研究速報
UDC 624.072.2

# 新離散化モデルによる粘弾性地盤上の梁の解析

An Analysis of Beams on Viscoelastic Foundations by Means of New Discrete Models

竹内則雄*・三藤正明**・川井忠彦***
Norio TAKEUCHI, Masaaki MITO and Tadahiko KAWAI

## 1. まえがき

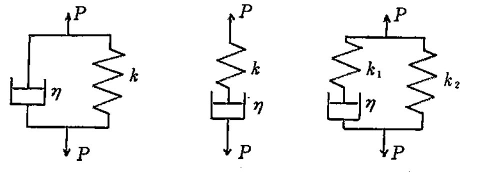
川井によって提案された新離散化モデル[1]の梁要素は，通常の骨組構造物はもちろん，杭とか矢板のように弾性地盤，あるいは弾塑性地盤と構造物の連成問題においても，きわめて有効であることが竹内[2]によって確かめられている．

粘弾性地盤上の梁は，たわみと地盤反力が時間とともに変化するため，数式上の取り扱いがきわめて複雑になる一方，実際の挙動をより正確に表しているものと思われる．本論文では，Freudenthal, Lorsch[3]によって線形粘弾性地盤上の梁の解析に用いられたKelvinモデル，Maxwellモデル，Standard solidモデルの3タイプの地盤を想定し，これを川井モデルに適用して，園田[4]らが固有関数を用いて求めた解析解との比較を行った．

## 2. 粘弾性モデル

粘弾性体は，時間に依存する力学的特性をもち，力とたわみが比例するばねと，力がたわみ速度に比例する粘性ダッシュポットの組み合せにより近似的に表現でき，その組み合せによって数多くの構成式が提案されている．本論文では，それらのうち図-1に示す3種の粘弾性地盤モデルを想定した．(a)はばねとダッシュポットが並列に結合されているKelvinモデル，(b)はばねとダッシュポットが直列に結合されているMaxwellモデル，(c)はばねとMaxwellモデルが並列に結合されているStandard solidモデルである．ここで，図中の$k$，$k_1$，$k_2$はばね定数，$\eta$は粘性係数，$P$は力を表す．Standard solidモデルは，KelvinモデルとMaxwellモデルを重ね合わせたものと考えられる．図-1(c)のばね$k_1$が非常に大きければKelvinモデルと同様なものになり，ばね$k_2$が非常に小さければ，Maxwellモデルと同様なものになる．

各モデルに対する力学的特性を明確にするため，一定の力が作用した場合の時間とたわみの関係を図-2に示す．図-2より理解されるように，Kelvinモデルは，たわみ速度が時間とともに減じてゆき，最終的にたわみは，Winklerの値に収束する．それに対し，Maxwellモデルは，力が作用した瞬間は弾性たわみを示すが，その後は時間に比例してたわみが線形増加をし定常クリープ現象となる．一方，Standard solidモデルは，力が作用した瞬間は弾性たわみを示しているが，その後はたわみ速度が時間とともに減じてゆき，Kelvinモデルと同様，たわみが一定値に収束する．このStandard solidモデルは，KelvinモデルとMaxwellモデルの中間の挙動を表現しており，3モデル中では最も現実の地盤に近いものと思われる．




(a) Kelvinモデル (b) Maxwellモデル (c) Standard solidモデル

図-1　粘弾性モデル

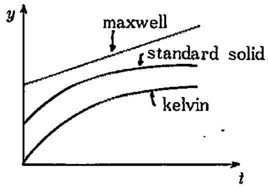



図-2　一定の力が作用した場合の各モデルの時間・たわみの関係

## 3. 粘弾性地盤上の梁の定式化

川井によって提案された離散化モデルにおける梁要素の剛性行列を誘導する方法は，文献(5)にすでに与えられている．ここでは，粘弾性地盤の取り扱い方をKelvinモデル，Maxwellモデル，Standard solidモデルの3タイプについて行う．

