

# 土のねじり単純せん断試験 (VIII) 砂の平面ひずみねじり単純せん断試験 (その5)

Stress-Strain Behaviour of Soil by Torsional Simple Shear Test (VIII)

—Plane Strain Torsional Shear Test on Sand—

福島伸二\*・龍岡文夫\*

Sinji FUKUSHIMA and Fumio TATUOKA

## 1. まえがき

これまでにねじり単純せん断試験におけるせん断中の主応力の回転角 ( $\psi$ ) と供試体水平面上の応力比 ( $\tau_{at}/\sigma_a$ ) の関係を近似するのに小田・小西の式 ( $\tau_{at}/\sigma_a = \kappa \tan \psi$ ) が実用的に有効であることを報告してきた (前報告 (VI)<sup>1)</sup>, (VII)<sup>2)</sup>). そして特に前報告 (VII) では排水条件に関係なく破壊時の供試体の応力状態の推定にも小田・小西の式が有効であることを示してきたが、今報告では単純せん断試験のせん断中の主応力の変化を推定する場合にも小田・小西の式が有効であることを報告したい。

## 2. 応力比-ひずみ増分比関係

粒状体はせん断変形を受けると体積が変化するが、この現象を応力比とひずみ増分比で表したのが Rowe, P. W. (1962)<sup>3)</sup> である。彼は規則的に配列している球がせん断を受けたときの力のつりあいと変位の幾何学的な適合条件からこの応力比-ひずみ増分比関係を導いている。ここではこの方法によるよりも、Taylor のモデルを用いて表現した方が一般的に理解しやすいのでこれに従うことにする。Taylor のモデルは供試体に加えたエネルギーと供試体内で消費されるエネルギーの関係を表している。図 31 より供試体に一樣なせん断変形を  $d\gamma_{at}$  だけ与えたとき、これによる高さ変化が  $d\epsilon_a \cdot h$  だけ生じたとすると、

供試体に与えたエネルギー：

$$\tau_{at} \cdot d \cdot d\gamma_{at} \cdot h + \sigma_a \cdot d \cdot d\epsilon_a \cdot h$$

供試体内で摩擦により消費されるエネルギー：

$$\sigma_a \cdot f \cdot d \cdot d\gamma_{at} \cdot h$$

ここで  $f$  は固体摩擦的な係数である。この両者を等しいとおき、両辺を  $\sigma_a \cdot d \cdot d\gamma_{at} \cdot h$  で割ると、 $d\epsilon_a = d\epsilon_v$  を考えて、

$$\frac{\tau_{at}}{\sigma_a} + \frac{d\epsilon_v}{d\gamma_{at}} = f \tag{16}$$

\* 東京大学生産技術研究所 第5部

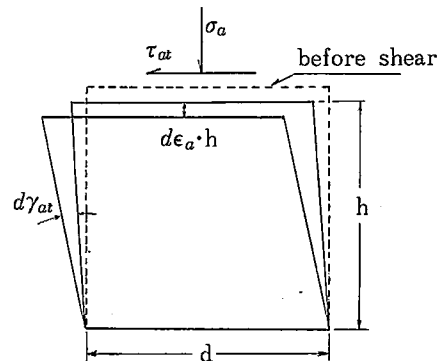


図31 Taylor's Model (平面ひずみ条件)

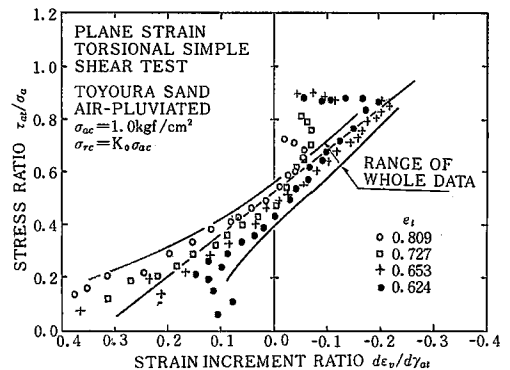


図32 応力比-ひずみ増分比関係

これを移項すれば、

$$\frac{\tau_{at}}{\sigma_a} = f - \frac{d\epsilon_v}{d\gamma_{at}} \tag{16'}$$

を得る。したがってこの関係は与えたエネルギーが供試体内で貯えられずにすべて供試体内で摩擦により消費されてしまうと考えているので非弾性的なせん断変形を考えていることになる。図 32 に平面ひずみねじり単純せん断試験における応力比-ひずみ増分比関係を示してある。図中の実線は全ての試験データのバラツキ範囲を示している。この図から、せん断初期と破壊近くを除いてほぼ

