Lilly, Monthly Weather Rev., 93 (1965), 11