### (1) Kelvinモデルの定式化

力$P$は，ばねとダッシュポットに配分されるが，変位$y$が共通であることより，以下の関係が得られる．

* (株)協和コンサルタンツ
** 五洋建設(株)
*** 東京大学生産技術研究所　第2部

$$P=ky+\eta\dot{y} \qquad (1)$$

ここで，$k$ はばね定数，$\eta$ は粘性係数で上付きの・は，時間による変化率を表す．したがって

$$\dot{y}=P/\eta-y/\tau \qquad (2)$$

ここで，$\tau=\eta/k$ は遅延時間である．

力 $P$ が，$\Delta t$ 間において変化すると仮定して増分変位を求めるため，(2)式を山田の方法[6]を用いて増分形式で表す．このとき，以下のような増分力 $\Delta P$ と増分変位 $\Delta y$ の関係式が得られる．

$$\Delta P=(\Delta y-\Delta y_a)/c(t) \qquad (3)$$

$$c(t)=\{1-[1-\exp(-\Delta t/\tau)]\cdot\tau/\Delta t\}/k \qquad (4)$$

$$\Delta y_a=[P/k-y][1-\exp(-\Delta t/\tau)] \qquad (5)$$

ここで，$t$ は任意の時間，$\Delta t$ は増分時間である．

（2） Maxwellモデルの定式化

全変位量は，ばねおよびダッシュポットから得られる変位の和である．ゆえに，

$$\dot{y}=\dot{P}/k+P/\eta \qquad (6)$$

である．上式を変化させ

$$\dot{P}=k\dot{y}-P/\tau \qquad (7)$$

となる．ここで，$\tau=\eta/k$ は緩和時間である．(7)式を差分表示すれば，増分力 $\Delta P$ と増分変位 $\Delta y$ の関係式は次のように得られる．

$$\Delta P=k\cdot\Delta y-P\cdot\Delta t/\tau \qquad (8)$$

（3） Standard solidモデルの定式化

増分力 $\dot{P}$ は，Maxwell要素とばねに配分される増分力 $\dot{P}_1$，$\dot{P}_2$ の和である．ゆえに

$$\dot{P}=\dot{P}_1+\dot{P}_2 \qquad (9)$$

である．ここで，$\dot{P}_1$，$\dot{P}_2$ は，

$$\dot{P}_1=k_1\dot{y}-P_1/\tau \qquad (10)$$

$$\dot{P}_2=k_2\dot{y} \qquad (11)$$

である．(10)，(11)式を(9)式に代入する．

$$\dot{P}=(k_1+k_2)\cdot\dot{y}-P_1/\tau \qquad (12)$$

ここで，$k_1$，$k_2$ はばね定数，$\tau=\eta/k_1$ である．(12)式を差分表示すれば，増分力 $\Delta P$ と増分変位 $\Delta y$ の関係を次のように得ることができる．

$$\Delta P=(k_1+k_2)\cdot\Delta y-P_1\cdot\Delta t/\tau \qquad (13)$$

以上で各地盤タイプの増分力 $\Delta P$ と増分変位 $\Delta y$ の関係式が求まった．次に新しい梁要素に関する定式化について説明する．なお，これ以後の定式化の説明は，各モデルとも同一であるため，Standard solidモデルを用いて説明し，他の2モデルについての詳細な説明は省略する．

さて，新しい梁要素では，剛体変位を仮定しているので，図-3に示すように要素重心での垂直方向変位を $v$，回転を $\theta$ とすれば，任意点における変位 $y$ は，

$$y=v+\theta\cdot x$$

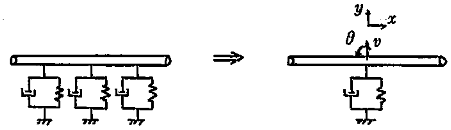



図-3　粘弾性地盤上の新しい梁要素

$$=\lfloor 1 \quad x \rfloor\begin{bmatrix} v \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{U} \qquad (14)$$

$$\boldsymbol{B}=\lfloor 1 \quad x \rfloor \qquad (15)$$

$$\boldsymbol{U}^t=\lfloor v \quad \theta \rfloor \qquad (16)$$

となる．増分外力を $\Delta\boldsymbol{F}$ とし，仮想増分変形を $\delta\Delta$U とすれば，増分形仮想仕事式は以下のようになる．

$$\delta\Delta\boldsymbol{U}^t\cdot\Delta\boldsymbol{F}=\int\delta\Delta y\cdot\Delta P dx$$