(16') 式で表されるような直線関係が成り立っていることがわかる。しかし、直線の傾きは(16')のように(-1)でないが、これはおそらく供試体に与えたエネルギーが全て摩擦だけでなく砂粒子のかみ合せの変化や、砂粒子自身の回転などに消費されているためと考えられよう。せん断初期に直線関係からはずれているのは体積変化そのものが小さいため計算上バラツクこと、またこのような微小変形領域では弾性的な挙動を示すため与えたエネルギー全てが供試体内で摩擦に消費されるだけでなく貯えられるエネルギーも存在しているためと考えられる。また破壊近くでは供試体にすべり線が発生してくるので変形する領域と変形しない領域が混在するようになり摩擦によるエネルギー消費は変形する領域のみでなされるため供試体全体が一樣変形しているとして摩擦によるエネルギー消費を考えている(16)式は成り立たなくなるものと考えられる。しかし密度による差が多少あるにせよ、せん断初期を除き供試体が一樣変形している間は(16')式のような直線関係が成立し、そしてこの関係は砂がせん断変形をするときの何らかの基本的な法則性を表現していると考えてよいことがわかる。したがって砂のせん断特性をモデル化しようとするとき、(16')式のような法則性を用いれば砂のダイレタンシーを統一的に表すことができる。例えば、図中に示した直線は、

$$\frac{\tau_{at}}{\sigma_a} = 0.53 - 1.54 \frac{d\varepsilon_v}{d\gamma_{at}} \quad (17)$$

であり、ここで示した平均的な実験データを近似しているといえよう。

### 3. ねじり単純せん断試験の応力・ひずみ関係

平面ひずみねじり単純せん断試験の応力比( $\tau_{at}/\sigma_a$ )-ひずみ( $\gamma_{at}$ )関係の例を前報告(V)<sup>4)</sup>の図12に示した。前報告(VI)で述べたようにねじり単純せん断試験の水平方向の垂直応力の条件を考えると、平面ひずみねじり単純せん断試験はNGI型(あるいはSGI型)単純せん断試験と同様であることからこの応力比-ひずみ関係はNGI型(あるいはSGI型)単純せん断試験の供試体水平面上の応力比( $\tau_n/\sigma_v$ )とひずみ( $\gamma$ )関係と同様のものと考えられる。この関係をKondner, R. L. and Zelusko, J. S. (1963)<sup>5)</sup>が提案している双曲線

$$\frac{\tau_{at}}{\sigma_a} = \frac{\gamma_{at}}{a + b\gamma_{at}} \quad (18)$$

を用いて近似する。ここで  $a, b$  は密度( $e_i$ )、拘束圧などに依存するパラメーターである。 $a, b$  は図33(a), (b)に示すように実測した  $\tau_{at}/\sigma_a - \gamma_{at}$  関係を  $\gamma_{at}/(\tau_{at}/\sigma_a) - \gamma_{at}$  にプロットし直してこれを直線近似したときの切片( $a$ )と傾き( $b$ )より決められる。このとき、 $a, b$  はそれ

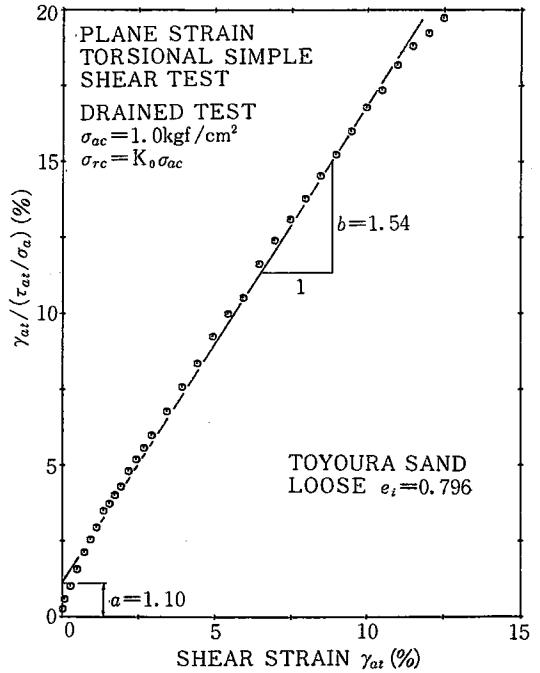


図33(a) パラメーター  $a, b$  の決定 (ゆるい砂)