$$=\int\delta\Delta y[(k_1+k_2)\cdot\Delta y-P_1\cdot\Delta t/\tau]dx$$

$$=\delta\Delta\boldsymbol{U}^t\cdot\int\boldsymbol{B}^t\cdot(k_1+k_2)\cdot\boldsymbol{B}dx\cdot\Delta\boldsymbol{U}$$

$$-\delta\Delta\boldsymbol{U}^t\cdot\int\boldsymbol{B}^t\cdot P_1\cdot\Delta t/\tau\, dx \qquad (17)$$

$$\Delta\boldsymbol{F}=\int\boldsymbol{B}^t(k_1+k_2)\boldsymbol{B}dx\cdot\Delta\boldsymbol{U}-\int\boldsymbol{B}^t\cdot P_1\cdot\Delta t/\tau\, dx \qquad (18)$$

$$\int\boldsymbol{B}^t\cdot(k_1+k_2)\cdot\boldsymbol{B}dx=(k_1+k_2)\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l^3/12 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

$$\int\boldsymbol{B}^t P_1\cdot\Delta t/\tau\, dx=P_1\cdot\Delta t/\tau\begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (20)$$

ここで，$l$ は梁長であり，$P_1$ は要素重心の値を用いた．

以上により，増分外力と増分変形の関係が求まった．新しい梁要素の剛性行列に(19)式で示したばね剛性を重ね合わせ，時間 $t=0$ の弾性解を初期値とし，その後は，初期ひずみ法[7]に従ってくり返し計算を実行し，任意時間の解を求める．ただし，Kelvinモデルは，$\Delta t$ を小さくとり，初期値を求めた．この弾性解を用いて，(20)式より，時間 $\Delta t$ 後の増分荷重を求める．この増分荷重を用い，平衡方程式を解くことにより増分変形 $\Delta\boldsymbol{U}$ が求まり，さらに増分地盤反力 $\Delta P$ を求める．これらの増分値を初期値に加算することにより，$\Delta t$ 時間の値を求める．その後は，$\Delta t$ 時間の値を初期値とし，同じ手順をくり返すことにより，次の時間増分 $\Delta t$ に対する解が求まる．

Maxwellモデル，Kelvinモデルについて言及すれば，(17)式の $\Delta P$ の項におのおの(8)式と(3)式を代入し，その後は，Standard solidモデルと同じ手順により計算すれば良い．

## 4. 数値計算

数値計算例として，両端自由な一様断面梁の中央に，

集中荷重が作用した場合を考えた．用いたパラメーターは，3モデルのばね定数をすべて等しいとし，断面定数を $(EI/k)/l^4=10^{-3}$ となるよう決めた．ここに，$E$ は梁の弾性係数，$I$ は梁の断面二次モーメントである．計算に用いた時間きざみは，Kelvin モデルでは $\Delta t/\tau=0.005$，Maxwell モデル，Standard solid モデルでは $\Delta t/\tau=0.5$ である．また，Kelvin モデルについては，簡単のため，(19)式中の回転項の剛性を梁要素の剛性に重ね合わせることを行わなかった．計算ケースとしては，梁の分割数と解の収束性を調べるため，半梁長を5，10，15，20分割の合計4ケース行った．

図-4，5，6は，$t/\tau=0$ から $t/\tau=\infty$ における各モデルのたわみ，曲げモーメント，地盤反力を園田らの解析解と比較したものである．図は10分割の例で，実線が園田らの解，○印が川井モデルによる計算結果を表している．たわみは，中央点でやや大き目の値を示しているが，全体的に見ればきわめて良好な精度で解が求まっている．また，曲げモーメント，地盤反力は，梁全体を通して，良好な結果を示している．図-7，8，9は，各モデルの中央点のたわみ，曲げモーメントの誤差および中央点付近の地盤反力の誤差と分割数との関係を，$t/\tau=0$ から $t/\tau=\infty$ までの各時間に対してプロットしたものである．たわみと地盤反力の誤差は，分割数が多くなるにつ