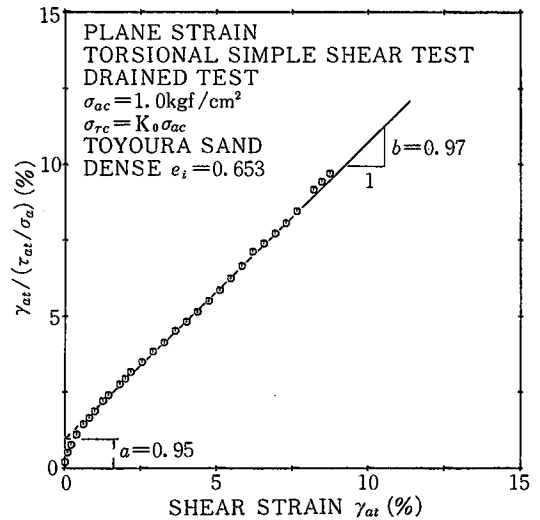


図33(b) パラメーター  $a, b$  の決定 (密な砂)

ぞれ  $a = [\gamma_{at}/(\tau_{at}/\sigma_a)]_{\gamma_{at} \rightarrow 0}$ ,  $b = 1/(\tau_{at}/\sigma_a)_{\max}$  を意味している。つまり、 $a$  は  $(\tau_{at}/\sigma_a) - \gamma_{at}$  曲線のせん断初期の傾きの逆数、 $b$  は  $(\tau_{at}/\sigma_a) - \gamma_{at}$  曲線の  $\gamma_{at} \rightarrow \infty$  となったときの  $(\tau_{at}/\sigma_a)$  の最大値の逆数である。

図33(a), (b)からわかるように  $\gamma_{at}/(\tau_{at}/\sigma_a) \sim \gamma_{at}$  関係は完全に直線関係にあるわけではなく、特にせん断初期においてそうである。このため全てのデータをできる限り直線で近似しようとする  $a$  を過大評価、つまり

研究速報

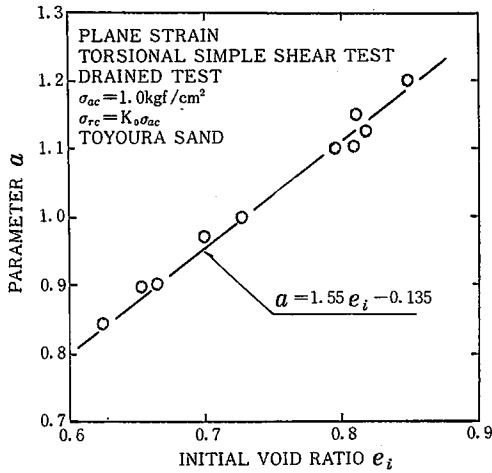


図34(a) パラメーター a と密度の関係

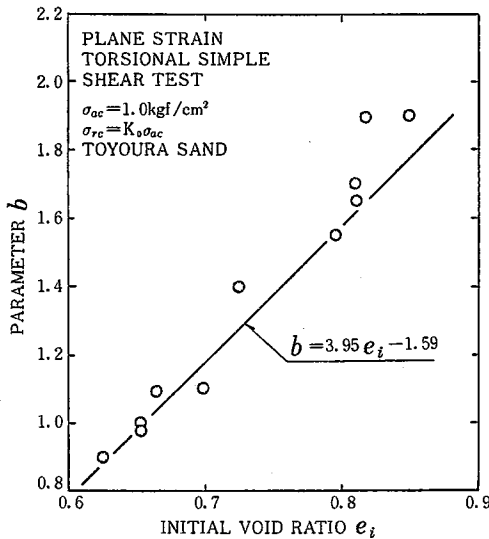


図34(b) パラメーター b と密度の関係

( $\tau_{at}/\sigma_a$ ) $\sim\gamma_{at}$  曲線の初期の傾きを過小評価することになるようである。このようにして求めた  $a, b$  の間隙比 ( $e_i$ ) に対してプロットしたのが図 34(a), (b) であるが、 $a, b$  は拘束圧  $\sigma_{ac} = 1.0 \text{ kgf/cm}^2$  が一定のときは間隙比 ( $e_i$ ) のみに依存していると考えてもよいようである。そして  $a, b$  はほぼ  $e_i$  と直線関係にあると言える。図 35(a) (ゆるい砂), (b) (密な砂) に実測した応力比 ( $\tau_{at}/\sigma_a$ ) とせん断ひずみ ( $\gamma_{at}$ ) の関係と (18) 式的双曲線で近似した ( $\tau_{at}/\sigma_a$ ) $\sim\gamma_{at}$  関係を実線で示してある。これより双曲線は全体的によい近似を与えていることがわかる。しかし前述したように  $a$  の決定のときに ( $\tau_{at}/\sigma_a$ ) $\sim\gamma_{at}$  曲線の初期の傾きを過小評価しているため、双曲線近似の曲線の方が初期傾きが小さくなっている。前節

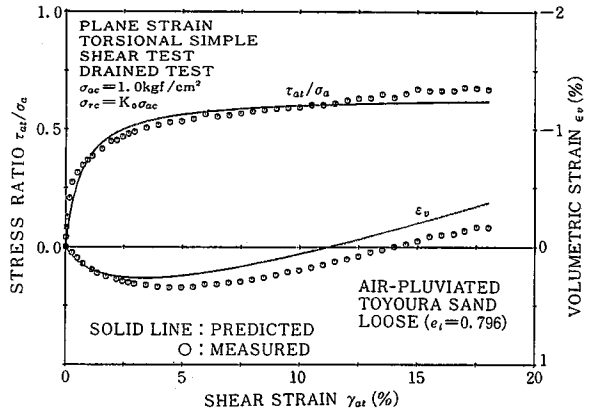


図35(a) せん断中の応力比と体積ひずみの変化 (ゆるい砂)

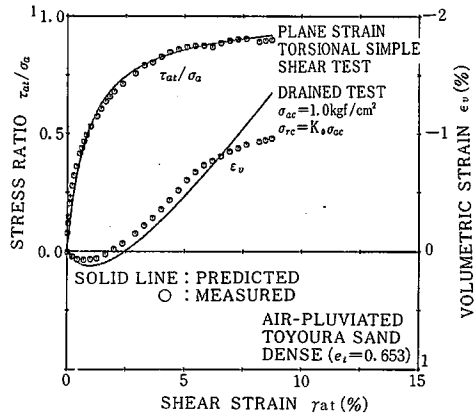


図35(b) せん断中の応力比と体積ひずみの変化 (密な砂)

で述べたように応力比-ひずみ増分比関係が (15) 式で与えられているから、これと (16) 式を組み合わせて積分を行えば体積ひずみ ( $\epsilon_v$ ) とせん断ひずみ ( $\gamma_{at}$ ) の関係、つまり (15) 式を  $\tau_{at}/\sigma_a = c + d(d\epsilon_v/d\gamma_{at})$  とおくと

$$\epsilon_v = \frac{1}{d} \left( \frac{1}{b} - c \right) \gamma_{at} - \frac{a}{b^2 d} \log \frac{a + b\gamma_{at}}{a} \quad (19)$$

が得られる。この式から求めた  $\epsilon_v$  と  $\gamma_{at}$  の関係を図 35(a), (b) に実線で示してあるが、実測した  $\epsilon_v$  の傾向をよく近似していると言える。NGI 型 (SGI 型) 単純せん断試験では供試体水平面上の応力 ( $\sigma_v, \tau_h$ ) しかわからず主応力はわからない。そこでここでは小田・小西の式 ( $\tau_{at}/\sigma_a = \kappa \tan \phi$ ) と先に述べた ( $\tau_{at}/\sigma_a$ ) $\sim\gamma_{at}$  関係から単純せん断試験のせん断中の主応力を推定する方法について考えてみる。小田・小西の式を用いると平面ひずみねじり単純せん断試験の主応力は供試体水平面上の応力比 ( $\tau_{at}/\sigma_a$ ) と係数 ( $\kappa$ ) のみの関数 (前報告 (IV) の (1) ~ (3) 式) で次のように与えられる。

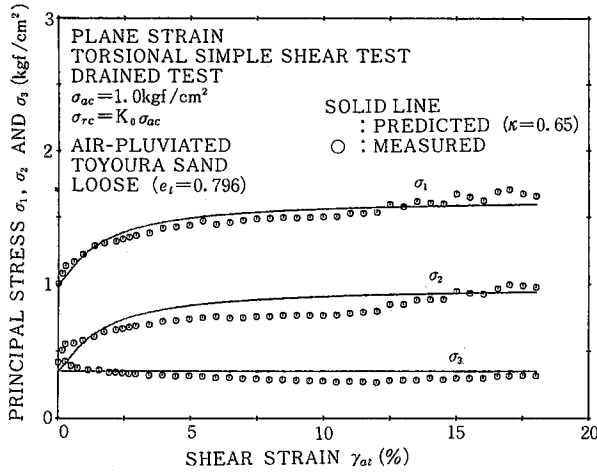


図36(a) せん断中の主応力の変化 (ゆるい砂)