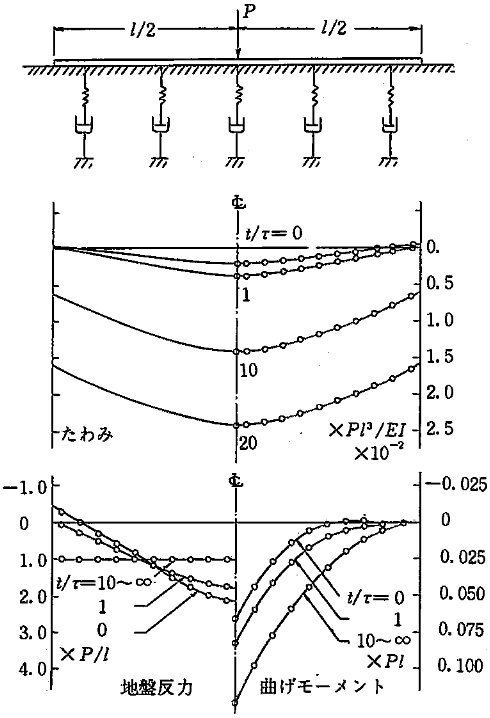



図-5　Maxwell モデルに対する解析解との比較

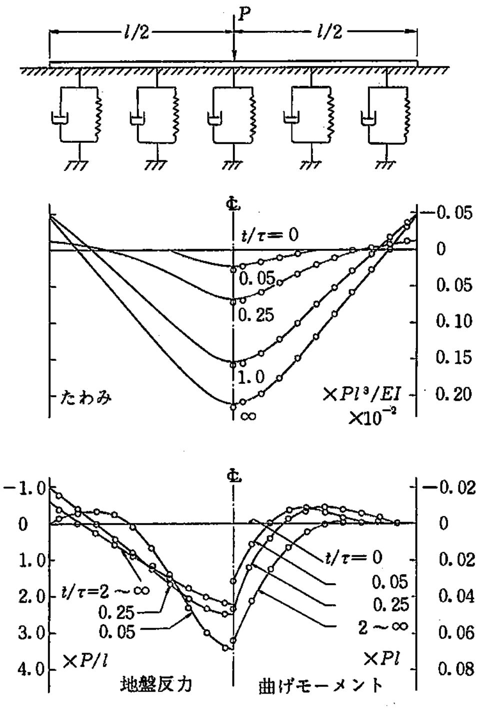



図-4　Kelvin モデルに対する解析解との比較

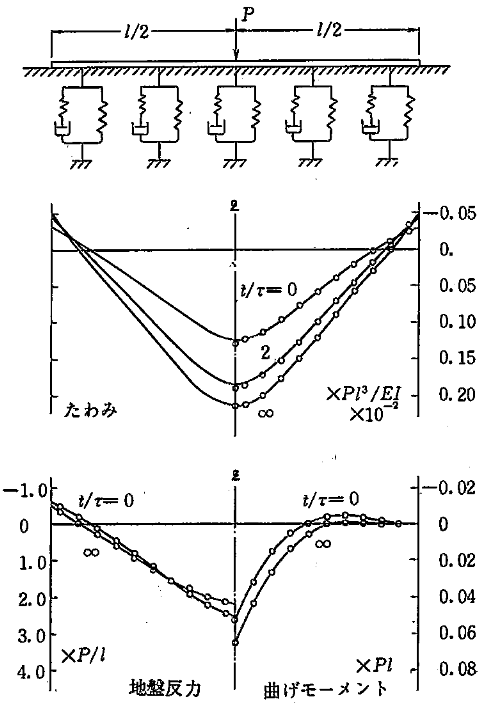



図-6　Standard solid モデルに対する解析解との比較

研　究　速　報

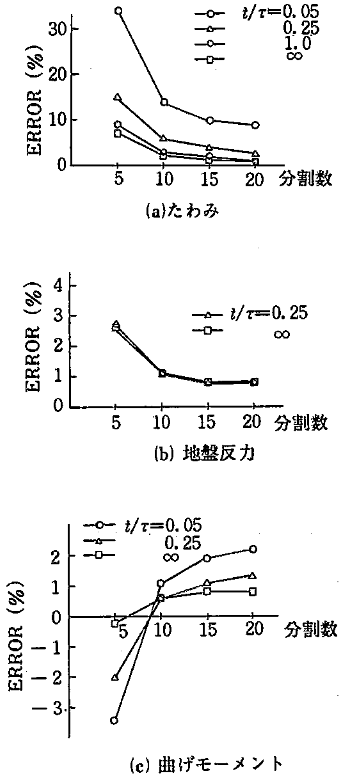



図-7　Kelvin モデルに関する梁の中央点の誤差評価

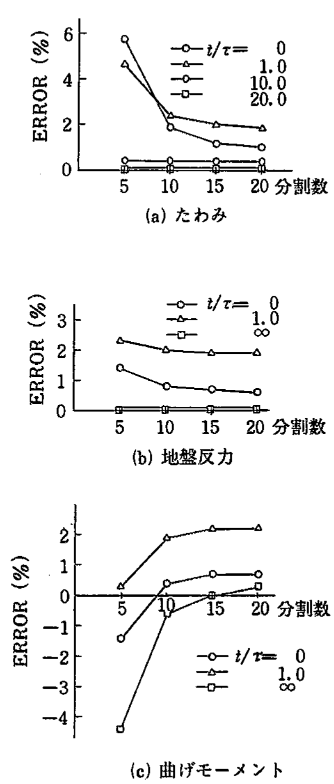



図-8　Maxwell モデルに関する梁の中央点の誤差評価

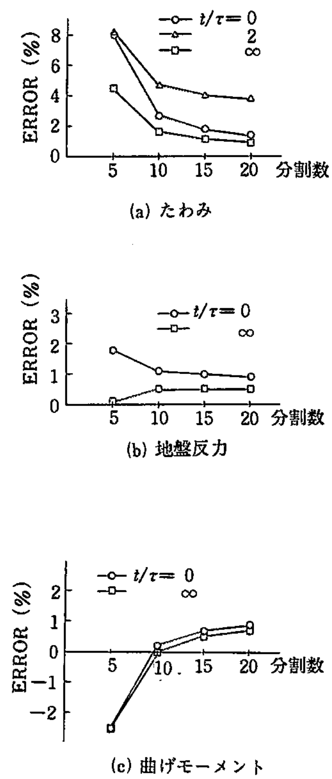



図-9　Standard solid モデルに関する梁の中央点の誤差評価

れて減少し，また，時間の経過とともに減少することがわかる．曲げモーメントは，分割数が増すにつれて，高目の解に収束し，時間の経過とともにこの値は減少する．しかし，誤差は，正解に対して1～2％であるため，工学的にほとんど問題にならないと思われる．

前に述べたが，計算手法としては，簡単な差分式を用い，また，時間きざみも大きく取ったが，全般的に良好な精度で解が求まることがわかった．

## 5．ま　と　め

川井によって提案された新離散化モデルを用いて，粘弾性地盤上の梁の解析を行った．地盤モデルは，Kelvin モデル，Maxwell モデル，Standard solid モデルの3タイプ考慮し，半梁長について10分割程度すれば，良好な解が得られる．