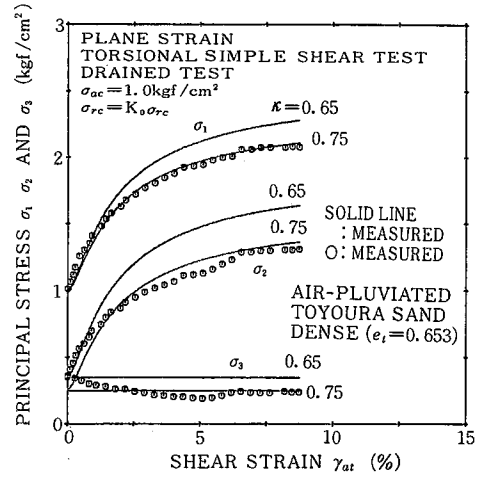


図36(b) せん断中の主応力の変化 (密な砂)

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_a \left[ 1 + \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau_{at}}{\sigma_a} \right)^2 \right] \\ \sigma_2 = \sigma_a \left[ 1 - \kappa + \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\tau_{at}}{\sigma_a} \right)^2 \right] \\ \sigma_3 = \sigma_a (1 - \kappa) \end{cases} \quad (20)$$

これらの双曲線で近似した  $\tau_{at}/\sigma_a \sim \gamma_{at}$  関係 ((18)式) と組み合わせると 3つの主応力 ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) とせん断ひずみ ( $\gamma_{at}$ ) の関係を供試体小平面上の応力の情報 ( $\tau_{at}/\sigma_a$ ) のみで求めることができる。図 36(a) (ゆるい砂) と図 36(b) (密な砂) に実測した主応力とひずみ関係と係数  $\kappa=0.65$  に対する上述の関係から計算で求めた主応力とひずみの関係を実線で示してある。ただし、密な砂の場合には係数  $\kappa=0.75$  に対する計算値も示してある。ゆるい砂では  $\kappa=0.65$  でもかなり良い近似を与えていると言えるが、密な砂では  $\kappa=0.65$  より  $\kappa=0.75$  の方がよい近似を与えていることがわかる。このようにせん断中の主応力の推定には  $\kappa$  値にかなり影響されることがわかる。全体的に密な砂では  $\kappa$  は大きな値を用いるべきであるが、主応力の推定に小田・小西の式が非常に有効であることは確かである。これらのことは水平方向の垂直応力の条件が平面ひずみねじり単純せん断試験と同様な NGI 型 (SGI 型) 単純せん断試験にも適用できるものと考えられ、弾塑性論によらずに小田・小西の式と供試体水平面上の応力比とひずみ量さえわかれば主応力とせん断ひずみの関係が得られる。ただし、以上のことは鉛直方向応力 ( $\sigma_v$ ) がせん断中一定な単純せん断変形をする場合に成り立つもので、同じ単純せん断変形でも複雑な応力経路の場合には適用できないことに注意すべきであ

る。

#### 4. 結 論

(1) 単純せん断試験の供試体水平面上の応力比 ( $\tau_{at}/\sigma_a$ ) とひずみ ( $\gamma_{at}$ ) の関係を Kondner et al. の双曲線を近似し、これと小田・小西の式を組み合わせるとせん断中の主応力を推定することができる。ただし小田・小西の式中の係数  $\kappa$  の選択には注意すべきである。

(2) 単純せん断中の体積ひずみ ( $\epsilon_v$ ) とせん断ひずみ ( $\gamma_{at}$ ) の関係は Kondner et al. の双曲線で近似した ( $\tau_{at}/\sigma_a \sim \gamma_{at}$ ) 関係と応力比・ひずみ増分比関係を組み合わせると推定できる。  
(1982年8月17日受理)

#### 参 考 文 献

- 1) 福島, 龍岡 (1982): 土のねじり単純せん断試験 (VI), 一砂の平面ひずみねじり単純せん断試験(その3)一, 生産研究, Vol. 34, No. 9
- 2) 福島, 龍岡 (1982): 土のねじり単純せん断試験 (VII), 一砂の平面ひずみねじり単純せん断試験(その4)一, 生産研究, Vol. 34, No. 10
- 3) Rowe, P. W. (1962): The Stress-dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assembly of Particles in Contact, Proc. of Royal Society, London Series A, Vol. 269, pp. 500~527
- 4) 福島・龍岡 (1982): 土のねじり単純せん断試験 (V), 一砂の平面ひずみねじり単純せん断試験(その2)一, 生産研究, Vol. 34, No. 8
- 5) Kondner, R. L. and Zelasko, J. S. (1973): Void Ratio Effects on the Hyperbolic Stress-Strain Response of a Sand, ASTM, STP No. 361, pp. 250~257