誤差は，曲げモーメント，地盤反力がたわみに比べて小さく，また，時間の経過とともに減少してゆく．以上のように，本モデルは剛体変位場を仮定し，地盤の影響をあらかじめ積分することにより支点ばねとして導入しているため，取り扱いが非常に簡単になっている．それにもかかわらず，本モデルは，精度の高い要素となっており，今後粘弾塑性地盤の梁の解析に対しても有効に利用できるものと思われる．

（1982年8月4日受理）

## 参　考　文　献

1) Kawai, T.: New element models in discrete structual analysis, 日本造船学会論文集，第141号（1977）
2) 竹内則雄，神尾洋一，川井忠彦：新しい梁モデルによる地盤を考慮した骨組構造物の極限解析，第27回構造工学シンポジウム論文集，pp. 189～198（1981）
3) A. M. Freudenthal and H.G. Lorsch: The Infinite Elastic Beam on a Linear Viscoelastic Foundation Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol. 83, No. EMI, pp. 1158～1158-22 1957.
4) 園田恵一郎，小林治俊，石尾年光：線形粘弾性基礎上のはりの解析，土木学会論文報告集，第247号1976年3月
5) 竹内則雄，神尾洋一，川井忠彦：新しい梁モデルによる弾性床上の梁の解析，生産研究，Vol. 33，No. 1，pp. 18～21（1981）
6) 山田嘉昭：塑性・粘弾性，有限要素法の基礎と応用シリーズ6，培風館，1981，pp. 130～135
7) 桜井春輔：有限要素法の地盤・岩盤への応用，経営開発センター，講習会テキスト，pp. 58～68